目　录

第一章 向　量

§1.1 基 本 内 容

引　言

微分几何是使用微积分方法研究几何图形的学科．这里介绍三维欧几里得空间 E^3 中曲线和曲面的理论．

曲线和曲面在一点邻近处的性质称为*局部性质*．研究局部性质的几何，称为*局部微分几何*．涉及整个几何图形的性质，称为*整体性质*．研究整体性质，特别是与局部性质有关的整体性质的几何就称为*整体微分几何*．

例 1.1 设 Q 和 R 是平面曲线 Γ 上 P 点附近的两个点，C_{QR} 是通过 P, Q 和 R 的圆，如图 1-1 所示．现在考虑当 Q 和 R 趋近 P 时，C_{QR} 的极限位置．一般来说，这极限位置是一个与 Γ 相切于 P 的圆 C．圆 C 的半径是 Γ 在 P 的*曲率半径*．因为这个曲率半径仅仅由 Γ 上靠近 P 的点所决定，故它是曲线的局部性质．

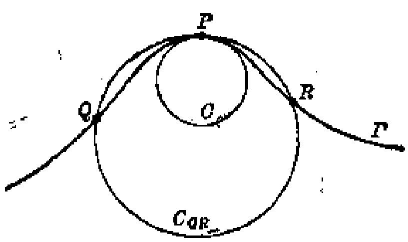


图 1-1

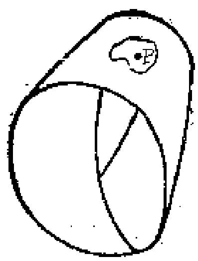


图 1-2

例 1.2 图 1-2 所示的麦比乌斯带是单侧曲面的一个例子．因单侧性由整个曲面的性质所决定，故它是图形的整体性质．注意，该曲面上任意点 P 周围的一小块是正则的双侧曲面，即*局部地看*，麦比乌斯带是双侧的．

我们首先研究曲线和曲面的局部性质，再把结果应用于整体微分几何问题．下面先复习 E^3 中的向量．

1. 向　量

所谓欧几里得空间 E^3 就是有序三数组 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 的集合，其中 a_1, a_2, a_3 是实数．一个向量就是 E^3 中的一个点，记作 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$ 或 $P, Q, R, \cdots$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的*反向量*记作 $-\boldsymbol{a}$，定义为 $-\boldsymbol{a}=(-a_1, -a_2, -a_3)$．*零向量*是向量 $\boldsymbol{0}=(0, 0, 0)$．向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 的*长度*或*大小*是实数 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$．显然 $|\boldsymbol{a}|\geqslant 0$，并且当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{a}|=0$．

2. 向 量 加 法

设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 是 E^3 的两个向量，它们的*和* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是用下式确定

的向量,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3).$$

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的差是向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 在问题 1.1 中证明向量加法满足

[A_1] $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (交换律),

[A_2] $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (结合律),

[A_3] $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ (对一切 $\boldsymbol{a}$),

[A_4] $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ (对一切 $\boldsymbol{a}$).

例 1.3 设 $\boldsymbol{a}=(1,\ -2,\ 0)$ 和 $\boldsymbol{b}=(0,\ 1,\ 1)$, 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,\ -1,\ 1)$, $-\boldsymbol{a}=(-1,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,\ 3,\ 1)$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$.

例 1.4 对任意的 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 运用 [A_1] 至 [A_4] 得

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}))=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

于是, 向量方程 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 这个解也是唯一的, 因为如果 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$, 则

$$(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

即 $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, 即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

已知 E^3 的两点 P 和 Q(即两个向量 P 和 Q), 以记号 $\boldsymbol{PQ}$ 表示它们的差 $Q-P$, 画出 $\boldsymbol{PQ}$, 以箭头表示从 P 到 Q, 如图 1-3. P 到 Q 的距离就是长度 $|\boldsymbol{PQ}|$. 显然, $\boldsymbol{PQ}=-\boldsymbol{QP}$, $|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{QP}|$, 当且仅当 $Q-P=Q'-P'$ 时 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{P'Q'}$. 并且对一切 P, 有 $\boldsymbol{PP}=\boldsymbol{0}$.

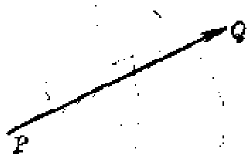


图 1-3

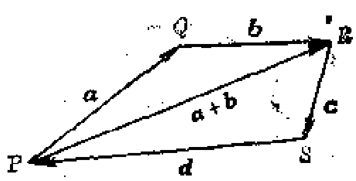


图 1-4

例 1.5 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{QR}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{RS}$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{SP}$, 如图 1-4, 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{QR}=Q-P+R-Q=R-P=\boldsymbol{PR},$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{PR}+\boldsymbol{RS}=R-P+S-R=S-P=\boldsymbol{PS}=-\boldsymbol{d},$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{PS}+\boldsymbol{SP}=S-P+P-S=\boldsymbol{0}.$$

3. 数乘向量

若 k 是实数, $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 是向量, 我们定义积 $k\boldsymbol{a}$ 为向量

$$k\boldsymbol{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3).$$

显然, 对一切 k 和 $\boldsymbol{a}$, 有 $0\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

在向量的研究中, 我们通常把实数称为**纯量**或**数量**, 积 $k\boldsymbol{a}$ 称为**数乘向量**.

在问题 1.4 中, 我们证明数乘向量满足

[B_1] $k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a}=k_1k_2\boldsymbol{a}$;

[B_2] $(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$, $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ (分配律);

[B_3] $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

最后, 若 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, 则

$$|k\boldsymbol{a}|=\sqrt{(ka_1)^2+(ka_2)^2+(ka_3)^2}=\sqrt{k^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

于是对一切 k 和 $\boldsymbol{a}$, 有

$$|k\boldsymbol{a}|=|k|\cdot|\boldsymbol{a}|. \tag{1.1}$$

例 1.6 设 $\boldsymbol{a}=(1,\ \pi,\ 0)$, $\boldsymbol{b}=(0,\ 2,\ -1)$,则 $2\boldsymbol{a}=(2,\ 2\pi,\ 0)$, $(-1)\boldsymbol{a}=(-1,\ -\pi,\ 0)=-\boldsymbol{a}$, 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(1,\ \pi-6,\ 3)$.

例 1.7 设 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 是已知向量, 又设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2)-2(-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3)-(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3)\\&=\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_2-4\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3=-\boldsymbol{u}_2-5\boldsymbol{u}_3.\end{aligned}$$

若对向量 $\boldsymbol{a}$ 和非零向量 $\boldsymbol{b}$, 有 $k\geqslant 0$ 使 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向. 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向, 且有相同的长度,则由等式(1.1), $|\boldsymbol{a}|=|k|\cdot|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$, 于是 $k=1$, 故 $\boldsymbol{a}$ 等于 $\boldsymbol{b}$. 由此可知, 一个向量将由它的方向和长度唯一确定. 若 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $k\leqslant 0$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 反向. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或者 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向,即有实数 k, 使 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$.

我们称具有单位长度的向量 $\boldsymbol{u}$ 为单位向量. 通常用 $\boldsymbol{u}_a$ 表示非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的单位向量. 显然,这单位向量可以用 $1/|\boldsymbol{a}|$ 乘 $\boldsymbol{a}$ 得到, 即

$$\boldsymbol{u}_a=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|. \tag{1.2}$$

例 1.8 设 $\boldsymbol{a}=(1,\ -1,\ 3)$, $\boldsymbol{b}=(2,\ -2,\ 6)$和 $\boldsymbol{c}=(-3,\ 3,\ -9)$,因为 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, 故向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向. 因为 $\boldsymbol{b}=-\left(\frac{2}{3}\right)\boldsymbol{c}$, 故向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 反向. 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的单位向量是向量 $\boldsymbol{u}_a=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|=(1/\sqrt{11},\ -1/\sqrt{11},\ 3/\sqrt{11})$.

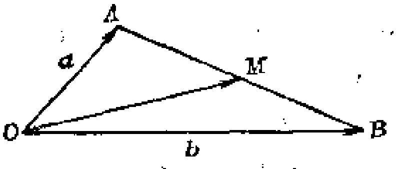


图 1-5

例 1.9 如图 1-5 所示, 在三角形 OAB 中, 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OB}$, 又设 M 是 AB 边上的中点, 则向量 $\boldsymbol{OM}$ 可以用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示如下:

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

4. 线性相关和线性无关

线性相关和线性无关是两个十分重要的概念. 向量 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_n$ 称为线性相关的,若存在不全为零的数 k_1, k_2, $\cdots$, k_n 使

$$k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{0}. \tag{1.3}$$

若向量 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_n$ 不是线性相关的,就称它们为线性无关的, 即若式(1.3)仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时成立, 则 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_n$ 线性无关.

注意,包含零向量的向量集合是线性相关的,因为我们总可以写成

$$\boldsymbol{0}+0\boldsymbol{u}_1+\cdots+0\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{0}.$$

例 1.10 向量 $\boldsymbol{a}=(1,\ -1,\ 0)$, $\boldsymbol{b}=(0,\ 2,\ -1)$, $\boldsymbol{c}=(2,\ 0,\ -1)$是线性相关的, 因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

例 1.11 设 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 于是, $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关. 反之, 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关, 这时有 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 不妨设 $k_1\neq 0$, 则 $\boldsymbol{a}=-(k_2/k_1)\boldsymbol{b}$. 这样一来,两个向量线性相关当且仅当这两个向量平行.

在问题 1.10 中,我们证明线性无关的向量有下面重要性质:

定理 1.1 若一个向量表为一些线性无关的向量的线性函数, 则它的表达式是唯一的. 即是说,若 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性无关且

$\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n=k_1'\boldsymbol{u}_1+k_2'\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n'\boldsymbol{u}_n$, 则 $k_1=k_1', k_2=k_2', \cdots, k_n=k_n'$.

5. 基 和 分 量

三个向量 $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0)$ 和 $\boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$ 线性无关, 因为 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3=(k_1, k_2, k_3)$, 若 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3=\mathbf{0}$, 则 $k_1=k_2=k_3=0$. 任意向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 可以写成 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性组合, 即 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$, 由定理 1.1 知道这个表示式是唯一的.

一般地, 一个向量的集合 B 称为 E^3 的一个基, 若(i) E^3 的每一个向量可表成 B 中的向量的一个线性组合, (ii) B 是线性无关的向量集合.

在问题 1.11 中我们证明

定理 1.2 任意三个线性无关向量构成 E^3 的一个基. 反之, E^3 的每一基由三个线性无关的向量组成.

设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 是空间的一个基, 且 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+a_3\boldsymbol{u}_3$, 数 a_1, a_2, a_3, 或简记为 a_i, $i=1, 2, 3$, 称为 $\boldsymbol{a}$ 关于基 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 的分量.

由定理 1.1 知道, 一个向量对于给定的基的分量是唯一的. 但必须注意, 向量的分量依赖于基的选择, 一般地, 如果基变了, 分量也会变化. 向量 $\mathbf{0}$ 是一个例外, 它的分量永远是 0, 0, 0.

一般用 $a_i, b_i, x_i, y_i, u_i, \cdots$ 表示向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \cdots$ 关于某指定的基的分量.

例 1.12 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 是基, 且 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}_2-2\boldsymbol{u}_3$ 和 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_3$. 证明 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性无关, 从而也构成一个基. 因为, 假定

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=(2k_1+3k_3)\boldsymbol{u}_1+(-k_1+k_2)\boldsymbol{u}_2+(-2k_2+k_3)\boldsymbol{u}_3=\mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{u}_i$ 线性无关, 可得

$$2k_1+3k_3=0, \quad -k_1+k_2=0, \quad -2k_2+k_3=0,$$

这是一个关于 k_1, k_2, k_3 的齐次线性方程组. 因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-5\neq0,$$

故有唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$. 因此, 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性无关. 注意, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的分量分别在上面的行列式的每一列中出现.

受上面例子启示, 一般地当有

定理 1.3 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 是基, 且设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1&=a_{11}\boldsymbol{u}_1+a_{21}\boldsymbol{u}_2+a_{31}\boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{V}_2&=a_{12}\boldsymbol{u}_1+a_{22}\boldsymbol{u}_2+a_{32}\boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{V}_3&=a_{13}\boldsymbol{u}_1+a_{23}\boldsymbol{u}_2+a_{33}\boldsymbol{u}_3, \end{aligned}$$

或简记为 $\boldsymbol{V}_j=\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ij}\boldsymbol{u}_i$, $j=1, 2, 3$. 则 $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3$ 是基的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

6. 向量的数量积

两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$和 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$的点积或数量积是实数

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

特别地，取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，我们有公式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2. \tag{1.4}$$

在问题1.14中，我们证明数量积满足

$[C_1]$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ （交换律）；

$[C_2]$ $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ （k=数）；

$[C_3]$ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ （分配律）；

$[C_4]$ 数量积是正定的，即

（i） 对任意 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqslant 0$;

（ii） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

显然，由定义，对任意 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$. 同样，若对任意 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=0$，再由 $[C_4]$(ii)，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

例 1.13 设 $\boldsymbol{a}=(-2, 1, 0)$和 $\boldsymbol{b}=(2, 1, 1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=5=|\boldsymbol{a}|^2$.

例 1.14 设 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 是已知向量，且设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2)\cdot(2\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=2\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2=2|\boldsymbol{u}_1|^2-\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2-|\boldsymbol{u}_2|^2$.

在问题1.16中，我们证明柯西–许瓦尔兹不等式

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$

其中等号成立的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，记作 $\theta=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$是下式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{1.5}$$

的唯一解.

例 1.15 如图1-6，在三角形 ABC 中，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，且 $\theta=\angle ACB=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. 因为

$$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$
$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b},$$

我们得余弦定理

$$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2.$$

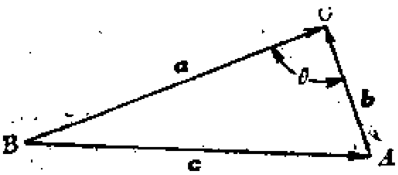


图 1-6

设 $\boldsymbol{b}$ 是非零向量. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的数量投影，记作 $P_b(\boldsymbol{a})$，是数量 $P_b(\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{b}|$. 向量 $P_b(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_b$，其中 $\boldsymbol{u}_b$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的方向上的单位向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的向量投影，并记作 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$. 由此得出

$$\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})=P_b(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_b=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{b}|](\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|)=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}. \tag{1.6}$$

显然，$P_b(\boldsymbol{0})=0$, $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$. 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则由等式(1.5)，$P_b(\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 和 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$

$=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{u}_b$，其中 $\theta=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，由此得知 $P_b(\boldsymbol{a})$ 和 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的长度无关，而仅依赖于 $\boldsymbol{b}$ 的方向，如图 1-7 所示．事实上，向量 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$ 也与 $\boldsymbol{b}$ 的指向无关，即有 $\boldsymbol{P}_{-b}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$，因为

$$\boldsymbol{P}_{-b}(\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{b})}{|-\boldsymbol{b}|^2}(-\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a}).$$

若 $\boldsymbol{b}$ 的指向改变，则数 $P_b(\boldsymbol{a})$ 的符号也随着改变．

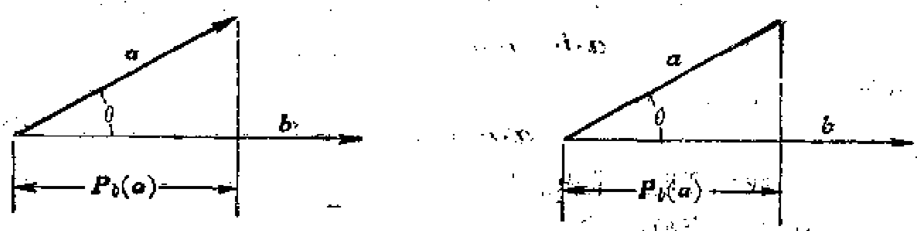


图 1-7

7. 正 交 向 量

若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则称两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是正交的或垂直的，并记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．由等式(1.5)得，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是正交的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\theta=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$．

例 1.16 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性无关且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$，则 $\boldsymbol{c}$ 是和 $\boldsymbol{b}$ 正交的非零向量．否则，设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则由等式(1.6)，$\boldsymbol{0}=1\boldsymbol{a}-\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})=1\,\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$，其中 $k=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{b}|^2$，这是不可能的，因为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$．最后，因

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\boldsymbol{a}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\right)\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|^2}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0,$$

故 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$．

8. 标 准 正 交 基

设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是三个互相正交的单位向量，如图 1-8 所示，它们是线性无关的．因为若 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$，则 $0=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{e}_i(k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_i\cdot k_i\boldsymbol{e}_i=k_i$，即对每一个 i，$k_i=0$，所以它们构成一个基，并称为标准正交基．

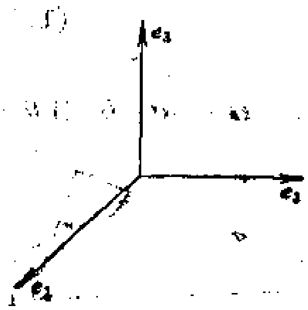


图 1-8

易见，$\boldsymbol{e}_i\ (i=1, 2, 3)$ 是标准正交基的充分必要条件是

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1\quad(\text{单位向量}),$$
$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=0\quad(\text{彼此垂直}),$$

或简记为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j\end{cases}\quad(i, j=1, 2, 3), \tag{1.7}$$

δ_{ij} 称为克罗内克符号，它是一个常用的符号．

在问题 1.23 中，我们证明

定理 1.4 设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是标准正交基，又设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$，则

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$;

(ii) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}$;

(iii) $a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i(i=1,\ 2,\ 3)$.

例 1.17. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, 则

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1)(2)+(0)(1)+(2)(-2)=-2$,

(b) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=[(1)(0)+(0)(-2)+(2)(1)](2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3)=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$,

(c) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

(d) $\boldsymbol{u}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(1/\sqrt{5})\boldsymbol{e}_1+(2/\sqrt{5})\boldsymbol{e}_3$,

(e) $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-2}{3\sqrt{5}}$.

设非零向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$, 且设 $\theta_i=\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$, 如图 1-9 所示. 数 $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦, 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=|\boldsymbol{a}|\cos\theta_i=a_i$, 故

$$\cos\theta_i=a_i/|\boldsymbol{a}|,\ i=1,\ 2,\ 3.$$

注意,

$$\boldsymbol{u}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{e}_1+\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{e}_2+\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{e}_3$$
$$=(\cos\theta_1)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta_2)\boldsymbol{e}_2+(\cos\theta_3)\boldsymbol{e}_3,$$

即 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的单位向量的分量.

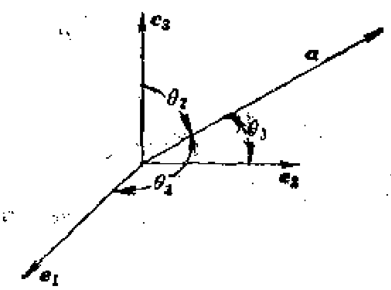
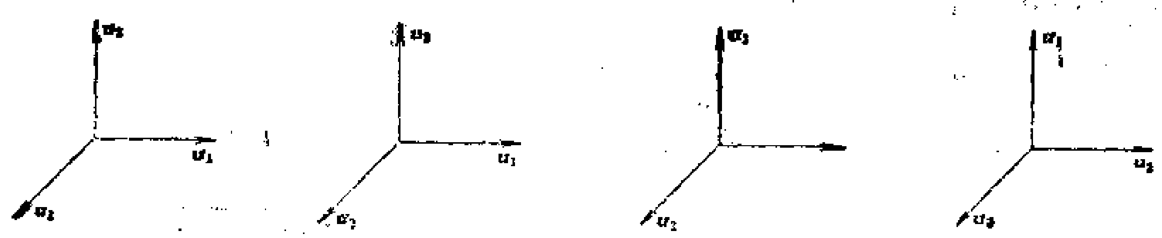


图 1-9

9. 定 向 基

设 $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$ 和 $(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3)$ 都是有序的标准正交基, 设想将三向量组 $(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3)$ 作旋转, 使 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 分别地与 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 重合. 这时 $\boldsymbol{g}_3$ 或者和 $\boldsymbol{e}_3$ 同向, 或者和 $\boldsymbol{e}_3$ 反向, 对前者我们称 $(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3)$ 和 $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$ 有相同的定向, 对后者则称这两个基有相反的定向. 下面用精确的方式, 对任意的基(而不仅限于标准正交基)阐述定向概念.

设 $(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$ 和 $(\boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2,\ \boldsymbol{V}_3)$ 是有序的基, 且 $\boldsymbol{V}_j=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}\boldsymbol{u}_i$. 若系数行列式 $|a_{ij}|>0$, 则 $(\boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2,\ \boldsymbol{V}_3)$ 和 $(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$ 有相同的定向. 在问题 1.27 中, 我们证明定向是 E^3 中所有有序基的集合上的一个等价关系. 这个关系把基划分为两个等价类. 同一类中的有序基有相同的定向, 而不同类中的基有相反的定向.



(a) (b) (c) (d)

为了直观地识别有序基的一个定向，若基中的向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 在空间中依次和右手的姆指，食指与中指取相同的方向，则称 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 为*右手系基*，否则就称为*左手系基*。

例 1.18 图 1-10(a)和(c)中的三向量组 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 是右手系基，在图 1-10(b)和(d)中，它们是左手系基.

注意：除非另有说明，往后所说的基将是指右手系标准正交基.

10. 向量的向量积

设 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 是右手标准正交基，且设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$. $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的*叉积*或*向量积*是向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，定义为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3,$$

它可视为下面的行列式的展开式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1\\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2\\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_2\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3.$$

例 1.19 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, $\mathbf{c}=-2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & 1 & 0\\ \boldsymbol{e}_2 & -1 & 1\\ \boldsymbol{e}_3 & 0 & 2\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3.$$

在问题 1.82 中，我们证明向量积实际上并不依赖于右手系标准正交基的选择. 在问题 1.81 中，我们还证明

定理 1.5 (i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 $\theta=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$；

(ii) a. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 且 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$；

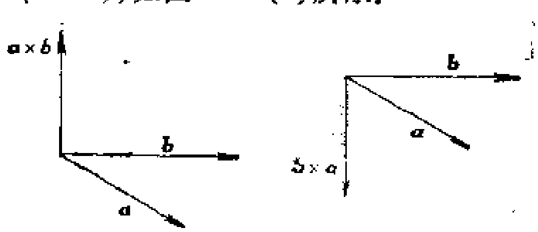
b. 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，则 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 是右手系的线性无关的三向量组.

因为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$ 当且仅当 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$ 或 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$. 从上面(i)和许瓦尔兹不等式的严格形式(即 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关)有

定理 1.6 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关.

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不是线性相关，即若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，则定理 1.5 (ii) 表明 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，并且 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 是右手系的三向量组，如图 1-11(a)所示.

注意，向量积一般不是可交换的. 虽然 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 有相同的长度(定理 1.5(i))且平行于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$(定理 1.5(ii)a.)，但 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向是相反的(定理 1.5(ii)b.)，所以 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，如图 1-11($b$)所示.



(a) (b)

图 1-11



图 1-12

例 1.20 对于标准正交基$(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$，如图 1-12 所示，由定理 1.5 可得

$$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_1=-\boldsymbol{g}_3,\ \boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}_2,$$
$$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{g}_3,\ \boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_2=-\boldsymbol{g}_1,$$
$$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_3=-\boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{0}.$$

在问题 1.29 中，我们证明向量积满足

[E_1] $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$ （反交换律）；

[E_2] $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ （分配律）；

[E_3] $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ （k＝数量）；

[E_4] $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

注意：向量积不仅不可交换，而且也不能结合，即一般来说 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$. 由例 1.20，$\boldsymbol{g}_1\times(\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2)=\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_3=-\boldsymbol{g}_2$，而$(\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_1)\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{0}$.

例 1.21 如图 1-13，在三角形 ABC 中，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\alpha=\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $\beta=\angle(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$, $\gamma=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. 现在，

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},$$

即
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

类似地，
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},$$

因此
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},$$

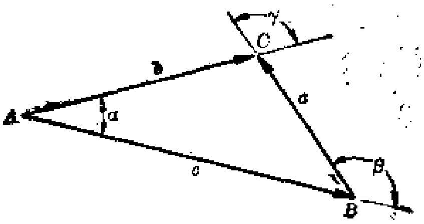


图 1-13

则
$$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|,$$

即
$$|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\sin\beta=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\gamma.$$

这就给出了正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sin\beta}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sin\gamma}{|\boldsymbol{c}|}.$$

11. 混合积和向量恒等式

积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 称为混合积或三重数量积，注意并不需要加括号，因为该式只能意味着 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的数量积，这个积也可以利用行列式表示出来. 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & b_1 & c_1\\ \boldsymbol{e}_2 & b_2 & c_2\\ \boldsymbol{e}_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$
$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(c_3b_1-c_1b_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

由行列式的性质得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) \tag{1.9}$$

特别地，可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. 这样一来，我们可以丢掉混合积记号中的点和叉，使用如下记号代替它：

$$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

由定理1.3和等式(1.8)直接得到

定理1.7 $[\boldsymbol{abc}]=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性相关.

有关向量的数量积和向量积的恒等式用途较广. 在问题1.35中导出一个基本恒等式，即

定理1.8 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$

由上式易导出另一些恒等式:

$[F_1]$ $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$;

$[F_2]$ $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=[\boldsymbol{abd}]\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{abc}]\boldsymbol{d}.$

例1.22 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}],$$

这里我们用了(1.9)和定理1.8. 由此得出

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

这就证明了上面的$[F_1]$.

§1.2 问题及其解答

1. 向 量 加 法

1.1 证明向量加法的性质$[A_1]$至$[A_4]$, 即证明$[A_1]\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$, $[A_2](\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $[A_3]\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$, $[A_4]\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

证: $[A_1]$: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)=(b_1+a_1,\ b_2+a_2,\ b_3+a_3)=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

$[A_2]$: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=[(a_1+b_1)+c_1,\ (a_2+b_2)+c_2,\ (a_3+b_3)+c_3]=[a_1+(b_1+c_1),\ a_2+(b_2+c_2),\ a_3+(b_3+c_3)]=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,

$[A_3]$: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=(a_1+0,\ a_2+0,\ a_3+0)=(a_1,\ a_2,\ a_3)=\boldsymbol{a}$;

$[A_4]$: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(a_1-a_1,\ a_2-a_2,\ a_3-a_3)=(0,\ 0,\ 0)=\boldsymbol{0}$.

1.2 如图1-14所示的平行六面体中, 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OP}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OR}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{OS}$, 试用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表示$\boldsymbol{OV}$, $\boldsymbol{VQ}$和$\boldsymbol{RT}$.

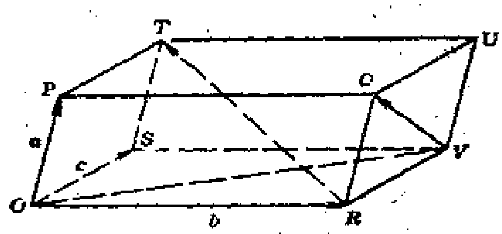


图 1-14

解: $\boldsymbol{OV}=\boldsymbol{OR}+\boldsymbol{RV}=\boldsymbol{OR}+\boldsymbol{OS}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$

$\boldsymbol{VQ}=\boldsymbol{VR}+\boldsymbol{RQ}=-\boldsymbol{RV}+\boldsymbol{RQ}$

$=-\boldsymbol{OS}+\boldsymbol{OP}=-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}.$

$\boldsymbol{RT}=\boldsymbol{RS}+\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{RO}+\boldsymbol{OS}+\boldsymbol{ST}$

$=-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}.$

1.3 例1.4运用性质$[A_1]$至$[A_4]$已证明向量方程 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 运用此结果, 证明:

(a) 零向量 $\boldsymbol{0}$ 是唯一的, 即若 $\boldsymbol{0}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, 则 $\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{0}$;

(b) 向量$-\boldsymbol{a}$是唯一的, 即若 $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}'=-\boldsymbol{a}$;

(c) 对任意 $\boldsymbol{a}$, 有$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

证: (a) 由方程 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 的解的唯一性即得.

(b) 由方程 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的解的唯一性即得.

(c) 考虑方程 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，它有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}-(-\boldsymbol{a})=-(-\boldsymbol{a})$，而 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，于是，根据方程的解的唯一性即得 $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

2. 数乘向量

1.4 证明数乘向量的性质$[B_1]$至$[B_3]$，即证明：$[B_1]\,k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a}$，$[B_2]\,(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$，$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$[B_3]\,1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

证：$[B_1]$：$k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1(k_2a_1),\ k_1(k_2a_2),\ k_1(k_2a_3))=((k_1k_2)a_1,\ (k_1k_2)a_2,\ (k_1k_2)a_3)=(k_1k_2)\boldsymbol{a}$；

$[B_2]$：$(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=((k_1+k_2)a_1+(k_1+k_2)a_2,\ (k_1+k_2)a_3)=(k_1a_1+k_2a_1,\ k_1a_2+k_2a_2,\ k_1a_3+k_2a_3)=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$；

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(k(a_1+b_1),\ k(a_2+b_2),\ k(a_3+b_3))=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b};$$

$[B_3]$：$1\boldsymbol{a}=(1a_1,1a_2,1a_3)=(a_1,\ a_2,\ a_3)=\boldsymbol{a}$.

1.5 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2+3\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2$，试用 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ 表示 $2\boldsymbol{a}-3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

解：$2\boldsymbol{a}-3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2+3\boldsymbol{u}_3)-3(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3)+3(\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2)=2\boldsymbol{u}_1-4\boldsymbol{u}_2+6\boldsymbol{u}_3-3\boldsymbol{u}_2+3\boldsymbol{u}_3+3\boldsymbol{u}_1+6\boldsymbol{u}_2=5\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+9\boldsymbol{u}_3$.

1.6 证明三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边的一半.

证：如图 1-15 所示，设 M 和 M' 分别是三角形 ABC 的边 AB 和 AC 的中点，这时 $\boldsymbol{AM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{AM'}=\frac{1}{2}\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{MM'}=\boldsymbol{AM'}-\boldsymbol{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{AB})=\frac{1}{2}\boldsymbol{BC}$，于是 $\boldsymbol{MM'}$ 平行于 $\boldsymbol{BC}$，且它的长度是 $\boldsymbol{BC}$ 长度的一半.

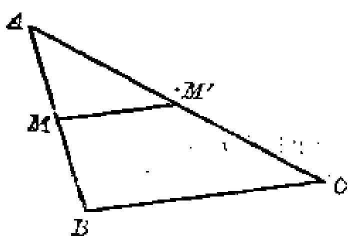


图 1-15

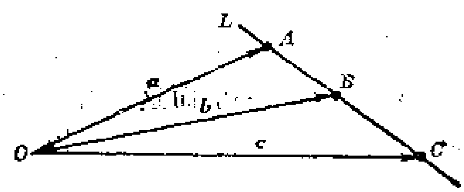


图 1-16

1.7 如图 1-16 所示，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OB}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{OC}$. 证明：$C$ 在 A 和 B 所确定的直线 L 上的充分必要条件是 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$，其中 $k_1+k_2=1$.

证：若 C 在 L 上，则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ 是平行的，因此存在 k，使

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\quad 或\quad \boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+(1-k)\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b},$$

其中 $k_1+k_2=k+1-k=1$. 反之，若 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$，其中 $k_1+k_2=1$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}-(1-k_2)\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}-k_1\boldsymbol{b}=k_1(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，即 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{BC}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{BA}$ 是平行的. 因此 C 在 A 和 B 所确定的直线上.

3. 线性相关和线性无关

1.8 证明：向量 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{u}_n$ 是线性相关的充分必要条件是这些向量中的一个是其余向量的线性组合.

证：假定 $\boldsymbol{u}_1$ 是 $\boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 的线性组合，即 $\boldsymbol{u}_1=k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n$，则 $\boldsymbol{u}_1-k_2\boldsymbol{u}_2-\cdots-k_n\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$，其中至少 $\boldsymbol{u}_1$ 的系数 1 不是零. 因此 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性相关.

反之，若 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性相关，则存在不全为零的 $k_1, \cdots, k_n$，使 $k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$. 假定 $k_1\neq 0$，则 $\boldsymbol{u}_1=-(k_2/k_1)\boldsymbol{u}_2-\cdots-(k_n/k_1)\boldsymbol{u}_n$，因此 $\boldsymbol{u}_1$ 是 $\boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 的线性组合

1.9 证明若一向量集合有一个线性相关的子集，则它也是线性相关的.

证：假定集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ 的子集 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k\}$ 是相关的，则存在不全为零的 $k_1, \cdots, k_k$，使 $k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_k\boldsymbol{u}_k=\mathbf{0}$，然而这时 $k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_k\boldsymbol{u}_k+0\boldsymbol{u}_{k+1}+\cdots+0\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$，因此 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 也是相关的.

1.10 证明定理 1.1：如果 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性无关，且 $k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n=k_1'\boldsymbol{u}_1+k_2'\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n'\boldsymbol{u}_n$，则 $k_1=k_1', k_2=k_2', \cdots, k_n=k_n'$.

证：假定某个 $k_j\neq k_j'$，则

$(k_1-k_1')\boldsymbol{u}_1+(k_2-k_2')\boldsymbol{u}_2+\cdots+(k_j-k_j')\boldsymbol{u}_j+\cdots+(k_n-k_n')\boldsymbol{u}_n=\mathbf{0}$，其中 $k_j-k_j'\neq 0$，而这意味 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性相关，和定理的条件矛盾

4. 基 和 分 量

1.11 证明 E^3 中每一个向量可以写成三个无关的向量的线性组合，因此三个线性无关向量构成 E^3 中的一个基.

证：如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是线性无关的，则方程

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$$

有唯一解 $x=y=z=0$. 这等价于方程组

$$xa_1+yb_1+zc_1=0,$$
$$xa_2+yb_2+zc_2=0,$$
$$xa_3+yb_3+zc_3=0.$$

仅有平凡解 $x=y=z=0$，而这仅当系数矩阵有非零行列式时成立，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

此时对 E^3 中每一个向量 $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$，方程组

$$xa_1+yb_1+zc_1=u_1,$$
$$xa_2+yb_2+zc_2=u_2,$$
$$xa_3+yb_3+zc_3=u_3.$$

有解 $x=k_1, y=k_2, z=k_3$，这意味着 $\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}$ 符合要求.

1.12 证明 E^3 中任意四个或多于四个的向量线性相关.

证：考虑向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \cdots, \boldsymbol{u}_n$. 可假定 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 线性无关，否则因为 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 有线性相关的子集，因而它们是线性相关的. 若 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 线性无关，它们构成一个基，且有 $\boldsymbol{u}_4=k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+k_3\boldsymbol{u}_3$，这意味着 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ 线性相关. 因此 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性相关.

1.13 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 是基，且设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3$ 和 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{u}_2$，求 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-$

$2\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 上的分量.

解：$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3)-(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3)-2(-\boldsymbol{u}_2)=2\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2+4\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+2\boldsymbol{u}_2=2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+5\boldsymbol{u}_3.$

于是 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ 关于 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 的分量是 2, −1, 5.

5. 数 量 积

1.14 证明向量的数量积的性质$[O_1]$至$[O_4]$（见第 5 页）.

证：$[O_1]$：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$

$[O_2]$：$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=ka_1b_1+ka_2b_2+ka_3b_3=k(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$

$[O_3]$：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$

$[O_4]$：显然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2\geqslant0$,并且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$, 当且仅当 $a_1=a_2=a_3=0.$

1.15 如图 1-17, 在三角形 OAB 中, 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OB}$, 若$|\boldsymbol{OA}|=2$, $|\boldsymbol{OB}|=3$ 和 $\angle AOB=30°$, 求 (a)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, (b)$P_a(\boldsymbol{b})$, (c)$\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{b})$.

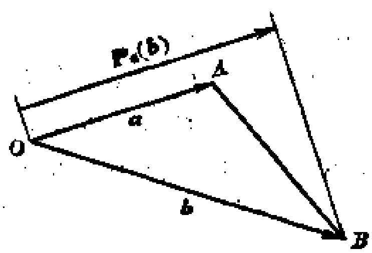


图 1-17

解：(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(2)(3)\cos30°=3\sqrt{3}.$

(b) $P_a(\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a}|=3\sqrt{3}/2.$

(c) $\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{b})=P_a(\boldsymbol{b})\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(3\sqrt{3}/4)\boldsymbol{a}.$

1.16 证明柯西-许瓦尔兹不等式：$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，其中等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关.

证：若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 不等式显然正确. 因此可以假设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 这时由$[O_4]$,

$$0\leqslant\left(\sqrt{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}\,\boldsymbol{a}\pm\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}}\,\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}\,\boldsymbol{a}\pm\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}}\,\boldsymbol{b}\right)\leqslant2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

即
$$\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$
故
$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$
等式$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$成立当且仅当

$$\sqrt{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}\,\boldsymbol{a}+\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}}\,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

或
$$\sqrt{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}\,\boldsymbol{a}-\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}}\,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

而这又当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关时成立.

1.17 证明三角不等式：$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

证：$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2\pm2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\leqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2$, 由上式取平方根便得所要结果.

1.18 证明对任意 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|$.

证：由三角不等式,

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\mp\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|,\quad 即\quad |\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|.$$

同样 $$|\boldsymbol{b}|=|\pm\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|,$$
即 $$|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|;$$
于是 $$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=\mathrm{Max}(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|)\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|,$$
问题得证。

6. 正交向量

1.19 设 $\mathbf{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 证明对任意实数 k_1 和 k_2, $\mathbf{c}$ 垂直于 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$.

证：因为 $\mathbf{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 和 $\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 因此 $\mathbf{c}\cdot(k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b})=k_1(\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{a})+k_2(\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{b})=0$, 于是 $\mathbf{c}$ 垂直于 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$.

1.20 设 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 是基，且定义
$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{u}_2),\ \mathbf{c}=\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{u}_3)-\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{u}_3),$$
证明 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$ 是互相垂直的非零向量.

证：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{u}_2))=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{u}_2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|^2]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})/|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2=0$, 所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 其次,
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c}&=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{u}_3)-\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{u}_3)]=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{u}_3-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|^2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|^2]\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_3)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{b}|^2,\end{aligned}$$
因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 故 $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3=0$, 所以 $\boldsymbol{a}\perp\mathbf{c}$. 最后,
$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{c}&=\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{u}_3-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|^2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|^2]\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_3)-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_3)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a}|^2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_3)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{b}|^2\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_3)-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_3)=0,\end{aligned}$$
于是 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$ 是互相垂直的. 它们也是非零向量，因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1\neq\mathbf{0}$; 若 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,
$$\mathbf{0}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{u}_2)=\boldsymbol{u}_2-k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_2-k\boldsymbol{u}_1,$$
这不可能，因为 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 线性无关；若 $\mathbf{c}=\mathbf{0}$,
$$\begin{aligned}\mathbf{0}=\mathbf{c}&=\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{u}_3)-\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{u}_3)=\boldsymbol{u}_3-k_1\boldsymbol{a}-k_2\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{u}_3-k_1\boldsymbol{u}_1-k_2(\boldsymbol{u}_2-k\boldsymbol{u}_1)=\boldsymbol{u}_3-k_3\boldsymbol{u}_1-k_2\boldsymbol{u}_2,\end{aligned}$$
因为 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 线性无关，这也是不可能的.

7. 标准正交基

1.21 证明 (a) $2\delta_{21}+3\delta_{22}+4\delta_{23}=3$, (b) $\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{b}_i$.

证：(a) $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ j=i,\\0, & 若\ j\neq i,\end{cases}$ 因此 $2\delta_{21}+3\delta_{22}+4\delta_{23}=2(0)+3(1)+4(0)=3$.

(b) 如上所述，只有 δ_{ii} 起作用，故 $\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\boldsymbol{b}_j=\delta_{ii}\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}_i$.

1.22 设 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 是基，且设
$$\boldsymbol{V}_j=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}\boldsymbol{u}_i \quad 和 \quad \boldsymbol{u}_j=\sum_{i=1}^{3}b_{ij}\boldsymbol{V}_i,$$
证明 $\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}=\delta_{ij}$.

证：只要把下标 i 改为 k, 则 $\boldsymbol{u}_j=\sum_{i=1}^{3}\delta_{ij}\boldsymbol{u}_i=\sum_{k=1}^{3}b_{kj}\boldsymbol{V}_k$, 同理，$\boldsymbol{V}_k=\sum_{i=1}^{3}a_{ik}\boldsymbol{u}_i$, 代入上式,

$$\sum_{i=1}^{3}\delta_{ij}\boldsymbol{u}_i=\sum_{k=1}^{3}b_{kj}\sum_{i=1}^{3}a_{ik}\boldsymbol{u}_i=\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}\right]\boldsymbol{u}_i,$$

因为 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 线性无关，故各分量对应相等，得到

$$\delta_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}.$$

1.23 证明定理1.4. 若 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是标准正交基，且 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$, 则 (a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, (b) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, (c) $a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i$, $i=1, 2, 3$.

证：(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)=a_1b_1(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1)+a_1b_2(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)+a_1b_3(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3)+a_2b_1(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)+a_2b_2(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2)+a_2b_3(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3)+a_3b_1(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)+a_3b_2(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)+a_3b_3(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$,

简写为：
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3}b_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j),$$

即
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i.$$

(b) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

(c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=(\sum_j a_j\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_i=\sum_j a_j(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i)=\sum_j a_j\delta_{ji}=a_i$.

1.24 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$. 求 (a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, (b) $|\boldsymbol{a}|$, (c) $\boldsymbol{u}_a$, (d) $P_a(\boldsymbol{b})$, (e) $\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{b})$, (f) $\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (g) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3$, (h) $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解：(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1)(0)+(-2)(1)+(3)(-1)=-5$;

(b) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{14}$;

(c) $\boldsymbol{u}_a=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|=(1/\sqrt{14})(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3)$;

(d) $P_a(\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a}|=-5/\sqrt{14}$;

(e) $\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{b})=P_a(\boldsymbol{b})\boldsymbol{u}_a=-5/14(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3)$;

(f) $\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=(-5/\sqrt{14}\cdot\sqrt{2})=-5/(2\sqrt{7})$;

(g) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2=-2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3=3$;

(h) $\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)=a_1/|\boldsymbol{a}|=1/\sqrt{14}$, $\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2)=a_2/|\boldsymbol{a}|$
$=-2/\sqrt{14}$, $\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3)=a_3/|\boldsymbol{a}|=3/\sqrt{14}$.

1.25 设 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 是任一基，证明存在唯一的基 $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ 使

$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{u}_1=1,\quad \boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{u}_1=0,\quad \boldsymbol{V}_3\cdot\boldsymbol{u}_1=0,$$
$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=0,\quad \boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{u}_2=1,\quad \boldsymbol{V}_3\cdot\boldsymbol{u}_2=0,$$
$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{u}_3=0,\quad \boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{u}_3=0,\quad \boldsymbol{V}_3\cdot\boldsymbol{u}_3=1,$$

即 $\boldsymbol{V}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=\delta_{ij}$, $i, j=1, 2, 3$. 基 $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ 称为基 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 的对偶基或逆基. 相应地，若 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+a_3\boldsymbol{u}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{V}_1+b_2\boldsymbol{V}_2+b_3\boldsymbol{V}_3$, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\sum_i a_i\boldsymbol{u}_i)\cdot(\sum_j b_j\boldsymbol{V}_j)=\sum_i\sum_j a_ib_j(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{V}_j)=\sum_i\sum_j a_ib_j\delta_{ij}=\sum_i a_ib_i.$$

注意，标准正交基是它本身的对偶基.

证：设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是标准正交基，又设

$$\boldsymbol{u}_1=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2+a_{13}\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{u}_2=a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+a_{23}\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{u}_3=a_{31}\boldsymbol{e}_1+a_{32}\boldsymbol{e}_2+a_{33}\boldsymbol{e}_3,$$

且 $$\boldsymbol{V}_1=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3,$$

则
$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{u}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=1,$$
$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,$$
$$\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{u}_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.$$

是关于 x_1, x_2, x_3 的三个方程的方程组，因为行列式 $|a_{ij}|\neq0$, 故它存在唯一解 $\boldsymbol{V}_1=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$. 类似地，对 $\boldsymbol{V}_2$ 和 $\boldsymbol{V}_3$ 也有唯一解. 剩下来的问题是证明 $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ 线性无关，因而构成一个基. 下式

$$k_1\boldsymbol{V}_1+k_2\boldsymbol{V}_2+k_3\boldsymbol{V}_3=\sum_{i=1}^{3}k_i\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{0}$$

乘以 $\boldsymbol{u}_j$, $j=1, 2, 3$, 得到

$$\left[\sum_{i=1}^{3}k_i\boldsymbol{V}_i\right]\boldsymbol{u}_j=\sum_{i=1}^{3}k_i(\boldsymbol{V}_i\cdot\boldsymbol{u}_j)=\sum_{i=1}^{3}k_i\delta_{ij}=k_j=0,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

于是
$$k_1=k_2=k_3=0,$$

因此 $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ 线性无关，并且构成一个基.

8. 定 向

1.26 证明：三向量组 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$，其中 $\boldsymbol{V}_1=2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$ 和 $\boldsymbol{V}_3=-\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$ 和有序基 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 有相同的定向.

证：因分量行列式

$$\begin{vmatrix}2&0&-1\\-1&1&2\\2&1&1\end{vmatrix}=1>0,$$

所以 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 和 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 有相同的定向.

1.27 证明：定向是 E^3 中所有有序基的集合上的一个等价关系，即证明

(a) 对所有 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$, $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 和 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 有相同的定向；

(b) 若 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 和 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 有相同的定向，则 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 和 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 有相同的定向；

(c) 若 $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3)$ 和 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 有相同的定向，且 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 和 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 有相同的定向，则 $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3)$ 和 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 有相同的定向.

证：(a) 我们记 $\boldsymbol{V}_j=\sum_{i=1}^{3}\delta_{ij}\boldsymbol{V}_i$, $j=1, 2, 3$. 因为行列式 $|\delta_{ij}|=1$, 故 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 和 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 有相同的定向.

(b) 设 $\boldsymbol{V}_j=\sum_i a_{ij}\boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{u}_j=\sum_i b_{ij}\boldsymbol{V}_i$. 由问题 1.22, $\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}=\delta_{ij}$. 用展开的方法易验证行列式 $\left|\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}\right|=|a_{ij}|\,|b_{ij}|$, 因此

$$|b_{ij}|=\frac{|\delta_{ij}|}{|a_{ij}|}=\frac{1}{|a_{ij}|}.$$

因为 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 和 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 有相同的定向，故 $|a_{ij}|>0$. 于是 $|b_{ij}|>0$, 因此 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 和 $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$ 有相同的定向.

(c) 设 $V_k=\sum_{i=1}^{3}a_{ik}u_i$ 和 $W_j=\sum_{k=1}^{3}b_{kj}V_k$. 以前者代入后者得到

$$W_j=\sum_{k=1}^{3}b_{kj}\sum_{i=1}^{3}a_{ik}u_i=\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}\Big)u_i,$$

于是

$$W_j=\sum_{i=1}^{3}c_{ij}u_i,$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj},\ i,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

同样

$$|c_{ij}|=|\sum a_{ik}b_{kj}|=|a_{ij}|\,|b_{ij}|,$$

因为(W_1, W_2, W_3)和(V_1, V_2, V_3)有相同的定向，而(V_1, V_2, V_3)和(u_1, u_2, u_3)有相同的定向，故$|b_{ij}|>0$和$|a_{ij}|>0$，因此$|c_{ij}|>0$，于是(W_1, W_2, W_3)和(u_1, u_2, u_3)有相同的定向.

9. 向 量 积

1.28 设 $a=2e_1-e_2+e_3$, $b=e_1+2e_2-e_3$, $c=e_2+2e_3$. 试确定(a)$a\times b$, (b)$b\times a$, (c)$a\times(b\times c)$, (d)$(a\times b)\times c$, (e)$(a\times b)\cdot c$, (f)$a\times(b+c)-a\times b-a\times c$.

解:

(a) $a\times b=\begin{vmatrix}e_1 & 2 & 1\\ e_2 & -1 & 2\\ e_3 & 1 & -1\end{vmatrix}=e_1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}-e_2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+e_3\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-e_1+3e_2$ $+5e_3$.

(b) $b\times a=\begin{vmatrix}e_1 & 1 & 2\\ e_2 & 2 & -1\\ e_3 & -1 & 1\end{vmatrix}=e_1-3e_2-5e_3$. 易见，$a\times b=-b\times a$.

(c) $a\times(b\times c)=(2e_1-e_2+e_3)\times\begin{vmatrix}e_1 & 1 & 0\\ e_2 & 2 & 1\\ e_3 & -1 & 2\end{vmatrix}=(2e_1-e_2+e_3)\times(5e_1-2e_2+e_3)=$ $\begin{vmatrix}e_1 & 2 & 5\\ e_2 & -1 & -2\\ e_3 & 1 & 1\end{vmatrix}=e_1+3e_2+e_3$.

(d) $(a\times b)\times c=(-e_1+3e_2+5e_3)\times(e_2+2e_3)=\begin{vmatrix}e_1 & -1 & 0\\ e_2 & 3 & 1\\ e_3 & 5 & 2\end{vmatrix}=e_1+2e_2-e_3$. 由此看出 $a\times(b\times c)\neq(a\times b)\times c$.

(e) $(a\times b)\cdot c=(-e_1+3e_2+5e_3)\cdot(e_2+2e_3)=(-1)(0)+(3)(1)+(5)(2)=13$.

(f) $a\times(b+c)=\begin{vmatrix}e_1 & 2 & 1\\ e_2 & -1 & 3\\ e_3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-4e_1-e_2+7e_3$, $a\times b=-e_1+3e_2+5e_3$, 且 $a\times c$ $=-3e_1-4e_2+2e_3$, 则

$$\begin{aligned}&a\times(b+c)-a\times b-a\times c\\ &=(-4e_1-e_2+7e_3)-(-e_1+3e_2+5e_3)-(-3e_1-4e_2+2e_3)=0.\end{aligned}$$

1.29 证明(a) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, (b) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

证：设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3$.

(a) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=[a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)]\boldsymbol{e}_1+[a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3)]\boldsymbol{e}_2+[a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)]\boldsymbol{e}_3=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3+(a_2c_3-a_3c_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3c_1-a_1c_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1c_2-a_2c_1)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

(b) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=(ka_2b_3-ka_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(ka_3b_1-ka_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(ka_1b_2-ka_2b_1)\boldsymbol{e}_3=k[(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3]=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

1.30 证明 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$.

证：设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=[(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3]\\&\quad\cdot[(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3]\\&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_2b_2a_3b_3-2a_1b_1a_3b_3-2a_1b_1a_2b_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3\\&\quad-2a_2b_2a_3b_3,\end{aligned}$$

比较上面的式子即得所需要的恒等式.

1.31 证明定理1.5.

(i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$, $\theta=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;

(ii) a. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 和 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$;

b. 若 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\neq\boldsymbol{0}$, 则 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 和 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 有相同的定向.

证：(i) 由前一个问题,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta)^2,\end{aligned}$$

因为对 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 有 $\sin\theta\geqslant0$, 故 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$.

(ii) a. 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}&=[(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3]\cdot(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\\&=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1=0,\end{aligned}$$

类似地, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$. 因此 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 且 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$.

b. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 的分量行列式是

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & (a_2b_3-a_3b_2)\\a_2 & b_2 & (a_3b_1-a_1b_3)\\a_3 & b_3 & (a_1b_2-a_2b_1)\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2,$$

若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2>0$ 且 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 和 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 有相同的定向.

1.32 证明向量积的定义与基底无关.

证：设 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{c}'$ 是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 对于两个不同的右手系标准正交基的向量积. 我们可以假定 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 否则由定理1.6, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{0}$. 由定理1.5(ii), $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 是基, 故 $\boldsymbol{c}'=\alpha\boldsymbol{a}+$

$\beta b+\gamma c$. 同样由定理1.5(ii), $a\cdot c'=\alpha|a|^2+\beta(a\cdot b)=0$ 且 $b\cdot c'=\alpha(b\cdot a)+\beta|b|^2=0$. 因为 a 和 b 线性无关, 故 $|a|^2|b|^2-|a\cdot b|^2\neq 0$, 因此 $\alpha=\beta=0$, 且 $c'=\gamma c$. 因为 (a, b, c') 和 (a, b, c) 两者都是右手系的, 故 $\gamma>0$. 由定理1.5(i), $|c'|=|c|=\gamma|c|$, 于是 $\gamma=1$, 便有 $c=c'$.

10. 混 合 积

1.33 设 $a=e_1+2e_2-e_3$, $b=-e_1+e_2$, $c=-e_2+2e_3$, 求 $a\cdot b\times c$.

解:

$$a\cdot b\times c=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=5.$$

1.34 证明 $a\cdot b\times c=a\times b\cdot c$.

证: 设 $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$, $b=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$, $c=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$, 则

$$a\cdot b\times c=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1 & c_1 & b_1\\ a_2 & c_2 & b_2\\ a_3 & c_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & a_1 & b_1\\ c_2 & a_2 & b_2\\ c_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix}$$
$$=c\cdot a\times b=a\times b\cdot c.$$

1.35 证明定理1.8: $a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$.

证: 设 $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$, $b=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$, $c=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$, 则

$$\begin{aligned}a\times(b\times c)&=(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\times[(b_2c_3-b_3c_2)e_1\\&\quad+(b_3c_1-c_3b_1)e_2+(b_1c_2-b_2c_1)e_3]\\&=(a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3)e_1+(a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2\\&\quad+a_1b_2c_1)e_2+(a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2)e_3,\end{aligned}$$

于是, 和上式作比较有

$$\begin{aligned}(a\cdot c)b-(a\cdot b)c&=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3)\\&\quad-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3)\\&=(a_2b_1c_2+a_3b_1c_3-a_2c_1b_2-a_3c_1b_1)e_1+(b_2a_1c_1+b_2a_3c_3\\&\quad-c_2a_1b_1-c_2a_3b_3)e_2+(b_3a_1c_1+b_3a_2c_2-c_3a_1b_1-c_3a_2b_2)e_3\\&=a\times(b\times c).\end{aligned}$$

§1.3 补 充 题

1.36 如图1-18所示的四面体 $OPQR$ 中, 设 $a=OP$, $b=OQ$, $c=OR$, 且设 M 是边 RQ 的中点, 试用 a, b, c 表示 PM. 答案: $PM=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-a$.

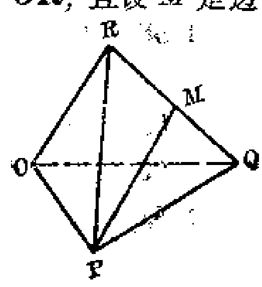


图 1-18

1.37 设 $a=2u_1+u_2-3u_3$, $b=u_1-2u_2+u_3$, $c=-u_1+2u_2-u_3$, 试用 u_1, u_2, u_3 表示 $3a-2b+c$. 答案: $3u_1+9u_2-12u_3$.

1.38 证明 $|a\pm b\pm c|\leqslant|a|+|b|+|c|$.

1.39 证明四边形两对对应边中点连线的中点重合.

1.40 证明三角形的角平分线交于一点.

1.41 证明三角形的中线交于一点.

1.42 证明线性无关的向量的集合的子集是线性无关的.

1.43 证明 E^2 中两个线性无关的向量构成 E^2 的一个基.

1.44 证明 E^2 中三个或多于三个的向量线性相关.

1.45 证明：若 a_i, b_i, c_i 是 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$ 对应于某一基的分量，则 (i) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $a_i=b_i$; (ii) $\mathbf{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $c_i=a_i+b_i$; (iii) $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ 当且仅当 $b_i=ka_i$.

1.46 设 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 是基，试确定 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3$, $\mathbf{c}=2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2+5\boldsymbol{u}_3$ 是否线性无关.　　答案：是.

1.47 设 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 是基，且设 $\boldsymbol{V}_1=-\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{V}_3=2\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_3$, 证明 $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ 是基，并求 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$ 在 $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ 上的分量.　　答案：$\boldsymbol{u}_1=-2\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_3$, $\boldsymbol{u}_2=3\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2+2\boldsymbol{V}_3$, $\boldsymbol{u}_3=4\boldsymbol{V}_1-2\boldsymbol{V}_2+3\boldsymbol{V}_3$, $\boldsymbol{a}=-8\boldsymbol{V}_1+4\boldsymbol{V}_2-5\boldsymbol{V}_3$.

1.48 设 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, 求 (a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, (b) $|\boldsymbol{a}|$, (c) $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, (d) $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$, (e) $\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{b})$.　　答案：(a) -4, (b) $\sqrt{6}$, (c) $-4/(3\sqrt{2})$, (d) $-4/\sqrt{3}$, (e) $-(4/3)(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$.

1.49 求向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$ 的方向余弦.　　答案：$2/\sqrt{14}$, $1/\sqrt{14}$, $-3/\sqrt{14}$.

1.50 求 x, 使 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-x\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ 是正交的.　　答案：$x=1$.

1.51 分解 $\alpha\gamma|\boldsymbol{a}|^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\beta\delta|\boldsymbol{b}|^2$ 的因子.　　答案：$(\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b})\cdot(\gamma\boldsymbol{a}-\delta\boldsymbol{b})$.

1.52 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$, 求向量 $\mathbf{c}$, 使 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$ 组成一个直角三角形的边.　　答案：$\mathbf{c}=\pm(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$.

1.53 证明 $\boldsymbol{g}_1=(1/3)(2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$, $\boldsymbol{g}_2=(1/3)(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)$ 和 $\boldsymbol{g}_3=(1/3)(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3)$ 构成一个标准正交基，并用 $(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3)$ 表出 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.　　答案：$\boldsymbol{e}_1=(1/3)\cdot(2\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2+2\boldsymbol{g}_3)$, $\boldsymbol{e}_2=(1/3)(-2\boldsymbol{g}_1+2\boldsymbol{g}_2+\boldsymbol{g}_3)$, $\boldsymbol{e}_3=(1/3)(\boldsymbol{g}_1+2\boldsymbol{g}_2-2\boldsymbol{g}_3)$.

1.54 证明平行四边形各边的平方和等于它的对角线的平方和.

1.55 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ 和 $\mathbf{c}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, 求 (a) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$, (c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\mathbf{c}=[\boldsymbol{abc}]$, (d) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})$.　　答案：(a) $5\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$, (b) $-5\boldsymbol{e}_1-7\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$, (c) 10, (d) $2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$.

1.56 求和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ 及 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ 正交的单位向量. 答案：$\pm(1/\sqrt{2})\times(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)$.

1.57 求点 P 到平面 S 的距离 d, 其中 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ 是从 S 上的 O 点到 P 点的向量，且 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$ 和 $\mathbf{c}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 在 S 上.　　答案：$d=|P_{b\times c}(\boldsymbol{a})|$.

1.58 证明：
$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3][\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_3]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{V}_2 & \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{V}_3\\ \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{V}_2 & \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{V}_3\\ \boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{V}_2 & \boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{V}_3\end{vmatrix}.$$

1.59 证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\mathbf{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=0$.

1.60 证明：$[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\mathbf{c}\times\boldsymbol{d})(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f})]=[\boldsymbol{abd}][\boldsymbol{cef}]-[\boldsymbol{abc}][\boldsymbol{def}]$.

1.61 证明：若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所在的平面垂直于包含 $\mathbf{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的平面，则
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{c}\times\boldsymbol{d})=0.$$

1.62 设 $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ 是任意一个基. 且设

$$\boldsymbol{V}_1=\frac{\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_3}{[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3]},\quad \boldsymbol{V}_2=\frac{\boldsymbol{u}_3\times\boldsymbol{u}_1}{[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3]},\quad \boldsymbol{V}_3=\frac{\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2}{[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3]},$$

证明$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$是和$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$对偶的，即$\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{V}_j=\delta_{ij}$, $i, j=1, 2, 3$.

1.63 设$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$和$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$是对偶的基，证明$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$和$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$有相同的定向.

1.64 证明存在定向基的两个等价类，即证明若$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$和$(\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \boldsymbol{W}_3)$不具有和$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$相同的定向，则$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3)$和$(\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \boldsymbol{W}_3)$有相同的定向. 于是我们能够说，两个有序基有相同或相反的定向.

第二章　一个实变数的向量函数

§2.1　基本内容

1. 直线和平面

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 是 E^3 中的向量，$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$. 又设 $\boldsymbol{x}$ 表示 E^3 中通过 $\boldsymbol{a}$ 且平行于 $\boldsymbol{u}$ 的直线上的点，则这直线的方程可以表示为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a},\quad -\infty<k<+\infty \tag{2.1}$$

或用分量形式表示为

$$\begin{aligned} x_1&=ku_1+a_1,\\ x_2&=ku_2+a_2,\quad -\infty<k<+\infty.\\ x_3&=ku_3+a_3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

方程(2.1)或(2.2)称为直线的参数方程. 当参数 k 取遍所有实数时，点 $\boldsymbol{x}$ 就跑遍了整条直线. 一个向量若与 $\boldsymbol{u}$ 线性相关，就说这向量平行于这条直线，两条直线平行的必要充分条件是它们对应的方向向量 $\boldsymbol{u}$ 线性相关.

例 2.1　通过 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ 平行于 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$ 的直线的参数方程是

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a}=k(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)=(k+1)\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-k\boldsymbol{e}_3$$

或

$$x_1=k+1,\ x_2=2,\ x_3=-k.$$

例 2.2　若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是直线上的不同点，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 是一个平行于直线的非零向量. 这样，通过 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 两个不同点的直线的参数方程是

$$\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}$$

或

$$x_1=k(b_1-a_1)+a_1,\ x_2=k(b_2-a_2)+a_2,\ x_3=k(b_3-a_3)+a_3.$$

设 $\boldsymbol{x}$ 表示通过 $\boldsymbol{a}$ 平行于两个无关向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的平面上的点，则这平面的方程可表示为

$$\boldsymbol{x}=h\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}+\boldsymbol{a},\quad -\infty<h<\infty,\ -\infty<k<\infty, \tag{2.3}$$

它的分量方程是

$$\begin{aligned} &x_1=hu_1+kv_1+a_1,\ x_2=hu_2+kv_2+a_2,\\ &x_3=hu_3+kv_3+a_3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

方程(2.3)、(2.4)称为平面的参数方程，当 h、k 各自独立地取遍所有实数时，点 $\boldsymbol{x}$ 跑遍整个平面. 一个向量若与平面上的向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 线性相关，就称这向量平行于这平面；一个向量若与平面上的向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 都垂直，则称这向量垂直于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 所决定的平面.

若 $\boldsymbol{n}$ 是垂直于平面 $\boldsymbol{x}=h\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}+\boldsymbol{a}$ 的非零向量，则点 $\boldsymbol{x}$ 落在这平面上的必要充分条件是 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$，即

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}=0. \tag{2.5}$$

若用 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{n}$ 的分量表示，则这平面的方程可以写成

$$(x_1-a_1)n_1+(x_2-a_2)n_2+(x_3-a_3)n_3=0. \tag{2.6}$$

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是平面上的不共线点，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 是平行这个平面的线性无关的向量，$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ 是垂直于这个平面的非零向量，如图 2-1 所示.

从方程(2.5)得到通过 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的平面方程为

$$[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]=0. \qquad (2.7)$$

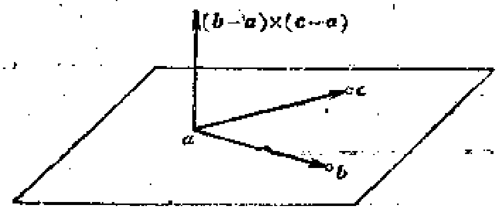


图 2-1

例 2.3 通过 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_2$ 平行于 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$ 的平面的参数方程为 $\boldsymbol{x}=h\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}+\boldsymbol{a}=(h-k)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+k\boldsymbol{e}_3$ 或 $x_1=h-k,\ x_2=1,\ x_3=k$.

这个平面也可写成

$$[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}]=\det\begin{pmatrix} x_1 & 1 & -1 \\ x_2 & -10 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0 \text{ 或 } x_2-1=0.$$

2. 邻 域

用球形邻域的概念来描述函数的局部性质是比较方便的。向量 $\boldsymbol{a}$ 的 ε-开球或 ε-球形邻域，记作 $S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$，它就是满足 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 的集合，如图 2-2 所示，点 $\boldsymbol{x}$ 在 $S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 中的必要充分条件是 $\boldsymbol{x}$ 在以 $\boldsymbol{a}$ 为心 ε 为半径的球的内部，在 E^2 中，$S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 是以 $\boldsymbol{a}$ 为心 ε 为半径的圆的内部；在 E^1 中，$S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 是以 $\boldsymbol{a}$ 为中心长为 2ε 的开区间的内部，如图 2-3 所示.

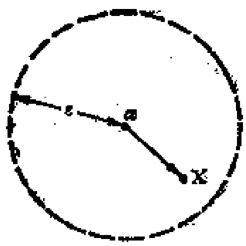


图 2-2

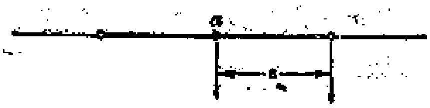


图 2-3

用除去 $\boldsymbol{a}$ 自己的 $\boldsymbol{a}$ 的球形邻域来讨论也是方便的，这个除去 $\boldsymbol{a}$ 的集合 $S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的 ε-去心球形邻域，用 $S'_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 表示. 因为 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|=0$ 的必要充分条件是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，所以 $S'_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 由满足 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 组成.

例 2.4 向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ 的 $\frac{1}{10}$ 球形邻域，即 $S_{\frac{1}{10}}(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3)$，它由满足

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|=[(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2]^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{10},$$

即

$$(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2<\frac{1}{100}$$

的向量 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$ 组成.

例 2.5 在 E^1 中，$S_{\frac{1}{100}}(5)$ 是满足 $|x-5|<\frac{1}{100}$ 或 $5-\frac{1}{100}<x<5+\frac{1}{100}$ 的数 x 组成的集合，注意 $S_{\frac{1}{100}}$ 是以 5 为中心长为 $\frac{1}{50}$ 的开区间的内部.

3. 向 量 函 数

若对每一个实数 $t\in S\subset R$(实数)，对应着一个向量 $\boldsymbol{f}(t)$，则它在 S 中定义了一个实变

数 t 的向量函数，如同数量函数一样，S 称为 $\boldsymbol{f}$ 的定义域，所对应的向量的全体称为 $\boldsymbol{f}$ 的像，用 $\boldsymbol{f}(S)$ 表示。

例 2.6 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是空间固定的向量，方程

$$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{a}-2t\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{c},\quad -2\leqslant t\leqslant 2$$

定义一个区间 $-2\leqslant t\leqslant 2$ 上的向量函数，所对应的一些向量列表如下：

t	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{f}(t)$	$\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$

例 2.7 在例 2.6. 中设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(t)&=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)-2t(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)+t^2(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)\\&=(1+t^2)\boldsymbol{e}_1+(2-2t)\boldsymbol{e}_2+(2t-t^2)\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{f}$ 是用三个数量函数 $f_1(t)=1+t^2$，$f_2(t)=2-2t$，$f_3(t)=2t-t^2$ 表示。这三个数量函数是 $\boldsymbol{f}$ 对于 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 的分量。

正如上面例子所指出的，$\boldsymbol{f}(t)$ 唯一确定三个数量函数 $f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_3(t)$；这三个数量函数是 $\boldsymbol{f}(t)$ 对于基 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 的分量。反之，三个在公共区域 S 上定义的数量函数 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$f_3(t)$ 唯一确定一个在 S 上的向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$，

$$\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3,$$

它对 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 的分量是 f_1，f_2，f_3。

向量函数可用来确定曲线。设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)$，则当 t 变化时，点 $\boldsymbol{x}$ 描出一条曲线，如图 2-4 所示。方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)$ 或三个数量方程 $x_1=f_1(t)$，$x_2=f_2(t)$，$x_3=f_3(t)$ 称为曲线的参数方程，t 称为参数。

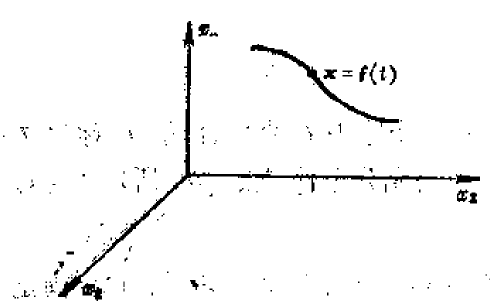


图 2-4

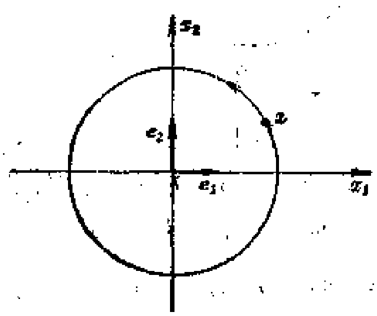


图 2-5

例 2.8 方程 $\boldsymbol{x}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2$，或 $x_1=a\cos t$，$x_2=a\sin t$，$a>0$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 是中心在原点半径为 a 的圆的参数方程。当 t 在区间 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上增加时，点 $\boldsymbol{x}$ 依逆时针方向描出一个圆。如图 2-5 所示。

在多数情况下，我们假设所讨论的函数是定义在区间上，这些区间可以是有限开或闭区间，即 $a<t<b$ 或 $a\leqslant t\leqslant b$，有限半开区间 $a\leqslant t<b$ 或 $a<t\leqslant b$ 和无限区间，如 $-\infty<t<\infty$，$a\leqslant t<\infty$，$-\infty<t<a$，等等。

4. 有界函数

若存在数 $M>0$，对区间 I 上所有 t，有 $|\boldsymbol{f}(t)|\leqslant M$，则称函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 I 上是有界的。

注意在图 2-6 中，若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)$，则 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 I 上有界的必要充分条件是存在一个中心在原点半径为 M 的球，使对所有 $t\in I$，点 $\boldsymbol{x}$ 在这个球中。

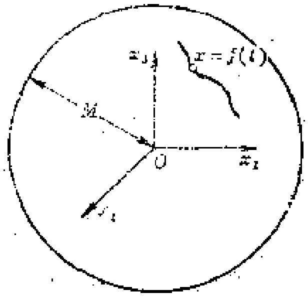


图 2-6

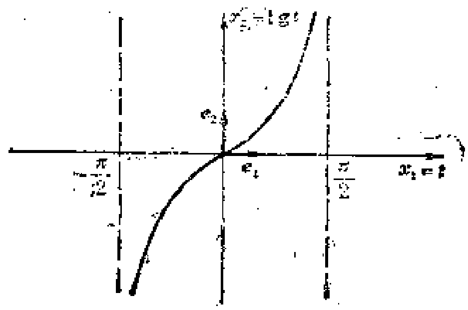


图 2-7

例 2.9 如图 2-7 所示，在 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 中描出曲线 $\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{e}_1+(\tan t)\boldsymbol{e}_2$。注意当 t 接近 $\frac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{x}|$ 趋于无限大。这样，在 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 上，$\boldsymbol{x}$ 是无界的。可是，对任意 $\varepsilon>0$，在区间 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon<t<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 上 $\boldsymbol{x}$ 是有界的，因为对这些 t，有 $|\boldsymbol{x}|=|t\boldsymbol{e}_1+(\tan t)\boldsymbol{e}_2|\leqslant|t||\boldsymbol{e}_1|+|\tan t||\boldsymbol{e}_2|=|t|+|\tan t|\leqslant M$，其中 $M=\frac{\pi}{2}-\varepsilon+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$

若存在一个 $\delta>0$，使得到 $t\in S_\delta(t_0)$，$\boldsymbol{f}(t)$ 是有界的，则称函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 $t=t_0$ 是有界的；它等价于：若存在一个 $M>0$ 和 $\delta>0$，使当 $|t-t_0|<\delta$ 时，有 $|\boldsymbol{f}(t)|\leqslant M$，则 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 是有界的。

明显地，若 $\boldsymbol{f}(t)$ 在区间 I 上有定义，且是有界的，则 $\boldsymbol{f}(t)$ 对 I 上每一 t_0 是有界的，但其逆不真，如上面的例子中，$\boldsymbol{f}(t)$ 在 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 中的每一个 t_0 都有界，但 $\boldsymbol{f}(t)$ 在这个区间上无界。

5. 极 限

若对每一个 $\varepsilon>0$，都可找到一个 $\delta>0$（依赖于 ε），使得当 $t\in S'_\delta(t_0)$ 时，就有 $\boldsymbol{f}(t)\in S_\varepsilon(\boldsymbol{L})$，则称向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 当 t 趋近 t_0 时有极限 $\boldsymbol{L}$，记作 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{L}$ 或当 $t\to t_0$ 时 $\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$。注意，在图 2-8 中，当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$ 的必要充分条件是对每一个中心在 $\boldsymbol{L}$ 的开球 $S_\varepsilon(\boldsymbol{L})$，能够找到一个去心开球 $S'_\delta(t_0)$，使当 $t\in S'_\delta(t_0)$ 时，就有 $\boldsymbol{x}\in S_\varepsilon(\boldsymbol{L})$，注意，在 t_0 的极限存在是函数的局部性质，它仅与函数在 t_0 的去心邻域中的性质有关，而且 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 不一定有定义。例如，函数的定义域可以是开区间 $a<t<t_0$。

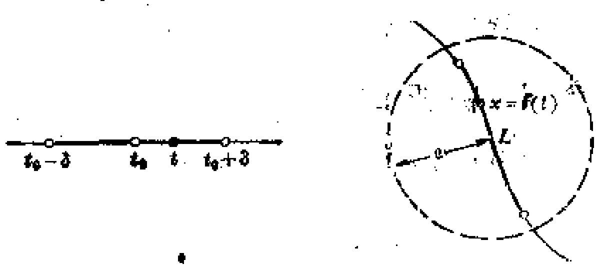


图 2-8

例 2.10 设 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{a}=$ 常向量，则对任意 t_0，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{a}$。因为对所有 t，$\boldsymbol{f}(t)\equiv\boldsymbol{a}$，在每个 $S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 中，因而对所有 t_0 的任意 $t\in S_\delta(t_0)$，$\boldsymbol{f}(t)$ 在每个 $S_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 中

例 2.11 函数

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)=\begin{cases} t\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, & t\geqslant 0,\\ t\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2, & t<0,\end{cases}$$

或

$$x_1=f_1(t)=t,\ x_2=f_2(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 1,\\ -1, & t<0.\end{cases}$$

如图 2-9 所示，当 $t\to 0$ 时，函数没有极限. 因为任一个点 $\boldsymbol{L}$，有一个邻域 $S_\varepsilon(\boldsymbol{L})$，它不同时和两直线 $x_2=1$, $x_2=-1$，都相交（例如，$S_{\frac{1}{2}}(0,1)$不包含直线 $x_2=-1$ 上的点），对这些开球 $S_\varepsilon(\boldsymbol{L})$不存在 $\delta>0$，使当 $0<|t|<\delta$ 时，点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)\in S_\varepsilon(\boldsymbol{L})$，因为 $\boldsymbol{L}$ 是任意的，所以没有极限. 另一方面，函数在任意 $t_0\neq 0$ 有极限，例如，当 $t\to\frac{1}{2}$ 极限是 $\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

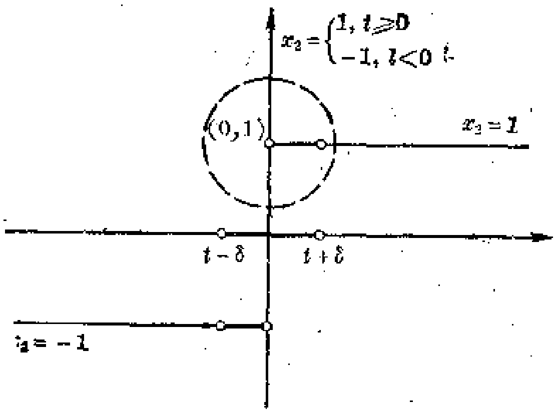


图 2-9

我们知道数量函数当 $t\to t_0$ 时，$g(t)\to 0$ 意味着对每一个 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得当 $t\in S'_\delta(t_0)$时 $|g(t)|<\varepsilon$. 若令

$$g(t)=|\boldsymbol{f}_1(t)-\boldsymbol{L}|,$$

则

$$|g(t)|=|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|<\varepsilon,$$

当且仅当 $\boldsymbol{f}(t)\in S_\delta(\boldsymbol{L})$，于是得到下面重要定理.

定理 2.1 当 $t\to t_0$ 时 $\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$ 的必要充分条件是当 $t\to t_0$ 时，$|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|\to 0$.

例 2.12 证明

$$\lim_{t\to 1}(t^2\boldsymbol{e}_1-(t+1)\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2.$$

证：

$$\lim_{t\to 1}|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|=\lim_{t\to 1}|(t^2-1)\boldsymbol{e}_1-(t-1)\boldsymbol{e}_2|$$

$$=\lim_{t\to 1}[(t^2-1)^2+(t-1)^2]^{\frac{1}{2}}=0.$$

最后，设当 $t\to t_0$ 时 $\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使当 $t\in S'_\delta(t_0)$ 时就有 $|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|<\varepsilon$. 因此对 $t\in S_\delta(t_0)$，$|\boldsymbol{f}(t)|=|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}|\leqslant|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|+|\boldsymbol{L}|\leqslant M$，其中 $M=\max(\varepsilon, |\boldsymbol{f}(t_0)-\boldsymbol{L}|)+|\boldsymbol{L}|$. 于是我们有

定理 2.2 若 $\boldsymbol{f}(t)$在 $t=t_0$ 有定义，且当 $t\to t_0$ 时有极限，则 $\boldsymbol{f}(t)$在 t_0 有界.

6. 极限的性质

设 $\lim\limits_{t\to t_0}f_i(t)=L_i$, $i=1, 2, 3$; 则

$$\lim_{t\to t_0}[f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3]=L_1\boldsymbol{e}_1+L_2\boldsymbol{e}_2+L_3\boldsymbol{e}_3$$

因为，设 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{L}=L_1\boldsymbol{e}_1+L_2\boldsymbol{e}_2+L_3\boldsymbol{e}_3$，则

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|=\lim_{t\to t_0}|(f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3)-(L_1\boldsymbol{e}_1+L_2\boldsymbol{e}_2+L_3\boldsymbol{e}_3)|$$

$$=\lim_{t\to t_0}[(f_1(t)-L_1)^2+(f_2(t)-L_2)^2+(f_3(t)-L_3)^2]^{\frac{1}{2}}=0.$$

上面定理的逆定理也是成立的，即

定理 2.3 函数 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3$ 当 $t\to t_0$ 时有极限的必要充分条件是

$f_i(t)$, $i=1, 2, 3$, 当 $t\to t_0$ 时有极限, 并且

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=(\lim_{t\to t_0}f_1(t))\boldsymbol{e}_1+(\lim_{t\to t_0}f_2(t))\boldsymbol{e}_2+(\lim_{t\to t_0}f_3(t))\boldsymbol{e}_3.$$

例 2.13 $\lim\limits_{t\to 0}((\sin t)\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3)$

$$=(\lim_{t\to 0}\sin t)\boldsymbol{e}_1+(\lim_{t\to 0}\cos t)\boldsymbol{e}_2+(\lim_{t\to 0}t)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2.$$

例 2.14 设 $\boldsymbol{f}(t)=t^2\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(2+h)-\boldsymbol{f}(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((2+h)^2\boldsymbol{e}_1+(2+h)\boldsymbol{e}_2)-(4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{((2+h)^2-4)\boldsymbol{e}_1}{h}+\frac{h\boldsymbol{e}_2}{h}\right]=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2.$$

现在假设当 $t\to t_0$ 时, $\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$, 则当 $t\to t_0$ 时 $|\boldsymbol{f}(t)|r\to|\boldsymbol{L}|$. 为证明这一点, 设 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{L}=L_1\boldsymbol{e}_1+L_2\boldsymbol{e}_2+L_3\boldsymbol{e}_3$,

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{f}(t)|=\lim_{t\to t_0}[f_1^2(t)+f_2^2(t)+f_3^2(t)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[(\lim_{t\to t_0}f_1(t))^2+(\lim_{t\to t_0}f_2(t))^2+(\lim_{t\to t_0}f_3(t))^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[L_1^2+L_2^2+L_3^2]^{\frac{1}{2}}=|\boldsymbol{L}|.$$

注意, 上面定理的逆命题不一定成立, 例如, 在例 2.11. 中, 当 $t_0=0$ 时, $|\boldsymbol{f}(t)|$ 有极限, 但 $\boldsymbol{f}(t)$ 不存在极限.

我们把上面的结果叙述为:

定理 2.4 当 $t\to t_0$ 时, $\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$, 则当 $t\to t_0$ 时 $|\boldsymbol{f}(t)|\to|\boldsymbol{L}|$.

最后, 我们设 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{L}$, $\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=M$ 和 $\lim\limits_{t\to t_0}h(t)=N$, 则

[H₁] $\lim\limits_{t\to t_0}(\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{g}(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}$;

[H₂] $\lim\limits_{t\to t_0}(h(t)\boldsymbol{g}(t))=\lim\limits_{t\to t_0}h(t)\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=N\boldsymbol{M}$;

[H₃] 若 $N\neq 0$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0}(\boldsymbol{f}(t)/h(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)/\lim\limits_{t\to t_0}h(t)=\dfrac{\boldsymbol{L}}{N}$;

[H₄] $\lim\limits_{t\to t_0}(\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}$;

[H₅] $\lim\limits_{t\to t_0}(\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{M}$;

[H₆] 若 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)$ 和 $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}h(\theta)=t_0$,

则
$$\lim_{\theta\to\theta_0}\boldsymbol{f}(h(\theta))=\boldsymbol{f}(\lim_{\theta\to\theta_0}h(\theta))=\boldsymbol{f}(t_0).$$

例 2.15 设 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{L}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{M}$, $\lim\limits_{t\to t_0}h(t)=\boldsymbol{N}$,

则
$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)\boldsymbol{h}(t)]=\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)\times\boldsymbol{h}(t)]$$

$$=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{g}(t)\times\boldsymbol{h}(t)]$$

$$=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{h}(t)=[\boldsymbol{LMN}].$$

7. 连 续

向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 有定义, 若对任意 $\varepsilon>0$ 存在一个 $\delta>0$, 使当 $t\in S_\delta(t_0)$, 就有

$\boldsymbol{f}(t)\in S_\varepsilon(\boldsymbol{f}(t_0))$，则称$\boldsymbol{f}(t)$在 t_0 是连续的。

或等价地，若

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0), \tag{2.8}$$

则$\boldsymbol{f}(t)$在 t_0 是连续的．若函数$\boldsymbol{f}(t)$对 I 上每一点都连续，则称函数$\boldsymbol{f}(t)$在 I 上连续．

从定理 2.3 推出，$\boldsymbol{f}(t)$连续的必要充分条件是它的分量$f_i(t)$，$i=1, 2, 3$ 是连续的．从$[\mathrm{H}_1]$至$[\mathrm{H}_6]$也可以得出连续函数的和、积、数量积和向量积都是连续的，连续函数的复合函数也是连续的．

最后，我们注意(2.8)等价于

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(t_0))=\mathbf{0}.$$

即若令 $h=t-t_0$，则

$$\lim_{h\to 0}(\boldsymbol{f}(t_0+h)-\boldsymbol{f}(t_0))=\mathbf{0}.$$

例 2.16 设$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}t^2$，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是常向量，则

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}t^2)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t_0+\boldsymbol{c}t_0^2=\boldsymbol{f}(t_0).$$

因此$\boldsymbol{f}(t)$对所有 t 连续．

例 2.17 设 $\boldsymbol{f}(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2-1}{t-1}\boldsymbol{e}_1+t^3\boldsymbol{e}_2, & t\neq 1,\\ 2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, & t=0,\end{cases}$ 则$\boldsymbol{f}(t)$对所有 t 连续．因为

当 $t_0\neq 1$，

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{t^2-1}{t-1}\boldsymbol{e}_1+t^3\boldsymbol{e}_2\right)=\frac{t_0^2-1}{t_0-1}\boldsymbol{e}_1+t_0^3\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{f}(t_0).$$

当 $t_0=1$，

$$\lim_{t\to 1}\boldsymbol{f}(t)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2-1}{t-1}\boldsymbol{e}_1+t^3\boldsymbol{e}_2\right)=\lim_{t\to 1}((t+1)\boldsymbol{e}_1+t^3\boldsymbol{e}_2)=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{f}(1).$$

例 2.18 例 2.11 的函数

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{cases}t\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, & t\geqslant 0,\\ t\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}_2 & t<0,\end{cases}$$

对所有的 $t\neq 0$ 是连续的，但 $t=0$ 除外，因为此时极限不存在．

8. 微 分

若极限

$$\boldsymbol{f}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{t-t_0} \tag{2.9}$$

存在，那末这极限称为$\boldsymbol{f}(t)$在 $t=t_0$ 的导数，并且称$\boldsymbol{f}(t)$在 t_0 可微．

注意，若以 $t=t_0+\Delta t$ 代入上式，则得

$$\boldsymbol{f}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}. \tag{2.10}$$

例 2.19 设$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}t^2$，其中 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是常向量，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}'(t_0)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}(t_0+\Delta t)+\boldsymbol{c}(t_0+\Delta t)^2]-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t_0+\boldsymbol{c}t_0^2)}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{b}\Delta t+2\boldsymbol{c}t_0\Delta t+\boldsymbol{c}(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}t_0+\boldsymbol{c}\Delta t)=\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}t_0,$$

于是$\boldsymbol{f}(t)$在t_0是可微的，且导数$\boldsymbol{f}'(t_0)=\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}t_0$。

若$\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3$，从定理2.3得到

$$\boldsymbol{f}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{t-t_0}$$

$$=\lim_{t\to t_0}\left[\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0}\boldsymbol{e}_1+\frac{f_2(t)-f_2(t_0)}{t-t_0}\boldsymbol{e}_2+\frac{f_3(t)-f_3(t_0)}{t-t_0}\boldsymbol{e}_3\right]$$

$$=\left[\lim_{t\to t_0}\frac{f_1(t)-f_2(t_0)}{t-t_0}\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\lim_{t\to t_0}\frac{f_2(t)-f_2(t_0)}{t-t_0}\right]\boldsymbol{e}_2$$

$$+\left[\lim_{t\to t_0}\frac{f_3(t)-f_3(t_0)}{t-t_0}\right]\boldsymbol{e}_3=f_1'(t_0)\boldsymbol{e}_1+f_2'(t_0)\boldsymbol{e}_2+f_3'(t_0)\boldsymbol{e}_3,$$

于是我们有

定理2.5 函数$\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3$在$t_0$是可微的必要充分条件是每一个分量$f_i(t)$，$i=1,2,3$在$t_0$是可微的，并且$\boldsymbol{f}'(t_0)=f_1'(t_0)\boldsymbol{e}_1+f_2'(t_0)\boldsymbol{e}_2+f_3(t_0)\boldsymbol{e}_3$。

若$\boldsymbol{f}'(t)$在区间I上是可微的，则$\boldsymbol{f}'(t)$也是区间I上的向量函数，它也可能是可微的，这就得到了$\boldsymbol{f}(t)$的二阶导数，用$\boldsymbol{f}''(t)$表示，更高阶的导数可类似地定义。

若$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t)$，它的导数象数量函数一样可记作：

$$\boldsymbol{u}'\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{f}'(t),\quad \boldsymbol{u}''=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)=\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}=\boldsymbol{f}''(t),\text{等等。}$$

例2.20

若
$$\boldsymbol{u}=(t^3+2t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2+e^t\boldsymbol{e}_3,$$

则
$$\boldsymbol{u}'=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{d}{dt}(t^3+2t)\boldsymbol{e}_1+\frac{d}{dt}(\sin t)\boldsymbol{e}_2+\frac{d}{dt}(e^t)\boldsymbol{e}_3$$

$$=(3t^2+2)\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2+e^t\boldsymbol{e}_3.$$

$$\boldsymbol{u}''=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(3t^2+2)\boldsymbol{e}_1+\frac{d}{dt}(\cos t)\boldsymbol{e}_2+\frac{d}{dt}(e^t)\boldsymbol{e}_3$$

$$=6t\boldsymbol{e}_1-(\sin t)\boldsymbol{e}_2+e^t\boldsymbol{e}_3.$$

$$\boldsymbol{u}'''=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)=\frac{d}{dt}(6t)\boldsymbol{e}_1-\frac{d}{dt}(\sin t)\boldsymbol{e}_2-\frac{d}{dt}(e^t)\boldsymbol{e}_3$$

$$=6\boldsymbol{e}_1-(\cos t)\boldsymbol{e}_2+e^t\boldsymbol{e}_3.$$

例2.21 $\boldsymbol{x}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2$画出中心在原点半径是$a$的圆，如图2-10所示，导数

$$\boldsymbol{x}'=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2.$$

因为$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'=0$，故切向量$\boldsymbol{x}'$在$\boldsymbol{x}$处和圆相切，且与$\boldsymbol{x}$正交。

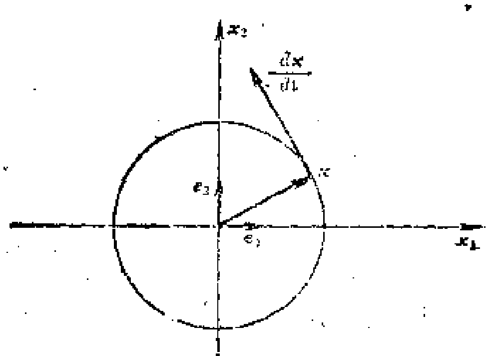


图 2-10

向量函数的许多性质与数量函数的性质类似。例如，在问题2.26中我们证明。

定理2.6 如果$\boldsymbol{f}(t)$在t_0可微，则$\boldsymbol{f}(t)$在t_0连续。

9. 微分公式

若 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、h 是 I 上 t 的可微函数，则

[J_1] $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 在 I 上可微，并且

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}}{dt};$$

[J_2] $h\boldsymbol{u}$ 在 I 上可微，并且

$$\frac{d}{dt}(h\boldsymbol{u})=h\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{dh}{dt}\boldsymbol{u};$$

[J_3] $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 在 I 上可微，并且

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v};$$

[J_4] $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 在 I 上可微，并且

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}.$$

最后还有链法则：

[J_5] 若 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t)$，在 I_t 上可微，且 $t=h(\theta)$ 在 I_θ 上可微，其中像 $h(I_\theta)\subset I_t$，则 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\theta)=\boldsymbol{f}(h(\theta))$在 I_θ 上可微，并且

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}.$$

例 2.22 设 $\boldsymbol{u}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1-a(\sin t)\boldsymbol{e}_2$, $\theta=(1+t^2)^{\frac{1}{2}}$, $t>0$，则

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\bigg/\frac{d\theta}{dt}=(-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1-a(\cos t)\boldsymbol{e}_2)/[t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}]$$

$$=(-a/t)(1+t^2)^{\frac{1}{2}}((\sin t)\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2),$$

其中我们使用了“若数量函数 $\theta=h(t)$ 且 $\frac{d\theta}{dt}\neq0$，则 $\frac{dt}{d\theta}=1/(d\theta/dt)$”这一结论。

例 2.23 $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)=\boldsymbol{u}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{u}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}+\left|\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right|^2.$

例 2.24

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{u}\ \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\ \frac{d^2\boldsymbol{u}}{dx^2}\right]=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}\right)$$

$$=\boldsymbol{u}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}\right)+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}\right)$$

$$=\boldsymbol{u}\cdot\left[\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\frac{d^3\boldsymbol{u}}{dt^3}\right)+\left(\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}\times\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}\right)\right]+0$$

$$=\boldsymbol{u}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\frac{d^3\boldsymbol{u}}{dt^3}\right)=\left[\boldsymbol{u}\ \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\ \frac{d^3\boldsymbol{u}}{dt^3}\right].$$

最后，若 $\boldsymbol{u}$ 是常模的向量函数，即 $|\boldsymbol{u}|=$常量，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=$常量，微分后得到

$\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}=0$ 或 $\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=0$，因此 $\boldsymbol{u}$ 与 $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ 正交。特别我们有

定理 2.7 若 $\boldsymbol{u}$ 是单位向量函数，则 $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ 垂直于 $\boldsymbol{u}$。这个定理很重要，经常会用到。

10. C^m 类函数

一般地，我们要求函数至少一阶可微，但时常也要求二阶甚至更高阶可微，我们也要知道使某个结果成立的函数的最大类. 若数量函数 f 或向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在区间 I 上有 m 阶连续导数，则称 f 或 $\boldsymbol{f}$ 在区间 I 上属于 C^m 类. 用 C^0 表示连续函数类，用 C^∞ 表示有任意阶连续导数的函数类.

因为向量函数连续或者可导的必要充分条件是它的分量函数连续或者可导，于是我们就有

定理 2.8 向量函数 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3$ 在 I 上属于 C^m 类的必要充分条件是它的分量函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 在 I 上属于 C^m 类.

注意，因可微函数是连续的，对于所有 $j\leqslant m$，若函数属于 C^m，则它也属于 C^j 类.

例 2.25 研究向量函数 $\boldsymbol{f}(t)=t^3\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2+t^{8/3}\boldsymbol{e}_3$, $-\infty<t<\infty$, 这时 $\boldsymbol{f}'(t)=3t^2\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2+(8/3)t^{5/3}\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}''(t)=6t\boldsymbol{e}_1-(\sin t)\boldsymbol{e}_2+(40/9)t^{2/3}\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}'(t)$, $\boldsymbol{f}''(t)$ 对所有 t 是连续的，但是，

$\boldsymbol{f}'''(t)=6\boldsymbol{e}_1-(\cos t)\boldsymbol{e}_2+(80/27)t^{-1/3}\boldsymbol{e}_3$ 在 $t=0$ 不存在，因为 $t^{1/3}$ 是分母. 所以 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 $-\infty<t<\infty$ 上是 C^2 类不是 C^3 类，在任意一个不含原点的区间，$\boldsymbol{f}$ 有任意阶的连续导数，因此在这样的区间内 $\boldsymbol{f}$ 属于 C^∞ 类.

以下是微分公式 $[J_1]$ 至 $[J_5]$ 的推论

定理 2.9 若 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, h 在 I 上属于 C^m 类，则 $h\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ 在 I 上属于 C^m 类.

定理 2.10 若 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 I_t 上属于 C^m 类，$t(Q)$ 在 I_Q 上属于 C^m 类，其中 $t(I_Q)\subset I_t$，则复合函数 $\boldsymbol{g}(Q)=\boldsymbol{f}(t_{(Q)})$ 在 I_Q 上属于 C^m 类，换言之，C^m 类函数的 C^m 类函数是 C^m 类函数.

11. 泰勒公式

设 $f(t)$ 是 I 上的 C^m 类函数，则(Taylor 公式)对 I 上任意 t_0 和 t,

$$f(t)=f(t_0)+\frac{f'(t_0)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+R_m(t,\ t_0),$$

其中余项 $R_m(t,\ t_0)$ 具有性质：

当 $t\to t_0$ 时，$\dfrac{R_m(t,\ t_0)}{(t-t_0)^m}\to 0$.

显然，应用向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 的分量公式，可以得到

定理 2.11 Taylor 公式. 设 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 I 上属于 C^m 类，则在 I 上对每一个 t 和 t_0,

$$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)+\frac{\boldsymbol{f}'(t_0)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{\boldsymbol{f}^{(m)}(t)}{m!}(t-t_0)^m+\boldsymbol{R}_m(t,\ t_0)$$

其中当 $t\to t_0$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{R}_m(t,\ t_0)}{(t-t_0)^m}\to 0$.

例 2.26 如果 $\boldsymbol{f}(t)=(\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}'(0)=\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}''(0)=-\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}'''(0)=-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}^{(4)}(0)=\boldsymbol{e}_1$，因此在 $t_0=0$ 附近，我们有

$$(\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2t-(\boldsymbol{e}_1/2!)t^2-(\boldsymbol{e}_2/3!)t^3+(\boldsymbol{e}_1/4!)t^4+\boldsymbol{R}_4(t),$$

其中当 $t\to 0$ 时，$\boldsymbol{R}_4(t)/t^4\to 0$.

使用 Landau 记号 o 和 O 来研究函数在一点邻近的性质是比较方便的. 即是, 设数量函数 $g(t)$ 在 t_0 的某一个去心邻域中异于零, 当 $t\to t_0$ 时, $\boldsymbol{f}(t)/g(t)\to\boldsymbol{0}$, 则称数量或向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 为 $g(t)$ 在 t_0 的"小 oh", 记作 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{o}(g(t))$. 若 $\boldsymbol{f}(t)/g(t)$ 在 t_0 有界, 则称数量或向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 为 $g(t)$ 在 t_0 的"大 Oh", 记作 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{O}(g(t))$.

例 2.27 使 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{a}t^4+\boldsymbol{b}t^5+\boldsymbol{c}t^6$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是常向量, 则在 $t=0$, $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{o}(t^3)$, 因为

$$\lim_{t\to 0}\boldsymbol{f}(t)/t^3=\lim_{t\to 0}(\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}t^2+\boldsymbol{c}t^3)=\boldsymbol{0}.$$

注意, $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{o}(t^3)$, 但对整数 $n>3$ 时, $\boldsymbol{f}(t)\neq\boldsymbol{o}(t^n)$.

例 2.28 设 $\boldsymbol{f}(t)=(\sin^2 t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+t^3)\boldsymbol{e}_2+t^4\boldsymbol{e}_3$, 则 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{O}(t^2)$.

因为 $\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{f}(t)/t^2=\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\boldsymbol{e}_1+(1+t)\boldsymbol{e}_2+t^2\boldsymbol{e}_3\right]=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, 即极限存在, 因而 $\boldsymbol{f}(t)/t_2$ 有界, 于是 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{O}(t^2)$. 注意, 当 $t\to 0$ 时, $\boldsymbol{f}(t)/t\to\boldsymbol{0}$, 所以也有 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{O}(t)$, 但 $\boldsymbol{O}(t^2)$ 是最好的估计, 因为当 $t\to 0$ 时, 对 $\alpha>2$, $|\boldsymbol{f}(t)/t^\alpha|\to\infty$.

例 2.29 设 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 I 上是 C^m 类, 在 t_0 应用 Taylor 公式就得到

$$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)+\frac{\boldsymbol{f}'(t_0)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{\boldsymbol{f}^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+\boldsymbol{o}[(t-t_0)^m].$$

12. 解析函数

设 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 I 上是 C^∞ 类, 则对每一个 m 和 I 上所有 t 和 t_0 有

$$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)+\frac{\boldsymbol{f}'(t_0)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{\boldsymbol{f}^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+\boldsymbol{R}_m(t,\ t_0).$$

若又有 $\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{R}_m(t,\ t_0)=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 I 上可以展成幂级数

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{f}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n.$$

在这样的情况下, 则称 $\boldsymbol{f}(t)$ 是 I 上的解析函数, 或者, 更一般地, 如果对 I 中每一个 t_0, 存在一个邻域 $S_\delta(t_0)$, 使得 $\boldsymbol{f}(t)$ 能展成收敛的幂级数

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{a}_n(t-t_0)^n,$$

则称 $\boldsymbol{f}(t)$ 为 I 上的解析函数. 在 I 上的解析函数类, 用 C^A 表示.

例 2.30 说明, C^∞ 类函数不一定是解析函数, 但是, 任一幂级数表示的函数在收敛区间的内部是可微的, 并且微商是由原来的幂级数逐项微商得到, 于是每一个解析函数是 C^∞ 类, 而且 $\boldsymbol{f}^{(n)}(t_0)=\boldsymbol{a}_n n!$.

从对幂级数的和、积、替换定理得到解析函数的和、积、数积和向量积仍是解析的, 同时任一解析函数的解析函数也是解析函数.

例 2.30 函数 $f(t)=e^{-1/t^2}$ 对所有 $t\neq 0$ 连续, 若我们定义 $f(0)=0$, 则 $f(t)$ 对所有 t, $-\infty<t<+\infty$ 连续, 并且事实上是属 C^∞ 类. 但是 $f(t)$ 在任一包含 $t=0$ 的区间不是解析的, 因为可以证明 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ 等等, 要使 $f(t)$ 在某一个 $S_\delta(0)$ 中对所有 $t\in S_\delta(0)$ 有收敛于零的幂级数, 这是不可能的, 因为 $f(t)$ 在任意一个 $S_\delta(0)$ 中不恒为零.

最后, 注意多项式, 有理函数, 三角函数和指数函数等初等函数在它连续的区间上是解析的, 并且这些函数的反函数在任一可导的区间上也是解析的.

§2.2 问题及其解答

1. 直线和平面

2.1 求一个单位向量，使它垂直于 $P(0, 1, 1)$, $Q(1, 0, -1)$, $R(1, -1, 0)$所决定的平面 S.

解: $$\boldsymbol{PQ}\times\boldsymbol{PR}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & 1 & 1\\ \boldsymbol{e}_2 & -1 & -2\\ \boldsymbol{e}_3 & -2 & -1\end{pmatrix}=-3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$$ 垂直于 S, 且 $\pm\dfrac{\boldsymbol{PQ}\times\boldsymbol{PR}}{|\boldsymbol{PQ}\times\boldsymbol{PR}|}=$ $\pm(1/\sqrt{11})(3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$是垂直于 S 的单位向量.

2.2 求通过 $A(1, -1, 2)$平行于 x_3 轴的直线方程.

解: 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{OP}$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OA}$, 则 P 在直线上的必要充分条件是

$$\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a})=k\boldsymbol{e}_3 \text{ 或 } (x_1-1)\boldsymbol{e}_1+(x_2+1)\boldsymbol{e}_2+(x_3-2)\boldsymbol{e}_3=k\boldsymbol{e}_3,$$

即 $$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=k+2\quad(-\infty<k<\infty).$$

2.3 设 $d\geqslant 0$, $\boldsymbol{n}=n_1\boldsymbol{e}_1+n_2\boldsymbol{e}_2+n_3\boldsymbol{e}_3$ 是单位向量. 证明 $n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$ 是平面 S 的方程, d 是从原点到平面 S 的距离, $\boldsymbol{n}$ 是从原点出发的单位法向量.

证: 设 $\boldsymbol{x}$ 是 S 上的任一点, 则

$$n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|\cos\angle(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})=d\geqslant 0$$

推出 $\cos\angle(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 或 $0\leqslant\angle(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})\leqslant\pi/2$. $\boldsymbol{n}$ 是从原点指向 S, 如图 2-11 所示. 从原点到 S 的距离是

$$|\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{x})|=|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}|/|\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}|=|d|=d.$$

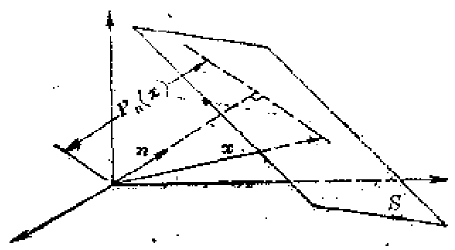


图 2-11

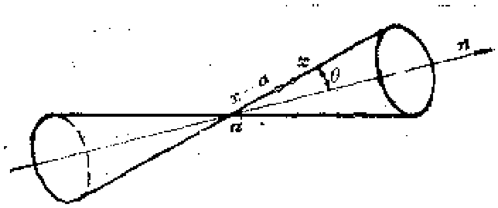


图 2-12

2.4 导出中心在 a 半径为 r 的球面方程.

解: $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|=r$ 或 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=r^2$.

2.5 设 $\boldsymbol{a}$ 是直圆锥的顶点, $\boldsymbol{n}$ 是它的轴线方向上的单位向量, 半角 $\theta=\arccos k$, $k>0$, 证明锥面的方程为

$$[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}]^2-k^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0.$$

证: 如图 2-12 所示, $\boldsymbol{x}$ 落在锥面上的必要充分条件是 $\angle(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})=\theta$ 或 $(\pi-\theta)$, 即必要充分条件为 $|\cos\angle(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})|=|\cos\theta|=k$, 即 $|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}|=k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$ 平方得 $[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}]^2=k^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$, 这就是所要的结果.

2.6 设 $(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$是 E^3 中的任意基, O 是 E^3 中的固定点, 又设 P 的坐标 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 由向量

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{OP}=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+x_3\boldsymbol{u}_3$$

的分量确定，用这样方法建立坐标系称为仿射坐标系，证明在仿射坐标系中二点 $P(x_1, x_2, x_3)$和 $Q(y_1, y_2, y_3)$间距离的平方是

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{PQ}|^2=&g_{11}(x_1-y_1)^2+g_{12}(x_1-y_1)(x_2-y_2)+g_{13}(x_1-y_1)(x_3-y_3)\\&+g_{21}(x_2-y_2)(x_1-y_1)+g_{22}(x_2-y_2)^2+g_{23}(x_2-y_2)(x_3-y_3)\\&+g_{31}(x_3-y_3)(x_1-y_1)+g_{32}(x_3-y_3)(x_2-y_2)+g_{33}(x_3-y_3)^2,\end{aligned}$$

简写为 $|\boldsymbol{PQ}|^2=\sum\limits_i\sum\limits_j g_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)$， $i, j=1, 2, 3$，其中 g_{ij} 满足 (a) $g_{ij}=g_{ji}$，(b) $\det(g_{ij})>0$.

证： $|\boldsymbol{PQ}|^2=|\boldsymbol{QP}|^2=|\boldsymbol{OP}-\boldsymbol{OQ}|^2=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$

$$=[\sum_i(x_i-y_i)\boldsymbol{u}_i][\sum_j(x_j-y_j)\boldsymbol{u}_j]=\sum_i\sum_j(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j)(x_i-y_i)(x_j-y_j),$$

即
$$|\boldsymbol{PQ}|^2=\sum_i\sum_j g_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j),$$

其中，
$$g_{ij}=\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j,\ i, j=1, 2, 3.$$

明显地 (a) $g_{ij}=\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_i=g_{ji}$, $i, j=1, 2, 3$. 由问题1.58还知

$$\text{(b)}\ \det(g_{ij})=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_3\\ \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_3\\ \boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3\end{pmatrix}=[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3]^2>0.$$

2. 函 数

2.7 对 -4 和 4 之间的整数 t，计算向量 $\boldsymbol{x}=t^2\boldsymbol{e}_1+(1-t)\boldsymbol{e}_2$，并用 $\boldsymbol{x}$ 的端点画出曲线的草图

t	$\boldsymbol{x}$
-4	$16\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2$
-3	$9\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$
-2	$4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$
-1	$\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$
0	$\boldsymbol{e}_2$
1	$\boldsymbol{e}_1$
2	$4\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$
3	$9\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$
4	$16\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$

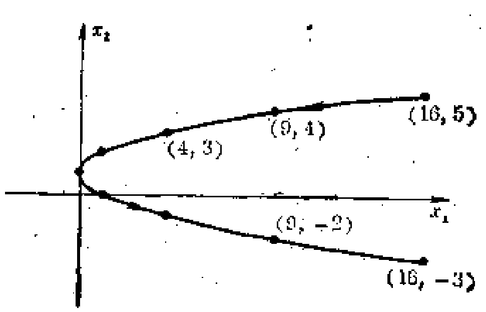


图 2-13

2.8 设 $\boldsymbol{f}(t)=(1+t^3)\boldsymbol{e}_1+(2t-t^2)\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3$,

$$\boldsymbol{g}(t)=(1+t^2)\boldsymbol{e}_1+t^3\boldsymbol{e}_2,\ h(t)=(2t-1).$$

求 (a) $h(2)(\boldsymbol{f}(1)+\boldsymbol{g}(-1))$, (b) $|\boldsymbol{g}(2)|$, (c) $\boldsymbol{f}(a)\cdot\boldsymbol{g}(b)$, (d) $\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)$, (e) $\boldsymbol{g}(2a-b)$, (f) $\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)$, (g) $\boldsymbol{f}(h(t))$.

解 (a) $h(2)(\boldsymbol{f}(1)+\boldsymbol{g}(1))=(3)[(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)+(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)]=12\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_3$;

(b) $|\boldsymbol{g}(2)|=|5\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{89}$;

(c) $\boldsymbol{f}(a)\cdot\boldsymbol{g}(b)=[(1+a^3)\boldsymbol{e}_1+(2a-a^2)\boldsymbol{e}_2+a\boldsymbol{e}_3][(1+b^2)\boldsymbol{e}_1+b^3\boldsymbol{e}_2]$

$$=(1+a^3)(1+b^2)+b^3(2a-a^2).$$

(d) $\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & (1+t^3) & (1+t^2)\\ \boldsymbol{e}_2 & (2t-t^2) & t^3\\ \boldsymbol{e}_3 & t & 0\end{pmatrix}$

$$=-t^4\boldsymbol{e}_1+(t+t^3)\boldsymbol{e}_2+(t^5+t^4-t^3+t^2-2t)\boldsymbol{e}_3$$

(e) $\boldsymbol{g}(2a-b)=(1+(2a-b)^2\boldsymbol{e}_1+(2a-b)^3\boldsymbol{e}_2$.

(f) $\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)=[1+(t_0+\Delta t)^3]\boldsymbol{e}_1+[2(t_0+\Delta t)-(t_0+\Delta t)^2]\boldsymbol{e}_2$

$+(t_0+\Delta t)\boldsymbol{e}_3-(1+t_0^3)\boldsymbol{e}_1-(2t_0-t_0^2)\boldsymbol{e}_2-t_0\boldsymbol{e}_3$

$=(3t_0^2\Delta t+3t_0\Delta t^2+\Delta t^3)\boldsymbol{e}_1+(2\Delta t-2t_0\Delta t-\Delta t^2)\boldsymbol{e}_2+\Delta t\boldsymbol{e}_3$.

(g) $\boldsymbol{f}(h(t))=\boldsymbol{f}(2t-1)=(1+(2t-1)^3)\boldsymbol{e}_1+(2(2t-1)-(2t-1)^2\boldsymbol{e}_2+(2t-1)\boldsymbol{e}_3$

$=(8t^3-12t^2+6t)\boldsymbol{e}_1+(-4t^2+8t-3)\boldsymbol{e}_2+(2t-1)\boldsymbol{e}_3$.

2.9 证明曲线

$$\boldsymbol{x}=(-1+\sin 2t\cos 3t)\boldsymbol{e}_1+(2+\sin 2t\sin 3t)\boldsymbol{e}_2+(-3+\cos 2t)\boldsymbol{e}_3$$

落在中心在 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$ 半径为 1 的球面上.

证: $|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}|=|(\sin 2t\cos 3t)\boldsymbol{e}_1+(\sin 2t\sin 3t)\boldsymbol{e}_2+(\cos 2t)\boldsymbol{e}_3|$

$=(\sin^2 2t\cos^2 3t+\sin^2 2t\sin^2 3t+\cos^2 2t)^{1/2}=(\sin^2 2t+\cos^2 2t)^{1/2}=1$

本题证毕.

2.10 证明曲线

$$\boldsymbol{X}=(-2+\sin t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+2)\boldsymbol{e}_2+(t^2-1+2\sin t)\boldsymbol{e}_3$$

落在通过 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$ 垂直于 $\boldsymbol{N}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ 的平面上.

证: $(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{N}=[(-2+\sin t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+1)\boldsymbol{e}_2+(t^2-3+2\sin t)\boldsymbol{e}_3]$

$\cdot[2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3]=0$,

由此得到 $\boldsymbol{X}$ 落在通过 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{N}$ 的平面上.

2.11 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$,

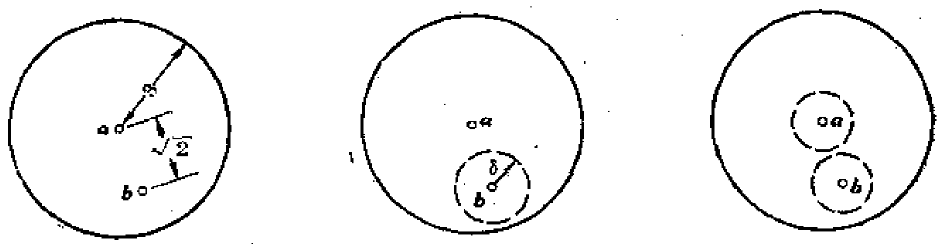
(a) 证明 $\boldsymbol{b}$ 是在 $S_3(\boldsymbol{a})$ 中, (b) 求一个 $\delta>0$ 使得 $S_\delta(\boldsymbol{b})\subset S_3(\boldsymbol{a})$, (c) 求 ε_1 和 ε_2, 使得 $S_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{a})$ 和 $S_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{b})$ 相分离.

证: (a) 因为 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}<3$, 故 $\boldsymbol{b}$ 在 $S_3(\boldsymbol{a})$ 中.

(b) 设 $\delta\leqslant 3-|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=3-\sqrt{2}$. 若 $\boldsymbol{X}$ 属于 $S_\delta(\boldsymbol{b})$, 即 $|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{b}|<\delta$, 则 $|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|<\delta+\sqrt{2}<3-\sqrt{2}+\sqrt{2}=3$,

即 $|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{a}|<3$, $\boldsymbol{X}$ 在 $S_3(\boldsymbol{a}$ 中). 因为 $S_\delta(\boldsymbol{b})$ 中任一 $\boldsymbol{X}$ 都在 $S_3(\boldsymbol{a})$ 中, 故 $S_\delta(\boldsymbol{b})\subset S_3(\boldsymbol{a})$, 见图 2-14.

(c) 设 $\varepsilon_1=\varepsilon_2\leqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|\leqslant\sqrt{2}/2$, 则 $S_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{a})$ 和 $S_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{b})$ 是分离的. 因为假若不是, 即



$\delta\leqslant 3-\sqrt{2}$　　$\varepsilon_1=\varepsilon_2\leqslant\sqrt{2}/2$

图 2-14

设 Y 在 $S_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{a})$ 和 $S_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{b})$ 中，则 $|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{a}|<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{b}|<\frac{\sqrt{2}}{2}$，但是 $\sqrt{2}=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{a}|<\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2$，

这是不可能的，故 $S_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{a})$ 和 $S_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{b})$ 是分离的。

2.12 证明，对所有 $t\in S_{1/10}(1)$，点 $P(t^2-t,\ 2t)$ 落在 $S_{1/3}(1,\ -1,\ 2)$ 中。

证：若 $t\in S_{1/10}(1)$，则 $|t-1|<1/10$ 即 $(t-1)^2<\frac{1}{100}$，且

$$(t+1)^2=((t-1)+2)^2=(t-1)^2+4(t-1)+4\leqslant(t-1)^2+4|t-1|+4$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{4}{10}\right)+4\leqslant 5,$$

因为 $\boldsymbol{P}(t^2,\ -t,\ 2t)$ 与 $(1,\ -1,\ 2)$ 之间的距离是

$$[(t^2-1)^2+(-t+1)^2+(2t-2)^2]^{1/2}$$
$$=[(t+1)^2(t-1)^2+(t-1)^2+4(t-1)^2]^{1/2}$$
$$\leqslant[(5/100)+(1/100)+(4/100)]^{1/2}\leqslant 1/\sqrt{10}<\frac{1}{3},$$

所以，对所有 $t\in S_{1/10}(1)$，$P\in S_{1/3}(1,\ -1,\ 2)$。

2.13 求 $\delta>0$ 使得对所有 $t\in S_\delta(1)$，向量 $\boldsymbol{X}=t^2\boldsymbol{e}_1-t\boldsymbol{e}_2+2t\boldsymbol{e}_3$ 在 $S_1/100(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)$ 中。

解：设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，则

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|=|(t^2-1)\boldsymbol{e}_1-(t-1)\boldsymbol{e}_2+(2t-2)\boldsymbol{e}_3|$$
$$\leqslant|t^2-1||\boldsymbol{e}_1|+|t-1||\boldsymbol{e}_2|+|2t-2||\boldsymbol{e}_3|$$
$$\leqslant|t-1||t+1|+|t-1|+2|t-1|\leqslant|t-1|(|t+1|+3)$$
$$=|t-1|(|t-1+2|+3)\leqslant|t-1|(|t-1|+5).$$

设 $|t-1|<1$，若 $|t-1|<1/600$，则 $|x-a|\leqslant|t-1|\cdot 6<1/100$，这样若 $|t-1|<1/600$ 即若 t 在 $S_\delta(1)$ 中，其中 $\delta=\frac{1}{600}$，则 $|t-1|<1$，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|\leqslant|t-1|(|t-1|+5)\leqslant|t-1|\cdot 6<(1/600)\cdot 6=\frac{1}{100}$ 即 $\boldsymbol{x}$ 在 $S_{1/100}(\boldsymbol{a})$ 中，这就是所要的结果。

3. 极限和连续

2.14 计算 $\lim\limits_{t\to 2}[(3t^2+1)\boldsymbol{e}_1-t^3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3]$.

解：$\lim\limits_{t\to 2}[(3t^2+1)\boldsymbol{e}_1-t^3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3]=(\lim\limits_{t\to 2}(3t^2+1))\boldsymbol{e}_1$

$-(\lim\limits_{t\to 2}t^3)\boldsymbol{e}_2+(\lim\limits_{t\to 2}1)\boldsymbol{e}_3=13\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3.$

2.15 设 $\boldsymbol{f}(t)=(\sin t)\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{g}(t)=(t^2+1)\boldsymbol{e}_1+e^t\boldsymbol{e}_2$，

求 (a) $\lim\limits_{t\to 0}(\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t))$，(b) $\lim\limits_{t\to 0}(\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t))$。

解：(a) $\lim\limits_{t\to 0}(\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t))=\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{f}(t)\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{g}(t)$

$=\lim\limits_{t\to 0}((\sin t)\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_3)\cdot\lim\limits_{t\to 0}((t^2+1)\boldsymbol{e}_1+e^t\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{0}\cdot(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{0}.$

(b) $\lim\limits_{t\to 0}(\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t))=\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{f}(t)\times\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{g}(t)$

$$=\lim_{t\to0}((\sin t)\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_3)\times\lim_{t\to0}[(t^2+1)\boldsymbol{e}_1+e^t\boldsymbol{e}_2]=\boldsymbol{0}\times(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{0}.$$

2.16 在 $t=0$ 定义函数 $\boldsymbol{f}(x)=\frac{\sin t}{t}\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2$，使 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 $t=0$ 是连续的.

解：$\lim_{t\to0}\boldsymbol{f}(t)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{x}\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2\right)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$这样若定义 $\boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，则

$$\lim_{t\to0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(0).$$

$\boldsymbol{f}(t)$ 在 $t=0$ 是连续的.

2.17 证明：若 $\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)$ 和 $\boldsymbol{h}(t)$ 在 t_0 是连续的，则 $[\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)\boldsymbol{h}(t)]$ 在 t_0 是连续的.

证：由所设 $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)$，$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{g}(t_0)$，

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{h}(t_0),$$

从例 2.15 得到 $\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)\boldsymbol{h}(t)]=[\boldsymbol{f}(t_0)\boldsymbol{g}(t_0)\boldsymbol{h}(t_0)]$，因此 $[\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)\boldsymbol{h}(t)]$ 在 t_0 连续.

2.18 用极限的定义证明 $\lim_{t\to1}(t^2\boldsymbol{e}_1+(t+1)\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$

证：设 $\boldsymbol{f}(t)=t^2\boldsymbol{e}_1+(t+1)\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，考虑

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|&=|(t^2-1)\boldsymbol{e}_1+(t-1)\boldsymbol{e}_2|\leqslant|t^2-1||\boldsymbol{e}_1|+|t-1||\boldsymbol{e}_2|\\&\leqslant|t-1||t+1|+|t-1|\\&\leqslant|t-1|(|t-1|+2+1)=|t-1|(|t-1|+3),\end{aligned}$$

如果我们取 $|t-1|<1$，则当 $|t-1|<\frac{\varepsilon}{4}$ 时，可得

$$|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|\leqslant|t-1|4<\varepsilon.$$

这样，任给一个 $\varepsilon>0$，可以找到一个 $\delta=\min\left(1,\ \frac{\varepsilon}{4}\right)$，则如果 $|t-1|<\delta$，即 t 在 $S_\delta(1)$ 中，就有 $|t-1|<1$ 和 $|t-1|<\frac{\varepsilon}{4}$，对这些 t，$|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|\leqslant|t-1|(|t-1|+3)<|t-1|4<\varepsilon$，即 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 $S_\delta(\boldsymbol{L})$ 中，这就是所要的结果.

2.19 若 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 有界，且当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{0}$，证明当 $t\to t_0$ 时 $\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{0}$.

证：设任意 $\varepsilon>0$，因为 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 是有界的，故存在 $M>0$ 和 $\delta_1>0$，使得对所有 $0<|t-t_0|<\delta$，$|\boldsymbol{f}(t)|\leqslant M$. 又因为当 $t\to t_0$ 时 $\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{0}$，故存在 $\delta_2>0$ 使得对 $0<|t-t_0|<\delta_2$，$|\boldsymbol{g}(t)|<\varepsilon/M$. 选取 $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$，则对 $0<|t-t_0|<\delta$，就有 $0<|t-t_0|<\delta_1$ 和 $0<|t-t_0|<\delta_2$，因此

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)-\boldsymbol{0}|&=|\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)|=|\boldsymbol{f}(t)||\boldsymbol{g}(t)|\sin\angle(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})|\\&\leqslant|\boldsymbol{f}(t)||\boldsymbol{g}(t)|<M(\varepsilon/M)=\varepsilon.\end{aligned}$$

这样，当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{0}$.

2.20 若当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{M}$，证明当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{M}$.

证：设任意 $\varepsilon>0$，因为当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{M}$，故存在 $\delta_1>0$ 使得当 $0<|t-t_0|<\delta_1$，$|\boldsymbol{g}(t)-\boldsymbol{M}<\varepsilon/(2|\boldsymbol{L}|)$，又 $\boldsymbol{g}(t)$ 在 t_0 有界，故存在 $\delta_2>0$ 和 $K>0$ 使得当 $0<|t-t_0|<\delta_2$ 时，$|\boldsymbol{g}(t)|\leqslant K$. 最后，因为当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$，故存在 $\delta_3>0$ 使得当 $0<|t-t_0|<\delta_3$ 时，$|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{L}|<\varepsilon/2K$. 这样，如果 $0<|t-t_0|<\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$ 就有 $0<|t-t_0|<\delta_1$，$0<|t-t_0|<\delta_2$，$0<|t-t_0|<\delta_3$，所以

$$|(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})-(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{M})|\leqslant|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{L}||\boldsymbol{g}|+|\boldsymbol{L}|\cdot|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{M}|$$
$$\leqslant(\varepsilon/2K)(K)+|L|(\varepsilon/2|\boldsymbol{L}|)=\varepsilon.$$

4. 微 分

2.21 设 $\boldsymbol{u}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3$, a, $b\neq0$,

求 (a) $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}$; (b) $\left|\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right|$; (c) $\dfrac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}$; (d) $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}\right|$.

解 (a) $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\dfrac{d}{dt}a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+\dfrac{d}{dt}a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+\dfrac{d}{dt}(bt)\boldsymbol{e}_3$

$$=-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3.$$

(b) $\left|\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right|=(a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2)^{1/2}=(a^2+b^2)^{1/2}$.

(c) $\dfrac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)=\dfrac{d}{dt}\Big(-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+\dfrac{d}{dt}a(\cos t)\boldsymbol{e}_2$

$$+\frac{d}{dt}b\boldsymbol{e}_3=-a(\cos t)\boldsymbol{e}_1-a(\sin t)\boldsymbol{e}_2.$$

(d) $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}\right|=(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^{1/2}=|a|$.

2.22 求曲线 $\boldsymbol{X}=t\boldsymbol{e}_1+t^2\boldsymbol{e}_2+t^3\boldsymbol{e}_3$ 在 $t=1$ 的切线方程.

解: 曲线在点 $\boldsymbol{X}$ 的切向量是 $\dfrac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{e}_1+2t\boldsymbol{e}_2+3t^2\boldsymbol{e}_3$, 若用 $\boldsymbol{Y}$ 表示切线上的点, 则切线方程是

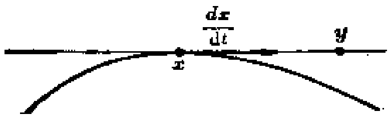


图 2-15

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})=k\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\text{ 即 }\boldsymbol{Y}=k\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}+\boldsymbol{X},\ -\infty<k<\infty,$$ 见图 2-15.

在 $t=1$, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ 且 $\dfrac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$, 因此在 $t=1$ 的切线方程是

$$\boldsymbol{Y}=k(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),\ -\infty<k<\infty,$$

即
$$\boldsymbol{Y}=(k+1)\boldsymbol{e}_1+(2k+1)\boldsymbol{e}_2+(3k+1)\boldsymbol{e}_3,\ -\infty<k<\infty.$$

2.23 若 $\boldsymbol{u}=(3t^2+1)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}=(\cos t)\boldsymbol{e}_1+e^t\boldsymbol{e}_3$,

求 (a) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$, (b) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$, (c) $\dfrac{d}{dt}|\boldsymbol{u}|$.

解: (a) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}$

$$=((3t^2+1)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2)\cdot(-(\sin t)\boldsymbol{e}_1+e^t\boldsymbol{e}_3)$$
$$+(6t\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2)\cdot((\cos t)\boldsymbol{e}_1+e^t\boldsymbol{e}_3)$$
$$=-(3t^2+1)\sin t+6t\cos t.$$

(b) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}$

$$=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & 3t^2+1 & -\sin t\\ \boldsymbol{e}_2 & \sin t & 0\\ \boldsymbol{e}_3 & 0 & e^t\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & 6t & \cos t\\ \boldsymbol{e}_2 & \cos t & 0\\ \boldsymbol{e}_3 & 0 & e^t\end{pmatrix}$$

$$=(\sin t)e^t\boldsymbol{e}_1-(3t^2+1)e^t\boldsymbol{e}_2+(\sin^2 t)\boldsymbol{e}_3+(\cos t)e^t\boldsymbol{e}_1-6te^t\boldsymbol{e}_2-(\cos^2 t)\boldsymbol{e}_3$$
$$=(\sin t+\cos t)e^t\boldsymbol{e}_1-(3t^2+6t+1)e^t\boldsymbol{e}_2+(\sin^2 t-\cos^2 t)\boldsymbol{e}_3.$$

另一方法:

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & 3t^2+1 & \cos t\\ \boldsymbol{e}_2 & \sin t & 0\\ \boldsymbol{e}_3 & 0 & e^t\end{pmatrix}=(\sin t)e^t\boldsymbol{e}_1-(3t^2+1)e^t\boldsymbol{e}_2-(\sin\cos t)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=[(\sin t)e^t+\cos t)e^t)\boldsymbol{e}_1-[(3t^2+1)e^t+6te^t)\boldsymbol{e}_2-[-\sin^2 t+\cos^2 t]\boldsymbol{e}_3$$
$$=(\sin t+\cos t)e^t\boldsymbol{e}_1-(3t^2+6t+1)e^t\boldsymbol{e}_2+(\sin t-\cos^2 t)\boldsymbol{e}_3.$$

(c) $$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}|=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{1/2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{-1/2}2\left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|u|}\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$
$$=[(3t^2+1)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2]/[(3t^2+1)^2+\sin^2 t]^{1/2}\cdot(6t\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2)$$
$$=(18t^3+6t+\sin t\cos t)/[(3t^2+1)^2+\sin^2 t]^{1/2}.$$

2.24 设 $\boldsymbol{u}=(\sin t)\boldsymbol{e}_1+2t^2\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3(t>0)$, $t=\log\theta$, 求 $\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}$, 作为 (a) θ 的函数; (b) t 的函数.

解:

(a) $\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}=((\cos t)\boldsymbol{e}_1+4t\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\left(\frac{1}{\theta}\right)$ 以 $t=\log\theta$ 代入得:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}=(1/\theta)((\cos\log\theta)\boldsymbol{e}_1+4(\log\theta)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

另一方法:

以 $t=\log\theta$ 代入, $\boldsymbol{u}=(\sin\log\theta)\boldsymbol{e}_1+2(\log^2\theta)\boldsymbol{e}_2+(\log\theta)\boldsymbol{e}_3$, 因此

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=(\cos\log\theta)(1/\theta)\boldsymbol{e}_1+4(\log\theta)(1/\theta)\boldsymbol{e}_2+(1/\theta)\boldsymbol{e}_3$$
$$=(1/\theta)((\cos\log\theta)\boldsymbol{e}_1+4(\log\theta)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

(b) $\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}=((\cos t)\boldsymbol{e}_1+4t\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)(1/\theta)=e^{-t}((\cos t)\boldsymbol{e}_1+4t\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$.

另一方法:

因为 $\theta=e^t$, $\frac{d\theta}{dt}=e^t$, 因此

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\Big/\frac{d\theta}{dt}=e^{-t}((\cos t)\boldsymbol{e}_1+4t\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

2.25 用导数的定义证明

(a) 若 $\boldsymbol{f}(t)=a=$常向量, 则 $\boldsymbol{f}'(t)=\boldsymbol{0}$;

(b) 若 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{a}h(t)$, $\boldsymbol{a}=$常向量, 则 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{a}h'(t)$.

证: (a) $\boldsymbol{f}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

(b) $\boldsymbol{f}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}h(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}h(t)}{\Delta t}$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{a}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{a}h'(t).$$

2.26 证明定理 2.6. 如果 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 可微, 则 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 连续.

证: 我们考虑

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(t_0)]=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{t-t_0}(t-t_0)$$

$$=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{t-t_0}\lim_{t\to t_0}(t-t_0)=[\boldsymbol{f}'(t_0)]\cdot 0=\boldsymbol{0},$$

因而 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 连续.

2.27 若 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 是 t 的可微函数, 证明

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

证: 令 $\boldsymbol{W}(t)=\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t)$, 则

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{W}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{W}(t+\Delta t)-\boldsymbol{W}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)+\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

2.28 若 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是 t 的可微函数. 证明

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}.$$

证: 设 $\boldsymbol{W}(t)=\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)$, 则

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{W}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{W}(t+\Delta t)-\boldsymbol{W}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times(\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t))}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\times\lim_{\Delta t\to\infty}\boldsymbol{v}(t)$$

$$=\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}.$$

因为 $\boldsymbol{u}(t)$ 可微, 故 $\boldsymbol{u}(t)$ 连续, 则 $\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{u}(t+\Delta t)=\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ 不依赖于 Δt. 因之

$$\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}(t).$$

另一方法是利用基底求出 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 并微分分量.

2.29 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为常向量. 证明 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\cos kt+\boldsymbol{b}\sin kt$ 是方程 $\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}=-k^2\boldsymbol{u}$ 的解.

证: $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{a}\frac{d}{dt}\cos kt+\boldsymbol{b}\frac{d}{dt}\sin kt=-\boldsymbol{a}k\sin kt+\boldsymbol{b}k\cos kt$,

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}=-\boldsymbol{a}k^2\cos kt-\boldsymbol{b}k^2\sin kt=-k^2(\boldsymbol{a}\cos kt+\boldsymbol{b}\sin kt)=-k^2\boldsymbol{u}.$$

2.30 证明 $\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=|\boldsymbol{u}|\frac{d|\boldsymbol{u}|}{dt}$.

证：$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})=\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}|^2$,

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=2|\boldsymbol{u}|\frac{d|\boldsymbol{u}|}{dt},$$

即
$$\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=|\boldsymbol{u}|\frac{d|\boldsymbol{u}|}{dt}.$$

2.31 若 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 可微，证明

$$\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{f}(t_0)+\boldsymbol{f}'(t_0)\Delta t+\boldsymbol{R}(t_0,\ \Delta t),$$

其中当 $\Delta t\to 0$ 时，$(\boldsymbol{R}(t_0,\ \Delta t)/\Delta t)\to\boldsymbol{0}$.

证：定义 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)-\boldsymbol{f}'(t_0)\Delta t$，则

$$\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{R}/\Delta t=\lim_{\Delta t\to 0}[\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)-\boldsymbol{f}'(t_0)\Delta t]/\Delta t$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}-\boldsymbol{f}'(t_0)\right]=\boldsymbol{f}'(t_0)-\boldsymbol{f}'(t_0)=\boldsymbol{0},$$

这就是所要的结果.

2.32 证明问题 2.31 的逆命题. 即是：如果存在 Δt 的线性函数 $\boldsymbol{a}\Delta t$，使得 $\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{f}(t_0)+\boldsymbol{a}\Delta t+\boldsymbol{R}$，其中 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{R}/\Delta t=0$，则 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 是可微的，并且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}'(t_0)$.

证：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}\Delta t+\boldsymbol{R}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{a}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{R}/\Delta t=\boldsymbol{a}$.

因之 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 可微并且 $\boldsymbol{f}'(t_0)=\boldsymbol{a}$.

5. 泰勒公式和解析函数

2.33 证明 $(\sin t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+1)\boldsymbol{e}_2$

$$=\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{4}(\pi^2+4)\boldsymbol{e}_2+\pi\boldsymbol{e}_2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}(-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2$$
$$+\boldsymbol{o}\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\right].$$

证：求 $\boldsymbol{f}(t)=(\sin t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+1)\boldsymbol{e}_2$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 附近 Taylor 展式的前三项，即

$$\boldsymbol{f}(t)=(\sin t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+1)\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{4}(\pi^2+4)\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{f}'(t)=\cos t\boldsymbol{e}_1+2t\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{f}''(t)=-\sin t\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{f}''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,$$

于是
$$(\sin t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+1)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{4}(\pi^2+4)\boldsymbol{e}_2+\pi\boldsymbol{e}_2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2+\boldsymbol{R},$$

其中
$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{R}\Big/\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2=\boldsymbol{0}.$$

2.34 证明：在 $t=0$ (a) $t\boldsymbol{o}(t^2)=\boldsymbol{o}(t^3)$；(b) $\boldsymbol{o}(t^2)+\boldsymbol{o}(t^3)=\boldsymbol{o}(t^2)$；(c) $\boldsymbol{o}(t^2)\cdot\boldsymbol{o}(t^3)=o(t^5)$。

证：(a) $\lim\limits_{t\to0} t\boldsymbol{o}(t^2)/t^3=\lim\limits_{t\to0}(t/t)(\boldsymbol{o}(t^2)/t^2)=\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{o}(t^2)/t^2=\mathbf{0}$.

(b) $\lim\limits_{t\to0}(\boldsymbol{o}(t^2)+\boldsymbol{o}(t^3))/t^2=\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{o}(t^2)/t^2+\lim\limits_{t\to0}t(\boldsymbol{o}(t^3)/t^3)=\mathbf{0}$.

(c) $\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{o}(t^2)\cdot\boldsymbol{o}(t^3)/t^5=\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{o}(t^2)/t^2\lim\limits_{t\to0}\boldsymbol{o}(t^3)/t^3=0$.

2.35 如果 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 I 上是 C^m 类，证明

$$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)+\frac{\boldsymbol{f}'(t)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{\boldsymbol{f}^{(m-1)}(t_0)}{(m-1)}!(t-t_0)^{m-1}+\boldsymbol{O}[(t-t_0)^m].$$

证：用 Taylor 定理

$$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)+\frac{\boldsymbol{f}'(t_0)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{\boldsymbol{f}^{(m-1)}(t_0)}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1}$$
$$+\frac{\boldsymbol{f}^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+\boldsymbol{o}[(t-t_0)^m].$$

所以还要证明

$$\frac{\boldsymbol{f}^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+\boldsymbol{o}[(t-t_0)^m]=\boldsymbol{O}[(t-t_0)^m].$$

但
$$\lim_{t\to t_0}\left\{\left[\frac{\boldsymbol{f}^{(m)}(t_0)}{m}(t-t_0)^m+\boldsymbol{o}[(t-t_0)^m]\right/(t-t_0)^m\right\}$$
$$=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{f}^{(m)}(t_0)}{m!}+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{o}[(t-t_0)^m]/(t-t_0)^m=\frac{\boldsymbol{f}^{(m)}(t_0)}{m!},$$

因之 $\left[\frac{\boldsymbol{f}^m(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+\boldsymbol{o}[(t-t_0)^m]/(t-t_0)^m\right]$ 是有界的，这就是所要的结果。

2.36 如果在 t_0, $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{o}(g(t))$，证明在 t_0，$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{O}(g(t))$。

证：因为 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{o}(g(t))$，当 $t\to t_0$ 时，$\boldsymbol{f}(t)/g(t)\to\mathbf{0}$；因此由定理 2.2 知，$\boldsymbol{f}(t)/g(t)$ 在 t_0 有界，于是 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{O}(g(t))$ 在 t_0。

2.37 如果在 t_0, $\boldsymbol{f}_1(t)=\boldsymbol{o}(g_1(t))$, $\boldsymbol{f}_2(t)=\boldsymbol{O}(g_2(t))$，证明在 t_0, $\boldsymbol{f}_1(t)\times\boldsymbol{f}_2(t)=\boldsymbol{o}(g_1(t)g_2(t))$，或说 $\boldsymbol{o}(g_1(t))\times\boldsymbol{O}(g_2(t))=\boldsymbol{o}(g_1(t)g_2(t))$。

证：因为 $\boldsymbol{f}_1(t)/g_1(t)\to\mathbf{0}$, $\boldsymbol{f}_2(t)/g_2(t)$ 在 $t=t_0$ 有界，从问题 2.19 推得

$$\frac{\boldsymbol{f}_1(t)\times\boldsymbol{f}_2(t)}{g_1(t)g_2(t)}=\frac{\boldsymbol{f}_1(t)}{g_1(t)}\times\frac{\boldsymbol{f}_2(t)}{g_2(t)}\to\mathbf{0},$$

因此 $\boldsymbol{f}_1(t)\times\boldsymbol{f}_2(t)=\boldsymbol{o}(g_1(t)g_2(t))$。

2.38 若在某一 $S_\delta(t_0)$ 中 $|g_1(t)|\leqslant|g_2(t)|$，证明在 t_0

$$\boldsymbol{o}(g_1(t))+\boldsymbol{o}(g_2(t))=\boldsymbol{o}(g_2(t)).$$

证：考虑

$$\left|\frac{\boldsymbol{o}(g_1(t)+\boldsymbol{o}(g_2(t))}{g_2(t)}\right|\leqslant\left|\frac{\boldsymbol{o}(g_1(t))}{g_2(t)}\right|+\left|\frac{\boldsymbol{o}(g_2(t))}{g_2(t)}\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{\boldsymbol{o}(g_1(t))}{g_1(t)}\right|+\left|\frac{\boldsymbol{o}(g_2(t))}{g_2(t)}\right|,$$

其中由 $|g_1(t)|\leqslant|g_2(t)|$ 得到

$$\left|\frac{\boldsymbol{o}(g_1(t))}{g_2(t)}\right|\leqslant\left|\frac{\boldsymbol{o}(g_1(t))}{g_1(t)}\right|,$$

因此 $o(g_1(t))/g_1(t)\to 0$, $o[g_2(x))/g_2(t)\to 0$, 对 t_0 的充分小的邻域 $\left|\dfrac{o(g_1(t))}{g_1(t)}\right|<\varepsilon/2$, $\left|\dfrac{o(g_2(t))}{g_2(t)}\right|<\varepsilon/2$ 对任意的 $\varepsilon>0$ 成立.

因此
$$\left|\frac{o(g_1(t))+o(g_2(t))}{g_2(t)}\right|<\varepsilon,$$

所以
$$\left|\frac{o(g_1(t))+o(g_2(t))}{g_2(t)}\right|\to 0 \text{ 或 } o(g_1(t))+o(g_2(t))=o(g_2(t)).$$

§2.3 补 充 题

2.39 求通过 $A(1, 0, -1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(-1, -1, 0)$的平面方程. 答案: $2x_1-3x_2+x_3=1$.

2.40 求通过 $A(1, -1, 0)$垂直于直线 $x_1=-k+1$, $x_2=k+1$, $x_3=3$ 的平面方程. 答案: $x_1-x_2=2$.

2.41 求两平面 $3x_1-2x_2+x_3=5$, $2x_1+3x_2-x_3=-1$ 的交线方程. 答案: $x_1=k+1$, $x_2=5k-1$, $x_3=13k(-\infty<k<\infty)$.

2.42 证明通过 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于平面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=d$, $|\boldsymbol{n}|\neq 0$ 的直线方程是 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{n}+\boldsymbol{a}$, $-\infty<k<\infty$.

2.43 证明通过 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0})$的直线方程是 $\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{a}$.

2.44 锥面的顶点在 $A(0, 1, 1)$, 锥面的轴平行于 x_1 轴, 锥面的半角为 $\theta=60°$, 求锥面的方程. 答案: $3x_1^2-(x_2-1)^2-(x_3-1)^2=0$.

2.45 对在 $-4\leqslant t\leqslant 4$ 的整数 t 计算向量 $\boldsymbol{x}=(t^3+1)\boldsymbol{e}_1+(1-t^2)\boldsymbol{e}_2$, 并画出草图.

2.46 设 $\boldsymbol{f}(t)=(t^2+1)\boldsymbol{e}_1+t^3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{g}(t)=(\sin t)\boldsymbol{e}_1-(\cos t)\boldsymbol{e}_2$,

求 (a) $\boldsymbol{f}(a+b)$, (b) $\boldsymbol{g}(t+\Delta t)$, (c) $\boldsymbol{f}(\sin t)\times\boldsymbol{g}(t^2+1)$. 答案:

(a) $(a^2+2ab+b^2+1)\boldsymbol{e}_1+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\boldsymbol{e}_3$;

(b) $\sin(t+\Delta t)\boldsymbol{e}_1-\cos(t+\Delta t)\boldsymbol{e}_2$;

(c) $(\cos(t^2+1)\sin^3 t)\boldsymbol{e}_1+(\sin(t^2+1)\sin^3 t)\boldsymbol{e}_2-(\cos(t^2+1)(1+\sin^2 t))\boldsymbol{e}_3$.

2.47 如果 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, 证明 $\boldsymbol{b}$ 在 $S_4(\boldsymbol{a})$中, 并且找 $\delta>0$ 使得 $S_\delta(\boldsymbol{b})\subset S_4(\boldsymbol{a})$.

2.48 求 $\lim\limits_{t\to-1}[(t^2+1)\boldsymbol{e}_1+e^t\boldsymbol{e}_2+[(t^2-1)/(t+1)]\boldsymbol{e}_3$ 的值. 答案: $2\boldsymbol{e}_1+(1/e)\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$.

2.49 确定使函数 $\boldsymbol{f}(t)\doteq[(t^2+1)/(t^2-1)]\boldsymbol{e}_1+(\tan t)\boldsymbol{e}_2$ 不连续的 t 值. 答案: $t=1$, -1, $\dfrac{\pi}{2}\pm n\pi$, $n=0, 1, 2, \cdots$.

2.50 设 $\boldsymbol{f}(t)=(t^2-1)\boldsymbol{e}_2+(\cos t)\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{g}(t)=(\sin t)\boldsymbol{e}_1+e^t\boldsymbol{e}_2$, 求 (a) $\lim\limits_{t\to 0}(\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t))$, (b) $\lim\limits_{t\to 0}(\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t))$. 答案: (a) -1, (b) $-\boldsymbol{e}_1$.

2.51 如果 $\boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{g}(t)$, $\boldsymbol{h}(t)$在 I 上连续, 证明 $\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)\times\boldsymbol{h}(t)$在 I 上连续.

2.52 若 $\boldsymbol{u}=(t^2+1)\boldsymbol{e}_1-te^t\boldsymbol{e}_2+(\log t)\boldsymbol{e}_3$, $t>0$, 求 (a) $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}$, (b) $\dfrac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}$. 答案: (a) $2t\boldsymbol{e}_1-(t+1)e^t\boldsymbol{e}_2+(1/t)\boldsymbol{e}_3$. (b) $2\boldsymbol{e}_1-(t+2)e^t\boldsymbol{e}_2-(1/t^2)\boldsymbol{e}_3$.

2.53 求曲线 $\boldsymbol{X}=(t^2-2)\boldsymbol{e}_1+(t+3)\boldsymbol{e}_2+(t^4+4t+1)\boldsymbol{e}_3$ 在 $t=1$ 的切线方程. 答案: $\boldsymbol{x}=(2k-1)\boldsymbol{e}_1+(k+4)\boldsymbol{e}_2+(8k+6)\boldsymbol{e}_3,\ -\infty<k<\infty$.

2.54 若 $\boldsymbol{u}=(2+t)\boldsymbol{e}_2+(\log t)\boldsymbol{e}_3$, $V=(\sin t)\boldsymbol{e}_1-(\cos t)\boldsymbol{e}_2$, $t>0$, 求 (a) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$; (b) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$. 答案: (a) $(2+t)\sin t-\cos t$.

(b) $\left[(1/t)\cos t-\log t\sin t\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\left(\frac{1}{t}\right)\sin t+\log t\cos t\right]\boldsymbol{e}_2-[(2+t)\cos t+\sin t]\boldsymbol{e}_3$.

2.55 设 $\boldsymbol{u}=e^t\boldsymbol{e}_1+2(\sin t)\boldsymbol{e}_2+(t^2+1)\boldsymbol{e}_3$, $t=\theta^2+2$, $t\geqslant 2$.

求 $\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}$ 和 $\frac{d^2\boldsymbol{u}}{d\theta^2}$, 作为 t 的函数表示.

答案: $\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}=2(t-2)^{1/2}(e^t\boldsymbol{e}_1+2(\cos t)\boldsymbol{e}_2+2t\boldsymbol{e}_3)$.

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}}{d\theta^2}=(4t-6)e^t\boldsymbol{e}_1+[4\cos t-(8t-16)\sin t]\boldsymbol{e}_2+(12t-16)\boldsymbol{e}_3.$$

2.56 证明 $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{u}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{v}}{dt^2}-\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}\cdot\boldsymbol{v}$.

2.57 求 $\boldsymbol{f}(t)=(\cos t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+2t+1)\boldsymbol{e}_2$ 在 $t=0$ 附近的 Taylor 展式的前三项. 答案: $(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+2\boldsymbol{e}_2t-\boldsymbol{e}_1t^2/2+t^2\boldsymbol{e}_2$.

2.58 用导数(Δ 过程)的定义证明

$$\frac{d}{dt}[(t^2+1)\boldsymbol{e}_1+(1/(t+1)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3]=2t\boldsymbol{e}_1-(1/(t+1)^2)\boldsymbol{e}_2.$$

2.59 若 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是 t 的可微函数, 证明

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}.$$

2.60 求所有 $\boldsymbol{u}$, 它使 $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=(3t^2+1)\boldsymbol{e}_1+t^3\boldsymbol{e}_2-(\sin t)\boldsymbol{e}_3$

答案: $\boldsymbol{u}=(t^3+t+c_1)\boldsymbol{e}_1+(t^4/4+c_2)\boldsymbol{e}_2+(\cos t+c_3)\boldsymbol{e}_3$.

2.61 求所有 $\boldsymbol{u}$, 它使 $\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是常向量.

答案: $\boldsymbol{u}=\frac{1}{12}\boldsymbol{a}t^4+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}t^3+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}t^2+\boldsymbol{c}_1t+\boldsymbol{c}_2$.

2.62 证明 $\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{0}$ 的必要充分条件是 $\boldsymbol{u}$ 有固定方向.

2.63 证明在 $t=0$, $(\tan^2 t)\boldsymbol{e}_1+(2t^3+t^4)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{O}(t^2)$.

2.64 设 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 $t=t_0$ 是解析的且 $\boldsymbol{f}'(t_0)=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}''(t_0)=\boldsymbol{0}$, $\cdots$, $\boldsymbol{f}^{(n)}(t_0)=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}^{(n+1)}(t_0)\neq\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{f}^{(n+1)}(t_0)$ 表示曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)$ 在 $\boldsymbol{f}(t_0)$ 的切向量.

2.65 若 $f(t)=\begin{cases}e^{-(1/t)^2}, & 当\ t\neq 0\ 时,\\ 0, & 当\ t=0\ 时,\end{cases}$ 证明对所有 n, $f^{(n)}(0)=0$.

2.66 证明对所有 $t\in S_{1/100}(2)$ 向量 $\boldsymbol{x}=(t^2+1)\boldsymbol{e}_1+(t+1)\boldsymbol{e}_2-t\boldsymbol{e}_3$ 落在 $S_{1/10}(5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3)$ 内.

2.67 若 $\lim\limits_{t\to t_0}[f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3]=L_1\boldsymbol{e}_1+L_2\boldsymbol{e}_2+L_3\boldsymbol{e}_3$, 证明 $\lim\limits_{t\to t_0}f_i(t)=L_i$, $i=1, 2, 3$.

2.68 若当 $t\to t_0$ 时, $\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{M}$, 证明当 $t\to t_0$ 时, $\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)\to\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}$.

2.69 证明$[\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{o}(t^3)]\cdot[\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{o}(t^2)]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}t^3+o(t^4)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$是常向量.

2.70 证明 $g(t)=O(g(t))$.

2.71 证明 $\boldsymbol{o}(g_1(t))\cdot\boldsymbol{O}(g_2(t))=o(g_1(t)g_2(t))$.

2.72 证明 $\boldsymbol{O}(g_1(t))\times\boldsymbol{O}(g_2(t))=\boldsymbol{O}(g_1(t)g_2(t))$.

2.73 若当 $t\to t_0$ 时 $\boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{f}(t_0)$ 和当 $\theta\to\theta_0$ 时，$h(\theta)\to t_0$，证明当 $\theta\to\theta_0$ 时，$\boldsymbol{f}(h(\theta))\to\boldsymbol{f}(t_0)$.

2.74 证明链法则：若 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t)$，$t=h(\theta)$ 分别是 t, θ 的可微函数，则

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\theta}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}.$$

第三章 曲线概念

§3.1 基本内容

1. 正则表示

向量函数

$$X=X(t),\ t\in I \tag{3.1}$$

若具有下列两个性质：

(i) $X(t)$是 I 中的 C^1类函数；

(ii) 对 I 中所有 t, $X'(t)\neq 0$.

则称为*正则参数表示*，变量 t 称为表示的*参数*.

若在 E^3 中取定一个基，则方程 $X=X(t)$等价于三个数量方程：

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ x_3=x_3(t),\ t\in I, \tag{3.2}$$

它们是 $X=X(t)$关于这个基的分量. 显然，$X=X(t)$是正则参数表示当且仅当每个 $x_i(t)$是 I 中 C^1 类函数，且对 I 中每个 t 至少有一 $x_i'(t)\neq 0$.

例 3.1 函数 $X=(t+1)e_1+(t^2+3)e_2$, $-\infty<t<+\infty$，是正则参数表示，因为对于所有 t, $X'=e_1+2te_2$ 连续且 $X'\neq 0$. 这函数的图象是图 3-1 所示的抛物线.

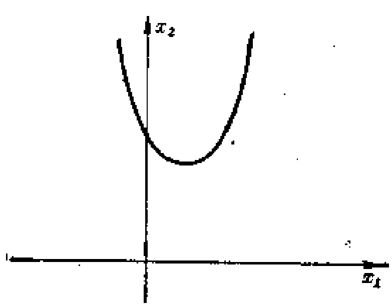


图 3-1

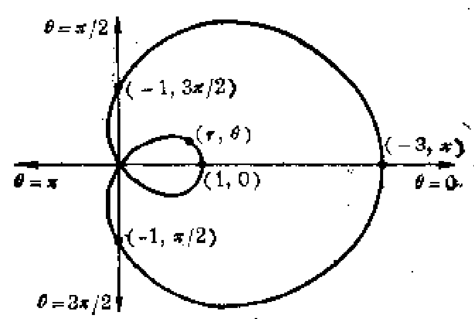


图 3-2

例 3.2 极坐标方程 $r=2\cos\theta-1(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 的图像如图 3-2 所示. 方程

$$x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta$$

表示极坐标和直角坐标的关系. 替换 r，我们得到表示

$$x_1=(\cos\theta)(2\cos\theta-1),\ x_2=(\sin\theta)(2\cos\theta-1),\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

或

$$X=(\cos\theta)(2\cos\theta-1)e_1+(\sin\theta)(2\cos\theta-1)e_2,$$

这个表示是正则的，因为对于所有 θ,

$$X'=[-4\sin\theta\cos\theta+\sin\theta]e_1+[2\cos^2\theta-2\sin^2\theta-\cos\theta]e_2$$

连续，且可算得 $|X'|=\sqrt{5-4\cos\theta}\neq 0$，因而 $X'\neq 0$.

I 上的正则参数表示 $X=X(t)$可以有重点，即在 I 中 $t_1\neq t_2$ 时，$X(t_1)=X(t_2)$，但是，

局部地说不会有这种情形出现. 在问题 3.1 中,我们证明

定理 3.1 若 $X=X(t)$ 是 I 上的正则参数表示,则对 I 中每个 t_0, 存在 t_0 的一个邻域,使得在其中 $X(t)$ 是一一的.

例 3.3 函数 $X=a(\cos\theta)e_1+a(\sin\theta)e_2, a\neq 0(-\infty<\theta<+\infty)$, 是以原点为中心, $|a|$ 为半径的圆的正则表示, 因为 $dX/d\theta=-a(\sin\theta)e_1+a(\cos\theta)e_2$ 对所有 θ 连续, 且

$$|dX/d\theta|=|-a(\sin\theta)e_1+a(\cos\theta)e_2|=|a|\neq 0.$$

注意, 这个表示的每一个点都是重点, 因为对于任意 θ_0, 有

$$a\cos(\theta_0+2\pi)e_1+a\sin(\theta_0+2\pi)e_2=a(\cos\theta_0)e_1+a(\sin\theta_0)e_2.$$

但是, 若限制它在区间 $\theta_0-\frac{1}{2}\pi<\theta<\theta_0+\frac{1}{2}\pi$ 上, 这函数 $X=a(\cos\theta)e_1+a(\sin\theta)e_2$ 就是一一的.

例 3.4 如图 3-3 所示, 函数

$$x_1=t^2,\ x_2=\begin{cases}0, & 当\ t\leqslant 0,\\ t^2\sin 1/t, & 当\ t>0,\end{cases}\quad -\infty<t<\infty,$$

对所有 t 有导数, 但是, 在 $t=0$,

$$dx_1/dt=dx_2/dt=0,$$

且 dx_2/dt 不连续, 故这函数不是正则表示。注意, 函数在 $t=0$ 的每一个邻域中都有重点, 因为任取 $\delta>0$, 可找到整数 $N>0$ 使得 $1/2\pi N<\delta$, 假定

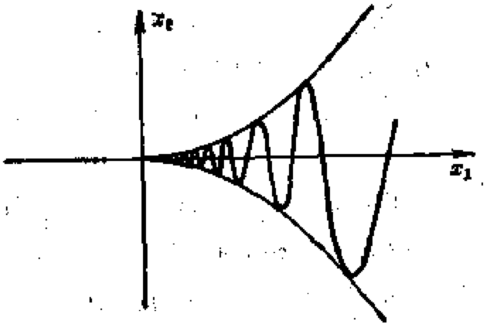


图 3-3

$$t_1=-(1/2\pi N)\quad 和\quad t_2=+(1/2\pi N).$$

显然有 $-\delta<t_1<t_2<\delta$ 且

$$x_1(t_1)=1/4\pi^2N^2=x_1(t_2)$$

和

$$x_2(t_1)=0=1/4\pi^2N^2\sin 2\pi N=x_2(t_2),$$

于是在 $-\delta<t<\delta$ 中有一个重点.

2. 正则曲线

$t=t(\theta)$ 是区间 I_θ 上的实值函数, 若

(i) $t(\theta)$ 是 I_θ 中的 C^1 类函数; (ii) 对 I_θ 中所有 θ, $dt/d\theta\neq 0$, 则称 $t=t(\theta)$ 为允(容)许参数变换.

注意, 若 $t=t(\theta)$ 是 I_θ 上的允许参数变换, 则 $dt/d\theta$ 是连续的, 且 $dt/d\theta\neq 0$, 于是在 I_θ 上或者 $dt/d\theta>0$, 这时 $t(\theta)$ 是光滑增函数, 或者 $dt/d\theta<0$, 这时 $t(\theta)$ 是光滑减函数, 可以证明(见问题 3.13).

定理 3.2 若 $t=t(\theta)$ 是 I_θ 上的允许参数变换, 则

(i) $t=t(\theta)$ 是 I_θ 到区间 $I_t=t(\theta)$ 上的一一映射,

(ii) 逆函数 $\theta=\theta(t)$ 是 I_t 上的允许参数变换.

例 3.5 (a) 函数 $t=(b-a)\theta+a$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$, $a<b$, 是允许参数变换, 它使 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 变为 $a\leqslant t\leqslant b$. 逆函数 $\theta=(t-a)/(b-a)$ 也是允许参数变换, 它使 $a\leqslant t\leqslant b$ 变为 $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

(b) 函数 $t=\tan(\pi\theta/2)$, $0\leqslant\theta<1$, 是允许参数变换, 它使 $0\leqslant\theta<1$ 变为 $0\leqslant t<\infty$. 逆函数是 $\theta=(2/\pi)\arctan t$, 它使 $0\leqslant t<\infty$ 变为 $0\leqslant\theta<1$.

正则参数表示 $X=X(t)$, $t\in I_t$, 等价于正则参数表示 $X=X(\theta)$, $\theta\in I_\theta$, 如果存在 I_θ 上的允许参数变换 $t=t(\theta)$ 使得

$$\text{(i)}\ t(I_\theta)=I_t,\quad \text{(ii)}\ X(t(\theta))=X^*(\theta).$$

在问题 3.14 中我们证明这确定了正则表示集上的一个等价关系,我们把**正则曲线定义为正则参数表示的等价类.**

注意,表示 $X=X(t)$ 唯一确定曲线 C, 这曲线 C 由通过一个允许参数变换可以变成 $X=X(t)$ 的全体表示所组成. 于是我们可以说"由 $X=X(t)$ 给定的曲线 C…". 但是, $X=X(t)$ 的性质未必是曲线的性质. 曲线的任一性质都必须是等价类中所有表示的公共性质, 或者说是"不依赖于参数"的性质.

例 3.6 在例 3.2 的表示

$$X=(\cos\theta)(2\cos\theta-1)e_1+(\sin\theta)(2\cos\theta-1)e_2,\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

中引进允许参数变换 $\theta=t+1$, $-1\leqslant t\leqslant2\pi-1$, 这就给出了等价的参数表示

$$X=[\cos(t+1)][2\cos(t+1)-1]e_1+[\sin(t+1)][2\cos(t+1)-1]e_2,$$
$$-1\leqslant t\leqslant2\pi-1,$$

当 t 在区间 $-1\leqslant t\leqslant2\pi-1$ 中递增时, 量 $\theta=t+1$ 在 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 中光滑地递增, 变换后的方程与原方程按相同指向描绘出同样的点集, 如图 3-4(a) 所示. 若我们引进允许参数变换 $\theta=-t$, $-2\pi\leqslant t\leqslant0$, 我们得到等价的表示

$$X=(\cos t)(2\cos t-1)e_1-(\sin t)(2\cos t-1)e_2,\quad -2\pi\leqslant t\leqslant0$$

这时当 t 在 $-2\pi\leqslant t\leqslant0$ 中递增时, 量 $\theta=-t$ 在区间 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 中递减, 而它的点集按相反指向(即图 3-4(b) 所示方向)描绘出来, 于是为描绘曲线所取的指向是表示的性质而不是曲线的性质. 如果我们引进参数变换

$$\theta=\theta(t)=\begin{cases}t, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\pi/3,\\ -t+2\pi, & \text{当 } \pi/3<t<5\pi/3,\\ t, & \text{当 } 5\pi/3\leqslant t\leqslant2\pi,\end{cases}$$

注意,这不是一个允许参数变换,变换后的方程

$$X=[\cos\theta(t)](2\cos\theta(t)-1)e_1+[\sin\theta(t)](2\cos\theta(t)-1)e_2,\quad 0\leqslant t\leqslant2\pi$$

将描绘出同样的点集, 它的指向如图 3-4(c) 所示, 按照定义, 这条曲线就与上面那条不同了, 因此一条曲线将不是简单地看作 E^3 中的一个点集, 而是看作为描绘出由一类等价参数表示所确定的点集的一般方法.



(a) (b) (c)

图 3-4

例 3.7 空间曲线的一个重要例子是图 3-5 所示的圆柱螺线

$$X=a(\cos t)e_1+a(\sin t)e_2+bte_3,\quad a,\ b\neq0,\quad -\infty<t<\infty,$$

或

$$x_1=a\cos t,\ x_2=a\sin t,\ x_3=bt,\ a,\ b\neq0,\ -\infty<t<\infty.$$

曲线落在半径为$|a|$的正圆柱面：$x_1=a\cos t$，$x_2=a\sin t$，$-\infty<x_3<\infty$ 上，方程 $x_3=bt$ 使曲线上的点沿 x_3 轴方向均匀地"移动"．当 t 得增加 2π 时，x_1 和 x_2 就回到它们原来的值，而 x_3 则增加$(b>0)$或减少$(b<0)2\pi|b|$，$2\pi|b|$称为螺线的螺距．

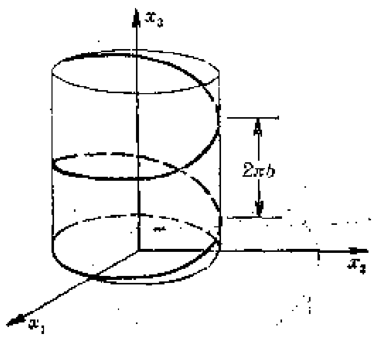


图 3-5

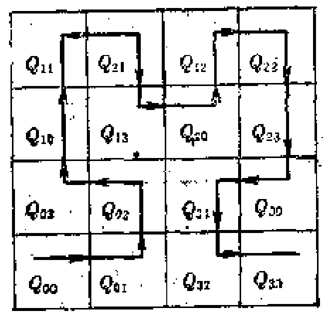


图 3-6

例 3.8 值得注意的是，可以把单位区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 连续地映射到 E^2 中的单位正方形 Q: $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $0\leqslant x_2\leqslant 1$ 上，使一条"曲线"填满一个二维区域，这样的映射称为 Peano 曲线，可依下法构造出来：我们把 Q 分为四个相等的正方形，它们连同自己的边界分别记为 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3，再把每个 Q_i 又分为四个相等的正方形 Q_{i0}, Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3}，继续这样把它们每一个分细，不断的进行下去，若对这些正方形进行编号使得我们可以按递增的下标通过它们，我们就得到一条如图 3-6 所示的自身不相交的弧，至于怎样描绘留给读者作为练习．

在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中每个 t_0 可唯一地表示为一无限小数：

$$t_0=0.a_1a_2a_3\cdots=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots.$$

这对四进小数也同样成立，即 t_0 可唯一地表示为级数

$$t_0=\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\frac{a_3}{4^3}+\cdots,$$

其中 a_i 为满足 $0\leqslant a_i\leqslant 3$ 的整数只要对尾部那些分子全是 3 的级数求和去掉尾部，就可得表示的唯一性，例如

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\cdots=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}\right).$$

现在，对于每个 $t_0=\sum\limits_i a_i/4^i$，给定 Q 中唯一的 P_0 与之对应，它是无限闭正方形套 Q_{a_1}, $Q_{a_1a_2}$, $Q_{a_1a_2a_3}$, $\cdots$ 的公共点．这个映射是到 Q 上的，因为可以证明 Q 中每一个点 P 是一个允许的区间套序列的公共点．

最后，这映射是连续的．因为若设 $S_\varepsilon(P_0)$是 P_0 的任意一个邻域，如图 3-7 所示，我们选取包含 P_0 的 $Q_{a_1a_2\cdots a_n}$，使得它以及与它相邻的同样大小的正方形都包含在 $S_\varepsilon(P_0)$中，这时下面包含 t_0 的区间

$$\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\cdots+\frac{a_n-1}{4^n}<t<\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\cdots+\frac{a_n+1}{4^n}$$

中的所有 t 都映射到 $S_\varepsilon(P_0)$内，所以映射是连续的．

这个映射不是一一的，因为正方形边界上的点不只是一个正方形套序列的公共点．事实上，可以证明没有一个连续映射可以把直线一一地映射到正方形上．

正则曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$, $t\in I$, 称为简单的, 若它没有重点, 即若 $t_1\neq t_2$, 则 $\boldsymbol{X}(t_1)\neq\boldsymbol{X}(t_2)$. 这显然是曲线的性质 而不是表示的性质.

正则曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$, $t\in I$, 称为正则弧, 若 I 是闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$. 点 $\boldsymbol{X}(a)$ 和 $\boldsymbol{X}(b)$ 称为弧的端点. I 上的曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 的一个弧段是一条弧 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(t)$, $t\in I^*$, 这里 I^* 是包含在 I 中的任意闭区间, 而 $\boldsymbol{X}^*(t)$ 是 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 I^* 上的限制.

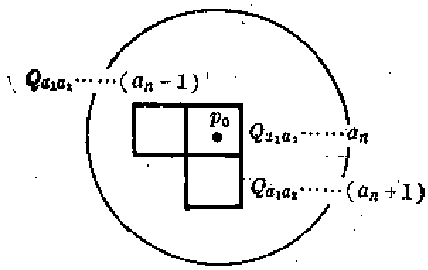


图 3-7

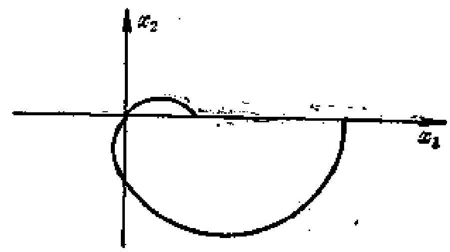


图 3-8

例 3.9 例 3.2 中的曲线是正则弧, 因为

$$\left.\begin{aligned}x_1&=(\cos\theta)(2\cos\theta-1),\\ x_2&=(\sin\theta)(2\cos\theta-1),\end{aligned}\right\}\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

是闭区间 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 上的一个正则表示. 注意, 这里曲线的端点是重合的. 曲线限制在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的部分是曲线的简单弧段, 如图 3-8 所示.

最后, 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$ 是一正则曲线的两个表示, 若 $dt/d\theta>0$, 则 t 随 θ 增加而增加, 而 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$ 描划出同向的曲线. 若 $dt/d\theta<0$, 则 t 随 θ 增加而减少, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$ 描划出反向的曲线, 正则定向曲线是已选定指向的曲线, 即正则定向曲线是一正则参数表示类, 其中任意两个表示之间可用一个有正导数的允许参数变换使一个变成另一个.

3. 正 射 影

设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 表示曲线 C, 如图 3-9 所示. 对于一固定的 t_0, 方程

$$\boldsymbol{X}=x_1(t_0)\boldsymbol{e}_1+x_2(t_0)\boldsymbol{e}_2+k\boldsymbol{e}_3,\quad -\infty<k<\infty$$

或

$$x_1=x_1(t_0),\ x_2=x_2(t_0),$$
$$x_3=k,\quad -\infty<k<\infty$$

是一垂直于 x_1x_2 平面且过点 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 的直线的方程. 由此得出直线族

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ x_3=k,\ -\infty<k<\infty \tag{3.3}$$

生成一个垂直于 x_1x_2 平面且包含曲线 C 的柱面.

柱面(3.3)与 x_1x_2 平面 $x_3=0$ 的交线是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 到 x_1x_2 平面上的正射影 Γ, 所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 的正射影为

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ x_3=0.$$

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 到 x_2x_3 和 x_1x_3 平面上的正射影分别是

$$x_1=0,\ x_2=x_2(t),\ x_3=x_3(t)$$

和

$$x_1=x_1(t),\ x_2=0,\ x_3=x_3(t).$$

例 3.10 空间曲线 $x_1=t, x_2=t^2$, $x_3=t^3$, $-\infty<t<\infty$, 到 x_1x_2 平面上的正射影是抛物

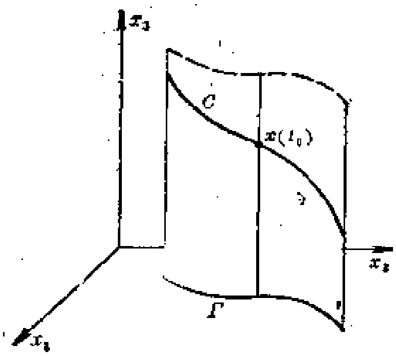


图 3-9

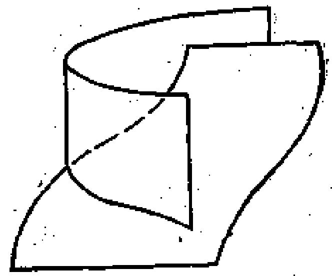


图 3-10

线 $x_1=t$, $x_2=t^2$, $x_3=0$. 到 x_1x_3 平面上的射影是三次曲线 $x_1=t$, $x_2=0$, $x_3=t^3$. 曲线本身是两个柱面

$$x_1=t,\ x_2=t^2,\ -\infty<x_3<\infty \quad 和 \quad x_1=t,\ x_3=t^3,\ -\infty<x_2<\infty$$

的交线, 如图 3-10 所示.

4. 曲线的隐式表示

空间曲线可以作为两曲面的交线, 即曲线上的点 (x_1, x_2, x_3) 要满足如下两个关系式:

$$F_1(x_1, x_2, x_3)=0 \quad 和 \quad F_2(x_1, x_2, x_3)=0. \tag{3.4}$$

若在点 (x_1, x_2, x_3) 满足上述关系式, 且

$$\det\begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 \end{pmatrix}\neq 0,$$

则从隐函数定理可推得, 对于 x_3 的某个邻域, 我们可以解(3.4), 把 x_1 和 x_2 表为 x_3 的函数, 得形如

$$x_1=x_1(x_3),\ x_2=x_2(x_3),\ x_3=x_3.$$

的表示, x_3 本身是参数, 这就定义了一个至少局部正则的曲线.

例 3.11 两个二次曲面 $x_2-x_3^2=0$ 和 $x_3x_1-x_2^2=0$ 的交线是三次曲线 $x_1=t^3$, $x_2=t^2$, $x_3=t$ 与 x_1 轴 $x_1=t$, $x_2=0$, $x_3=0$, 这可推导如下, 当 $x_3\neq 0$ 时, 可解出 x_1 和 x_2 得:

$$x_2=x_3^2,\ x_1=x_2^2/x_3=x_3^4/x_3=x_3^3$$

或令 $x_3=t$, 则

$$x_1=t^3,\ x_2=t^2,\ x_3=t.$$

当 $x_3=0$ 时, $x_2=x_3^2=0$, 而 x_1 是任意的, 这就是 x_1 轴. 注意, 点 $(0, 0, 0)$ 是这两曲线的交点.

5. C^m 类正则曲线

我们定义 I 上的正则参数表示 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 为 C^m 类 $(m\geqslant 1)$ 正则参数表示, 若 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 I 上是 C^m 类的. 类似地, I_θ 上的允许参数变换 $t=t(\theta)$ 称为 C^m 类允许参数变换, 若 $t(\theta)$ 在 I_θ 上是 C^m 类的. 最后, 若两个 C^m 类正则表示可用一 C^m 类允许参数变换使它们相等, 则它们确定同一条 C^m 类正则曲线, 于是一条 C^m 类正则曲线是 C^m 类表示类, 其中任意两个表示可用 C^m 类允许参数变换使它们相等.

虽然对所有 $j\leqslant m$, C^m 类表示 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 也是 C^j 类表示，但是，对于 $j<m$, C^m 类曲线不等于C^j类曲线，因为 C^m 类曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 仅包含用 C^m 类容许参数变换使与$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$相同的表示，而 C^j 类曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$, $j<m$, 除此之外还包含有不是用 C^m 类而是另外用 C^j 类的容许参数变换使与

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$$

相同的表示.

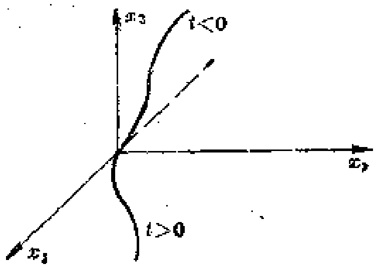


图 3-11

例 3.12 向量函数

$$\boldsymbol{W}(t)=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3,\quad -\infty<t<\infty$$

是解析的. 因此螺线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{W}(t)$可以看作为由那些与上式有解析参数变换关系的表示所确定的正则解析曲线.

例 3.13 表示

$$\boldsymbol{X}=\begin{cases} t\boldsymbol{e}_1+e^{-1/t^2}\boldsymbol{e}_3, & \text{当 } t<0,\\ 0, & \text{当 } t=0,\\ t\boldsymbol{e}_1+e^{-1/t^2}\boldsymbol{e}_2, & \text{当 } t>0\end{cases}$$

是 C^∞ 类的(见例 2.30)它和所有与它等价的 C^∞ 类的表示一起确定如图 3-11 所示的 C^∞ 类曲线. 注意，对于所有 $t<0$, 曲线落在 x_1x_3 平面上，而对于所有 $t>0$, 曲线落在 x_1x_2 平面上.

6. 弧长的定义

一段弧的长度是通过它的近似折线的长来确定的，即设弧 C(不必要求是正则的)由

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

给定，考虑区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 的一个划分

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b.$$

这就确定了 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一个点列

$$\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}(t_0),\ \boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}(t_1),\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{X}(t_n),$$

把它们按顺序连接起来构成如图 3-12 所示的近似折线弧 P, 其相邻两点$\boldsymbol{X}_{i-1}$和 $\boldsymbol{X}_i$间的线段的长是$|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_{i-1}|$. 所以 P 的长是

$$S(P)=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_{i-1}|=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{X}(t_i)-\boldsymbol{X}(t_{i-1})|.\tag{3.5}$$

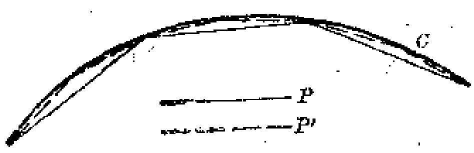


图 3-12

如图 3-12 所示，若用加点的方法可以导出一更加逼近 C 的折线 P'. 因为多边形一边的长度不大于其他各边长度的和，由此得出 P 的长小于或等于 P' 的长，即 $S(P)\leqslant S(P')$.

于是我们把弧 C 的长定义为所有可能近似折线 P 的长的上确界. 确切地说，弧$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, 称为可求长的，若所有可能的 $S(P)$ 的集合 S 是上有界的. 这时集合 S 有一个上确界，它定义为该弧的长.

实数的一个集合 S 称为上有界的，若存在一个实数 M, 对于 S 中所有 x, 使得 $x\leqslant M$, 这时数 M 称为 S 的一个上界，注意若 M 是 S 的一个上界，则使 $M\leqslant L$ 的任一 L 也是一个上界. 实数的一个基本性质说：若 S 有一上界 M, 则它有一最小上界或上确界，即是说有这

样的一个上界 S,若 L 是任一上界,则 $L\geqslant S$.

注意,弧 C 的长不依赖于参数,因为若设 I_t 上的 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 和 I_θ 上的 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$ 是 C 的两个表示,且 $t=t(\theta)$ 是一一的,对于 I_θ 的每一个划分 $\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n$,有 I_t 的唯一的一个划分 $t_0<t_1<\cdots<t_n$ 与之对应,或者由于定向的关系有 $t_n<t_{n-1}<\cdots<t_0$,这里 $t_i=t_i(\theta)$,$i=1,\cdots,n$,这就给出同样的近似折线 P,反之亦然. 于是所有近似折线的长的集合 S 是不依赖于参数的,因而 S 的上确界,即 C 的长亦不依赖于参数.

例 3.14 弧 $\boldsymbol{X}=t\boldsymbol{e}_1+t^2\boldsymbol{e}_2,0\leqslant t\leqslant 1$,是可求长的. 因为取划分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$,则近似折线长是

$$\begin{aligned}
S(P)&=\sum_{i=1}^{n}\left|(t_i\boldsymbol{e}_1+t_i^2\boldsymbol{e}_2)-(t_{i-1}\boldsymbol{e}_1+t_{i-1}^2\boldsymbol{e}_2)\right|\\
&=\sum_i\left|(t_i-t_{i-1})\boldsymbol{e}_1+(t_i^2-t_{i-1}^2)\boldsymbol{e}_2\right|\\
&\leqslant\sum_i\left[|t_i-t_{i-1}||\boldsymbol{e}_1|+|t_i^2-t_{i-1}^2||\boldsymbol{e}_2|\right]\\
&=\sum_i\left[(t_i-t_{i-1})+(t_i-t_{i-1})(t_i+t_{i-1})\right]\\
&=\sum_i(t_i-t_{i-1})(1+t_i+t_{i-1})\\
&\leqslant 3\sum_i(t_i-t_{i-1})=3.
\end{aligned}$$

这里我们利用了这样的事实:对于

$$0\leqslant t_{i-1}<t_i\leqslant 1,\ 1+t_{i-1}+t_i\leqslant 3$$

和

$$\sum_i(t_i-t_{i-1})=t_n-t_0=1.$$

于是对于任意 P,量 $S(P)$ 小于 3,所以这弧是可求长的,且其长等于 $S(P)$ 的上确界.

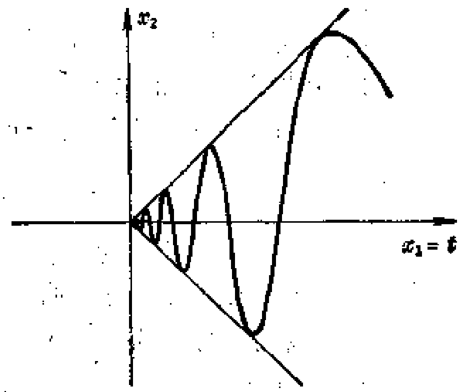


图 3-13

例 3.15 图 3-13 所示曲线

$$x_1=t,$$

$$x_2=\begin{cases}t\cos(1/t), & 当\ 0<t\leqslant 1\\ 0, & 当\ t=0\end{cases}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

不是可求长的. 因为,利用划分 $0,1/(N-1)\pi,\cdots,1/2\pi,1/\pi,1$,我们有

$$\begin{aligned}
S(P)=&\left|\frac{1}{(N-1)\pi}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{(N-1)\pi}[\cos(N-1)\pi]\boldsymbol{e}_2\right|\\
&+\left|\left[\frac{1}{(N-2)\pi}-\frac{1}{(N-1)\pi}\right]\boldsymbol{e}_1\right.\\
&\left.+\left[\frac{1}{(N-2)\pi}\cos(N-2)\pi-\frac{1}{(N-1)\pi}\cos(N-1)\pi\right]\boldsymbol{e}_2\right|+\cdots\\
&+\left|\left[1-\frac{1}{\pi}\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\cos 1-\frac{1}{\pi}\cos\pi\right]\boldsymbol{e}_2\right|.
\end{aligned}$$

若去掉头一项和最后一项,则

$$\begin{aligned}
S(P)&\geqslant\sum_{n=1}^{N-2}\left|\left[\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{(n+1)\pi}\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi-\frac{1}{(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi\right]\boldsymbol{e}_2\right|\\
&\geqslant\sum_{n=2}^{N-2}\left|\left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi-\frac{1}{(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi\right]\boldsymbol{e}_2\right|
\end{aligned}$$

$$=\sum_{n=1}^{N-2}\left|(-1)^n\frac{1}{n\pi}-(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\pi}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{N-2}\left|\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{(n+1)\pi}\right|\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n+1},$$

其中第一行到第二行应用了不等式$|a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2|\geqslant|b\boldsymbol{e}_2|$. 但和 $\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n+1}$ 趋于无穷大. 即 N 足够大时, $S(P)$可任意大. 所以曲线不是可求长的.

在问题 3.24 中证明

定理 3.3 正则弧$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, 是可求长的且它的长由下面的积分给出:

$$S=\int_a^b\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|dt=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{3.6}$$

例 3.16 螺线弧段 $\boldsymbol{X}=(a\cos t)\boldsymbol{e}_1+(a\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的长是

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2)^{1/2}dt=2\pi(a^2+b^2)^{1/2}.$$

7. 弧长参数

设$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$是 I 上的正则曲线, 考虑函数

$$S=S(t)=\int_{t_0}^t\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|dt, \tag{3.7}$$

若 $t\geqslant t_0$, 则 $S\geqslant 0$ 且等于$\boldsymbol{X}(t_0)$和 $\boldsymbol{X}(t)$之间的弧段的长. 若 $t<t_0$, 则 $S<0$, 而等于$\boldsymbol{X}(t_0)$和$\boldsymbol{X}(t)$之间的弧段的长的相反数.

由微积分基本定理, (3.7)有一连续非零导数

$$\frac{dS}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{t_0}^t\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|dt=\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|,$$

所以 $S=S(t)$是 I 上一允许参数变换, 而且若$\boldsymbol{X}(t)$是 C^m 类的, 则 $S(t)$在 I 上也是 C^m 类的, 于是可以引入弧长 S 作为曲线的参数.

注意, 以弧长为参数的表示不是唯一的, 因为它依赖于初始点 t_0(该处 $S=0$)和定向的选择, 即我们可以取

$$S(t)=\int_t^{t_0}\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|dt=-\int_{t_0}^t\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|dt.$$

因此, 为明确起见, 若$|d\boldsymbol{X}/dS|=1$, 我们定义 I_s 上的表示$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(S)$为*弧长参数表示*或*自然参数表示*, 据此我们证明(见问题 3.19 和 3.20)

定理 3.4 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(S)$是曲线 C 的自然参数表示, 则

(i) $|S_2-S_1|$是 C 在$\boldsymbol{X}(S_1)$和 $\boldsymbol{X}(S_2)$之间的弧段的长;

(ii) 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(S^*)$是 C 的任意别的自然参数表示, 则

$$S=\pm S^*+\text{常数};$$

(iii) 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(t)$是 C 的与 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(S)$定向相同的任意表示, 则

$$dS/dt=|d\boldsymbol{X}/dt|,$$

反之,

$$dS/dt=-|d\boldsymbol{X}/dt|.$$

最后注意若 $S=S(t)$用(3.7)中的积分确定, 则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t(S))$是一自然表示. 因为

$$\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dS}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|\left|\frac{dt}{dS}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|\Big/\left|\frac{dS}{dt}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=1.$$

例 3.17 为得到螺线

$$X=(a\cos t)e_1+(a\sin t)e_2+bte_3$$

的自然表示．我们考虑

$$S=\int_0^t\left|\frac{dX}{dt}\right|dt=\int_0^t(a^2+b^2)^{1/2}dt=(a^2+b^2)^{1/2}t.$$

若把 $t=(a^2+b^2)^{-1/2}S$ 代入上式，得到自然表示

$$X=a\cos[(a^2+b^2)^{-1/2}S]e_1+a\sin[(a^2+b^2)^{-1/2}S]e_2+b(a^2+b^2)^{-1/2}Se_3.$$

除非另有说明，关于自然参数 S 的微分将用圆点表示，而关于别的参数的微分用小撇表示，例如 $\dot{X}=\frac{dX}{dS}$，$\ddot{X}=\frac{d^2X}{dS^2}$，$X'=\frac{dX}{dt}$，$X''=\frac{d^2X}{dt^2}$，等等．

§3.2 问题及其解答

1. 正 则 表 示

3.1 证明 $X=te_1+(t^2+1)e_2+(t+1)^3e_3$ 对所有 t 是正则参数表示，并求其在 x_1x_2 和 x_1x_3 平面上的射影．证：对所有 t，

$$\frac{dX}{dt}=e_1+2te_2+3(t-1)^2e_3$$

是连续的，且

$$|dX/dt|=[1+4t^2+9(t-1)^4]^{1/2}\neq 0.$$

所以 X 对所有 t 是正则的．其在 x_1x_2 平面上的射影是抛物线 $x_1=t$，$x_2=t^2+1$，$x_3=0$ 或 $x_2=x_1^2+1$，$x_3=0$，在 x_1x_3 平面上的射影是三次曲线 $x_1=t$，$x_3=(t-1)^3$，$x_2=0$ 或 $x_3=(x_1-1)^3$，$x_2=0$，曲线是柱面 $x_2=x_1^2+1$ 和 $x_3=(x_1-1)^3$ 的交．

3.2 证明表示 $x_1=(1+\cos\theta)$，$x_2=\sin\theta$，$x_3=2\sin(\theta/2)$，$-2\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，是正则的，且在以原点为中心 2 为半径的球面和圆柱面 $(x_1-1)^2+x_2^2=1$ 上．证：

$$dx_1/d\theta=-\sin\theta,\ dx_2/d\theta=\cos\theta,\ dx_3/d\theta=\cos(\theta/2)$$

是连续的，且

$$\left[\left(\frac{dx_1}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{d\theta}\right)^2\right]^{1/2}=[1+\cos^2(\theta/2)]^{1/2}\neq 0,$$

所以表示是正则的．因为

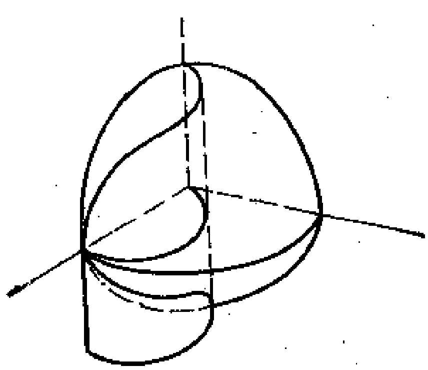


图 3-14

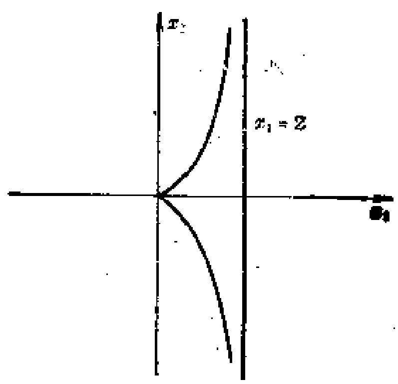


图 3-15

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta+4\sin^2(\theta/2)$$
$$=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta+2(1-\cos\theta)=4,$$

且
$$(x_1-1)^2+x_2^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$$

曲线在半径为 2 的球面和圆柱面 $(x_1-1)^2+x_2^2=1$ 上，它是这两个曲面的交线，如图 3-14 所示.

3.3 Diocles 蔓叶线的极坐标方程是 $r=2\sin\theta\tan\theta$, $-\pi/2<\theta<\pi/2$. 试画出曲线的草图，并求其在直角坐标下的参数表示.

解:

θ	$2\sin\theta$	$\tan\theta$	r
$-\pi/2^+$	-2	$-\infty$	∞
$-\pi/4$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$
0	0	0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
$\pi/2^-$	2	$+\infty$	∞

因为 $x_1=r\cos\theta$ 和 $x_2=r\sin\theta$，我们有参数表示

$$x_1=2\sin^2\theta,\ x_2=2\sin^2\theta\tan\theta,\ -\pi/2<\theta<\pi/2.$$

注意：当 $\theta\to-\pi/2$ 或 $\theta\to\pi/2$ 时，$x_1\to2$. 上面的表示在 $\theta=0$ 时不是正则的，因为

$$dx_1/d\theta=4\sin\theta\cos\theta \quad 和 \quad dx_2/d\theta=2\sin^2\theta\sec^2\theta+4\sin\theta\cos\theta\tan\theta.$$

在 $\theta=0$ 时均变为 0.

3.4 圆外旋轮线是圆 C 沿定圆 C_0 外边界无滑动地旋转时其周界上一点 P 生成的平面曲线，如图 3-16 所示. 当 C 的半径为 r, C_0 的中心在原点，半径为 r_0，且 P 的初始位置在 $(r_0, 0)$时，求圆外旋轮线的参数表示.

解: 令 A 为 C 的中心，θ 为 OA 与 e_1 的交角，则

$$\boldsymbol{OA}=|\boldsymbol{OA}|(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+|\boldsymbol{OA}|(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$$
$$=(r_0+r)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(r_0+r)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2;$$

若 β 是 $\boldsymbol{AP}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的交角，则

$$\beta=\angle OAP+\theta-\pi \quad 或 \quad \beta=\theta\frac{r_0}{r}+\theta-\pi=\frac{r_0+r}{r}\theta-\pi;$$

由此得出

$$\boldsymbol{AP}=|\boldsymbol{AP}|(\cos\beta)\boldsymbol{e}_1+|\boldsymbol{AP}|(\sin\beta)\boldsymbol{e}_2$$
$$=r\left[\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta-\pi\right)\right]\boldsymbol{e}_1+r\left[\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\theta-\pi\right)\right]\boldsymbol{e}_2$$
$$=-r\left[\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right]\boldsymbol{e}_1-r\left[\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right]\boldsymbol{e}_2.$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AP}=\left[(r_0+r)\cos\theta-r\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right]\boldsymbol{e}_1$$
$$+\left[(r_0+r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right]\boldsymbol{e}_2$$

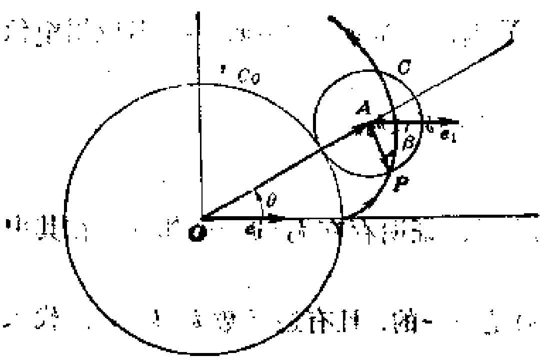


图 3-16

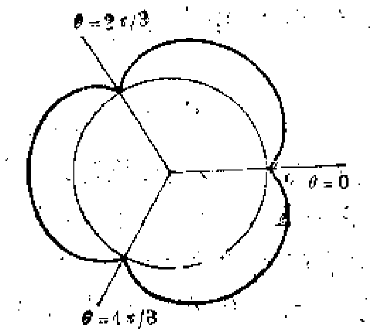


图 3-17

为所求.

3.5 若在上一问题中 $r_0=3$ 和 $r=1$，则圆外旋轮线方程为

$$x_1=4\cos\theta-\cos 4\theta,\ x_2=4\sin\theta-\sin 4\theta.$$

确定其奇异(非正则)点并画出草图.

解: $dx_1/d\theta=-4\sin\theta+4\sin 4\theta=0$ 当且仅当

$$\sin\theta=\sin 4\theta \quad 或 \quad \theta=2n\pi/3,\ (2n+1)\pi/5,\ n=0,\ \pm1,\ \cdots,$$

$$dx_2/d\theta=4\cos\theta-4\cos 4\theta=0,$$

当且仅当 $\cos\theta=\cos 4\theta$, 或 $\theta=2n\pi/3,\ 2n\pi/5,\ n=0,\ \pm1,\ \cdots.$

由此得出，当且仅当 $\theta=2n\pi/3,\ n=0,\ \pm1,\ \cdots$ 时，两个导数同时变为零. 注意，这曲线有周期 2π.

3.6 确定圆柱面 $x_1^2+x_2^2=1$ 和平面 $x_1+x_2+x_3=1$ 的交线的不含根号形式的参数表示.

解: 我们取 $x_1=\cos\theta$ 和 $x_2=\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, 则

$$x_3=1-x_1-x_2=1-\cos\theta-\sin\theta.$$

于是 $$\boldsymbol{X}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2+(1-\cos\theta-\sin\theta)\boldsymbol{e}_3,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

是交线的参数表示.

3.7 若 $g(t)$ 在 $t=t_0$ 连续，且 $g(t_0)\neq0$. 证明存在 $\delta>0$ 使得对 $S_\delta(t_0)$ 中的 t, 有 $g(t)\neq0$. 利用这个结果证明定理 3.1: 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 是 I 上的正则表示，则对 I 中每个 t_0, 存在 t_0 的一个邻域，使得在其中 $\boldsymbol{X}(t)$ 是一一的.

证: 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}|g(t_0)|$, 因为 $g(t)$ 在 t_0 连续，存在 $\delta>0$ 使得对 $S_\delta(t_0)$ 中的 t 有

$$|g(t)-g(t_0)|<\varepsilon.$$

所以对 $S_\delta(t_0)$ 中的 t, 有

$$|g(t_0)|=|g(t_0)-g(t)+g(t)|\leqslant|g(t)-g(t_0)|+|g(t)|$$
$$<\varepsilon+|g(t)|=\frac{1}{2}|g(t_0)|+|g(t)|,$$

或 $$|g(t)|>\frac{1}{2}|g(t_0)|.$$

因为 $g(t_0)\neq0$, 故对 $S_\delta(t_0)$ 中的 t, $g(t)\neq0$.

因为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 在 I 上正则，且 t_0 在 I 中，至少有一导数，比如说 $x_1'(t_0)\neq0$, 而且 $x_1'(t)$

在 t_0 连续. 因此存在 $\delta>0$, 使得对 $S_\delta(t_0)$ 中所有 t, $x_1'(t)\neq 0$. 现在, 在 $S_\delta(t_0)$ 中, $\boldsymbol{X}(t)$ 是一一的. 否则在 $S_\delta(t_0)$ 中会有 $t_1\neq t_2$, 使得 $\boldsymbol{X}(t_1)=\boldsymbol{X}(t_2)$, 于是 $x_1(t_1)=x_1(t_2)$, 但应用中值定理可得

$$0=\frac{x_1(t_1)-x_1(t_2)}{t_1-t_2}=x_1'(t'),\ t_1<t'<t_2,$$

这与 $S_\delta(t_0)$ 上 $x_1'(t_0)\neq 0$ 矛盾, 故定理得证.

3.8 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 是 I 上使 $x_1'(t_0)\neq 0$ 的正则表示, 证明存在 t_0 的一个邻域, 在其中 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 可以有隐式表示 $x_2=F_1(x_1)$, $x_3=F_2(x_1)$.

证: 因为 $x_1'(t_0)\neq 0$, 在某个 $S_\delta(t_0)$ 中, $x_1=x_1(t)$ 是一一的, 且有逆函数 $t=t(x_1)$. 代入参数方程 $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, $x_3=x_3(t)$, 得到

$$x_2=x_2(t(x_1)),\ x_3=x_3(t(x_1)) \quad 或 \quad x_2=F_1(x_1),\ x_3=F_2(x_1).$$

2. 正 则 曲 线

3.9 证明 $t=\theta^2/(\theta^2+1)$ 是 $0<\theta<\infty$ 上的允许参数变换, 并把区间 $0<\theta<\infty$ 变成 $0<t<1$.

证: $dt/d\theta=2\theta/(\theta^2+1)^2$ 连续, 且在 $0<\theta<\infty$ 上 $dt/d\theta\neq 0$. 所以它是 $0<\theta<\infty$ 上一个允许参数变换, 因为

$$\theta^2/(\theta^2+1)\,|_{\theta=0}=0 \quad 和 \quad \lim_{\theta\to\infty}\theta^2/\theta^2+1=1,$$

它把区间 $0<\theta<\infty$ 变成 $0<t<1$.

3.10 试以 $t=\tan(\theta/4)$ 为圆 $x_1=a\cos\theta$, $x_2=a\sin\theta\ (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的参数.

证: 半角公式给出

$$\cos\theta=\cos^4(\theta/4)-6\cos^2(\theta/4)\sin^2(\theta/4)+\sin^4(\theta/4)$$
$$=\frac{1}{(t^2+1)^2}-6\frac{t^2}{(t^2+1)^2}+\frac{t^4}{(t^2+1)^2}=\frac{t^4-6t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

和

$$\sin\theta=4(\sin(\theta/4)\cos^3(\theta/4)-\sin^3(\theta/4)\cos(\theta/4))$$
$$=4\left(\frac{t}{(t^2+1)^2}-\frac{t^3}{(t^2+1)^2}\right)=\frac{4t(1-t^2)}{(t^2+1)^2},$$

于是 $$x_1=a\frac{(t^4-6t^2+1)}{(t^2+1)^2},\quad x_2=\frac{4at(1-t^2)}{(t^2+1)^2},\quad -1\leqslant t\leqslant 1$$

是所求的表示.

3.11 试把参数 $t=2\sin\theta$ 引进蔓叶线

$$x_1=2\sin^2\theta,\ x_2=2\sin^2\theta\tan\theta,\ -\pi/2<\theta<\pi/2,$$

并求出 x_1 和 x_2 关于奇异点 $t=0$ 的幂级数展开式的前两个非零项(见问题 3.3).

解: $$x_1=2\left(\frac{1}{2}t\right)^2=\frac{1}{2}t^2,$$

$$x_2=\frac{1}{2}t^2\tan\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}t\right)=\frac{1}{2}t^3(4-t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$(4-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的展开式是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}t^2+o(t^2)$, 于是

$$x_1=\frac{1}{2}t^2,\ x_2=\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{32}t^5+o(t^5),$$

注意在 $t=0$ 邻域中曲线呈尖点形状

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1^{3/2}+0(x_1^2).$$

3.12 证明存在一允许参数变换 $t=t(\theta)$，它使任意区间 I 变为下列三种区间之一：(i) $0\leqslant t\leqslant 1$，(ii) $0<t<1$，(iii) $0\leqslant t<1$. 因此每条正则曲线有定义在上述三种区间之一上的表示.

证：如例 3.5 中证明一样，线性函数 $t=(\theta-a)/(b-a)$ 是一允许参数表示，它使 $a\leqslant\theta\leqslant b$ 变为 $0\leqslant t\leqslant 1$，$a<\theta<b$ 变为 $0<t<1$ 和 $a\leqslant\theta<b$ 变为 $0\leqslant t<1$. 线性函数

$$t=-(\theta-a)/(b-a)+1$$

使 $a<\theta\leqslant b$ 变为 $0\leqslant t<1$. 剩下考虑无限区间，函数 $\theta=\arctan S$ 使区间 $-\infty<S<\infty$ 变为 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，而 $t=\left(\theta+\frac{1}{2}\pi\right)\Big/\pi$ 使 $-\pi/2<\theta<\pi/2$ 变为 $0<t<1$. 所以复合函数

$$t=\left(\frac{\pi}{2}+\arctan S\right)\Big/\pi$$

使 $-\infty<S<\infty$ 变为 $0<t<1$. 函数 $\theta=\arctan S$ 使 $a\leqslant S<\infty$ 变为 $\arctan a\leqslant\theta<\pi/2$，而

$$t=(\theta-\arctan a)/(\pi/2-\arctan a)$$

使 $\arctan a\leqslant\theta<\pi/2$ 变为 $0\leqslant t<1$. 所以复合函数

$$t=\frac{\arctan S-\arctan a}{\pi/2-\arctan a},$$

使 $a\leqslant S<\infty$ 变为 $0\leqslant t<1$，剩下的一种情形留给读者作练习.

注意，上面所有的函数都是解析的，于是存在任意类的参数变换能给出上面的结果.

3.13 证明定理 3.2：若 $t=t(\theta)$ 是 I_θ 上的允许参数变换，则 $t(\theta)$ 是一一的，且它的逆函数 $\theta=\theta(t)$ 是 $I_t=t(I_\theta)$ 上的允许参数变换.

证：因为 $dt/d\theta$ 是连续的，且 $dt/d\theta\neq 0$，因此在 I_θ 上 $dt/d\theta>0$ 或 $dt/d\theta<0$，假定在 I_θ 上 $dt/d\theta>0$，则 $t(\theta)$ 是严格递增的. 否则，即当 $\theta_1<\theta_2$ 时，$t(\theta_1)\geqslant t(\theta_2)$，则由中值定理得

$$0\geqslant\frac{t(\theta_1)-t(\theta_2)}{\theta_1-\theta_2}=t'(\theta),$$

这是不可能的. 因为在 I_θ 上 $dt/d\theta>0$，由于 $t(\theta)$ 是严格递增的，它是一一的，且有逆函数 $\theta(t)$. 现在，因为 $t(\theta)$ 是递增且连续的，因此它的逆函数 $\theta(t)$ 是递增和连续的，我们把它留给读者作练习. 此外，$\theta(t)$ 还有导数

$$\frac{d\theta}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=1/\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta\theta}=1\Big/\frac{dt}{d\theta},$$

它是连续的且异于 0，因为 $dt/d\theta$ 连续且异于 0. 证毕.

3.14 回忆 I_t 上正则参数表示 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 等价于 I_θ 上的正则参数表示 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$ 的定义，它是指存在一个允许参数变换 $t=t(\theta)$ 使 $t(I_\theta)=I_t$ 和 $\boldsymbol{X}(t(\theta))=\boldsymbol{X}^*(\theta)$，证明这定义了正则表示集上的一个等价关系.

证：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 在恒同参数变换 $t=\theta$ 下等价于自己，若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 在参数变换 $t=t(\theta)$ 下等价于 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\theta)$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$ 在逆变换 $\theta=\theta(t)$ 下等价于 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$，因为 $\theta(I_t)=I_\theta$ 而

$$\boldsymbol{X}^*(\theta(t))=\boldsymbol{X}(t(\theta(t)))=\boldsymbol{X}(t),$$

最后，假设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 在 $t=t(\theta)$ 下等价于 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$ 和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$ 在 $\theta=\theta(\phi)$ 下等价于 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{**}(\phi)$，考虑复合函数 $t=t(\theta(\phi))$，由此得出在 I_ϕ 上

$$\frac{dt}{d\phi}=\frac{dt}{d\theta}\frac{d\theta}{d\phi}$$

连续且 $dt/d\phi\neq 0$. 所以 $t=t(\theta(\phi))$是 I_ϕ 上的允许参数变换，还有

$$t(\theta(I_\phi))=t(I_\theta)=I_t.$$

而
$$X(t(\theta(\phi)))=X^*(\theta(\phi))=X^{**}(\phi),$$

于是 $X=X(t)$等价于 $X=X^{**}(\phi)$. 证毕.

3. 弧　长

3.15 计算弧 $X=3(\cosh 2t)e_1+3(\sinh 2t)e_2+6te_3,\ 0\leqslant t\leqslant\pi$ 的长.

解:

$$\begin{aligned}S&=\int_0^\pi\left|\frac{dX}{dt}\right|dt=\int_0^\pi|6\sinh 2te_1+6\cosh 2te_2+6e_3|dt\\&=\int_0^\pi 6[\sinh^2 2t+\cosh^2 2t+1]^{1/2}dt\\&=\int_0^\pi 6[2\cosh^2 2t]^{1/2}dt=\int_0^\pi 6\sqrt{2}\cosh 2t\,dt\\&=3\sqrt{2}\sinh 2\pi.\end{aligned}$$

3.16 求圆外旋轮线

$$x_1=(r_0+r)\cos\theta-r\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right),$$
$$x_2=(r_0+r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right).$$

以 θ 表示的弧长函数. 见附图 3, 4.

解:

$$\begin{aligned}S&=\int_0^\theta\left[\left(\frac{dx_1}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{d\theta}\right)^2\right]^{1/2}d\theta\\&=\int_0^\theta(r_0+r)\left[\left(-\sin\theta+\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right)^2+\left(\cos\theta-\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right)^2\right]^{1/2}d\theta\\&=(r_0+r)\int_0^\theta[2-2\cos(r_0\theta/r)]^{1/2}d\theta\\&=2(r_0+r)\int_0^\theta|\cos(r_0\theta/2r)|d\theta\\&=-4\frac{(r_0+r)r}{r_0}\cos(r_0\theta/2r)\Big]_0^\theta=-4\frac{(r_0+r)r}{r_0}[\cos(r_0\theta/2r)-1].\end{aligned}$$

3.17 试以弧长作为

$$X=(e^t\cos t)e_1+(e^t\sin t)e_2+e^te_3,\ -\infty<t<\infty$$

的参数.

解:

$$\begin{aligned}S&=\int_0^t\left|\frac{dX}{dt}\right|dt=\int_0^t|(e^t\cos t-e^t\sin t)e_1+(e^t\sin t+e^t\cos t)e_2+e^te_3|dt\\&=\int_0^t[e^{2t}(-2\cos t\sin t+1)+e^{2t}(2\cos t\sin t+1)+e^{2t}]^{1/2}dt\\&=\sqrt{3}\int_0^t e^tdt=\sqrt{3}(e^t-1).\end{aligned}$$

解得$t=\log(S/\sqrt{3}+1)$, $-\sqrt{3}<S<\infty$,以弧长S作参数得

$$\boldsymbol{X}=(S/\sqrt{3}+1)[\cos\log(S/\sqrt{3}+1)\boldsymbol{e}_1+\sin\log(S/\sqrt{3}+1)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3].$$

3.18 证明

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(S+\sqrt{S^2+1})\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}(S+\sqrt{S^2+1})^{-1}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\sqrt{2}(\log(S+\sqrt{S^2+1}))\boldsymbol{e}_3$$

是一自然表示,即$|d\boldsymbol{X}/dS|=1$.

证:令$u=S+\sqrt{S^2+1}$,则

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}u\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}u^{-1}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\sqrt{2}(\log u)\boldsymbol{e}_3$$

和
$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dS}=\frac{d\boldsymbol{X}}{du}\frac{du}{dS}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}u^{-2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\sqrt{2}u^{-1}\boldsymbol{e}_3\right)\left(1+\frac{S}{\sqrt{S^2+1}}\right).$$

所以

$$\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dS}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{du}\right|\left|\frac{du}{dS}\right|=\frac{1}{2}(1+u^{-4}+2u^{-2})^{1/2}\frac{S+\sqrt{S^2+1}}{\sqrt{S^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}(1+u^{-2})\frac{u}{\sqrt{S^2+1}}=\frac{1}{2}\frac{u^2+1}{u\sqrt{S^2+1}}$$

$$=\frac{S^2+S\sqrt{S^2+1}+1}{(S+\sqrt{S^2+1})\sqrt{S^2+1}}=1.$$

因为$|d\boldsymbol{X}/dS|=1$,所以S是自然参数.

3.19 证明定理3.4(i):若$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(S)$是$I_s$上一自然表示,则$|S_2-S_1|$是弧$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(S)$在对应于$\boldsymbol{X}(S_1)$和$\boldsymbol{X}(S_2)$两点之间的长.

证:若$S_1\leqslant S_2$,弧长是

$$\int_{S_1}^{S_2}\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dS}\right|dS=\int_{S_1}^{S_2}1\,dS=S_2-S_1=|S_2-S_1|.$$

若$S_1>S_2$,弧长是

$$\int_{S_2}^{S_1}\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dS}\right|dS=\int_{S_2}^{S_1}1\,dS=S_1-S_2=|S_2-S_1|,$$

3.20 证明定理3.4(ii):若$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(S)$和$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(S^*)$是同一曲线的自然表示,则

$$S=\pm S^*+\text{常数}.$$

证:令$S=S(S^*)$,则

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dS^*}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dS}\frac{dS}{dS^*},$$

且
$$\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dS^*}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dS}\right|\left|\frac{dS}{dS^*}\right|,$$

但
$$\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dS}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dS^*}\right|=1,$$

所以$\left|\dfrac{dS}{dS^*}\right|=1$或$\dfrac{dS}{dS^*}=\pm1$或$S=\pm S^*+$常数.

3.21 证明弧$\boldsymbol{X}=t^2\boldsymbol{e}_1+\sin t\boldsymbol{e}_2$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$,是可求长的.

证:我们取一任意划分$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\pi/2$

并计算折线弧长:

$$S(P)=\sum_{i=1}^{n}|X_i-X_{i-1}|=\sum_i|(t_i^2e_1+(\sin t_i)e_2)-(t_{i-1}^2e_1+(\sin t_{i-1})e_2)|$$
$$\leqslant\sum_i[(t_i^2-t_{i-1}^2)|e_1|+|\sin t_i-\sin t_{i-1}||e_2|].$$

利用中值定理，有

$$S(P)\leqslant\sum_i[(t_i-t_{i-1})(t_i+t_{i-1})+|\cos\theta_i|(t_i-t_{i-1})]$$
$$\leqslant\sum_i(t_i-t_{i-1})[t_i+t_{i-1}+|\cos\theta_i|], \quad t_{i-1}<\theta<t_i.$$

因为对于 $0\leqslant t_{i-1}<t_i\leqslant\pi/2$，$|\cos\theta_i|\leqslant1$ 和 $(t_i+t_{i-1})\leqslant\pi$，

$$S(P)\leqslant(\pi+1)\sum_i(t_i-t_{i-1})\leqslant(\pi/2)(\pi+1).$$

因为 $S(P)$ 有界，故弧是可求长的.

3.22 若 $X=f(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 是可求长弧，证明任给 $S>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在一带有近似折线 P 的划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，使得

(i) $t_i-t_{i-1}<\delta$，$i=1,\cdots,n$；(ii) $|S-S(P)|<\varepsilon$.

这里 S 和 $S(P)$ 分别是 $X=f(t)$ 和 P 的长.

证：因为 S 是所有可能的 $S(P)$ 的上确界，存在一划分 $a=t_0'<t_1'<\cdots<t_n'=b$，其带有近似折线 P'，使得 $S(P')>S-\varepsilon$，要不然对所有 $S(P)$，$S(P)\leqslant S-\varepsilon$，于是 $S-\varepsilon$ 是 $S(P)$ 的小于上确界 S 的上界，这是不可能的．现在若上面的划分不满足(i)，可添加一些点以得到满足 $(t_i-t_{i-1})<\delta$ 的更精细的划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，这样得到新的折线 P' 满足

$$S(P)\leqslant S(P')\leqslant S,$$

因此就得到所求的 $|S-S(P)|<\varepsilon$.

3.23 证明正则弧 $X=f(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 是可求长的

证：取一任意划分 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$，则

$$S(P)=\sum_i|X_i-X_{i-1}|=\sum_i|f(t_i)-f(t_{i-1})|$$
$$=\sum_i|(f_1(t_i)-f_1(t_{i-1}))e_1+(f_2(t_i)-f_2(t_{i-1}))e_2+(f_3(t_i)-f_3(t_{i-1}))e_3|$$
$$\leqslant\sum_i[|f_1(t_i)-f_1(t_{i-1})|+|f_2(t_i)-f_2(t_{i-1})|+|f_3(t_i)-f_3(t_{i-1})|]$$
$$=\sum_i[|f_1'(\theta_i)|(t_i-t_{i-1})+|f_2'(\theta_i')|(t_i-t_{i-1})+|f_3'(\theta_i'')|(t_i-t_{i-1})].$$

这里我们对 $f_i(t)$ 应用了中值定理．因为 $f_i'(t)$ 在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续，它们在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有界 M_i，所以

$$S(P)\leqslant(M_1+M_2+M_3)\sum_i(t_i-t_{i-1})\leqslant(M_1+M_2+M_3)(b-a).$$

于是 $S(P)$ 由 $(M_1+M_2+M_3)(b-a)$ 完全界定，故该弧是可求长的.

3.24 证明正则弧 $X=f(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 的长由积分

$$S=\int_a^b\left|\frac{dX}{dt}\right|dt=\int_a^b|f'(t)|dt$$

给定．这和问题 3.23 合起来就证明了定理 3.3.

证：令 ε 是任意的，因为 $f_i'(t)$，$i=1, 2, 3$，在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续，它们在这区间上是一致连续的，即存在 $\delta_1>0$，使得

(i) $$|f_i'(t)-f_i'(t')|<\frac{\varepsilon}{9(b-a)},\quad i=1, 2, 3$$

对所有$|t-t'|<\delta_1$. 再按积分定义,存在δ_2使得对于$|t_i-t_{i-1}|<\delta_2$有

(ii) $$\left|\int_a^b |f'(t)|dt-\sum_{i=1}^n |f'(\theta_i)|(t_i-t_{i-1})\right|<\varepsilon/3,\ t_{i-1}\leqslant\theta\leqslant t_i.$$

现在令$\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$,从问题3.22得出存在一划分$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$和近似折线$P$,使得$(t_i-t_{i-1})<\delta$且

(iii) $$|S-S(P)|<\varepsilon/3.$$

现在考虑量

$$I=\left|S-\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt\right|\leqslant|S-S(P)|+\left|S(P)-\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\left|\sum_i|\boldsymbol{f}(t_i)-\boldsymbol{f}(t_{i-1})|-\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\left|\sum_i|(f_1(t_i)-f_1(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_1+(f_2(t_i)-f_2(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_2+(f_3(t_i)-f_3(t_{i-1}))\boldsymbol{e}_3|\right.$$

$$\left.-\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt\right|.$$

从中值定理得出:

$$I\leqslant\varepsilon/3+\left|\sum_i|f_1'(t_i')\boldsymbol{e}_1+f_2'(t_i'')\boldsymbol{e}_2+f_3'(t_i''')\boldsymbol{e}_3|(t_i-t_{i-1})-\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt\right|,$$

加减$\sum_i|f'(t_i)|(t_i-t_{i-1})$得

$$I\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\left|\sum_i\boldsymbol{f}'(t_i)(t_i-t_{i-1})-\int_a^b\boldsymbol{f}'(t)dt\right|$$

$$+\left|\sum_i[|f_1'(t_i')\boldsymbol{e}_1+f_2'(t_i'')\boldsymbol{e}_2+f_3'(t_i''')\boldsymbol{e}_3|-|f'(t_i)|](t_i-t_{i-1})\right|.$$

利用上面的(ii)和不等式$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,我们有

$$I<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\sum[|f_1'(t_i')-f_1'(t_i)|+|f_2'(t_i'')-f_2'(t_i)|+|f_3'(t_i''')-f_3'(t_i)|](t_i-t_{i-1}),$$

最后,利用(i),我们得到

$$I<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\sum_i(t_i-t_{i-1})<\varepsilon.$$

因为ε是任意的

$$I=\left|S-\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt\right|=0\quad 或\quad S=\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt.$$

§3.3 补 充 题

3.25 证明表示$\boldsymbol{X}=t\boldsymbol{e}_1+(t^2+2)\boldsymbol{e}_2+(t^3+t)\boldsymbol{e}_3$对于所有$t$是正则的并描述出其在$x_1x_3$和$x_1x_2$平面上的射影的草图.

3.26 Nicomedes蚌线的极坐标方程是

$$r=\frac{a}{\cos\theta}+c,\ a\neq0,\ c\neq0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},$$

画出草图并求其在直角坐标下的表示.

答案: $x_1=a+c\cos\theta$, $x_2=a\tan\theta+c\sin\theta$.

3.27 求柱面 $x_3^2=x_1$ 和 $x_2^2=1-x_1$ 的交线的表示,要求它不含根号. 提示: $x_2^2+x_3^2=1$.

答案: $x_1=\cos^2\theta$, $x_2=\sin\theta$, $x_3=\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

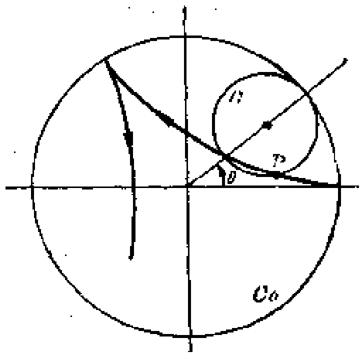


图 3-18

3.28 圆内旋轮线是圆 C 边界上一点 P, 当 C 在定圆 C_0 内部绕定圆 C_0 无滑动地旋转时生成的平面曲线, 如图 3-18 所示, 若 C 有半径 r, C_0 中心在原点半径为 r_0 和 P 的初始位置在$(r_0, 0)$,求圆内旋轮线的表示.

答案: $x_1=(r_0-r)\cos\theta+r\cos\left(\frac{r_0-r}{r}\theta\right)$;

$x_2=(r_0-r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{r_0-r}{r}\theta\right)$.

3.29 在上一问题中, 若 $r_0=5$ 和 $r=2$, 则圆内旋轮线的方程是 $x_1=3\cos\theta+2\cos3\theta/2$, $x_2=3\sin\theta-2\sin3\theta/2$,求奇异点并画草图.

答案: $\theta=(4/5)n\pi$, $n=0$, ±1, $\cdots$.

3.30 证明 $\theta=3t^5+10t^3+15t+1$ 对所有 t 是一个允许参数变换.

3.31 求把区间 $0<t\leqslant2$ 映射到 $-\infty<\theta\leqslant0$ 上的一个允许参数变换.

3.32 计算弧 $\boldsymbol{X}=e^t(\cos t)\boldsymbol{e}_1+e^t(\sin t)\boldsymbol{e}_2+e^t\boldsymbol{e}_3$, $0\leqslant t\leqslant\pi$ 的长.

答案: $\sqrt{3}(e^\pi-1)$.

3.33 参考问题 3.28,求圆内旋轮线

$$x_1=(r_0-r)\cos\theta+r\cos\left(\frac{r_0-r}{r}\theta\right),$$

$$x_2=(r_0-r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{r_0-r}{r}\theta\right),\ r_0>r,$$

用 θ 表示的弧长函数.

答案: $S=\frac{4r(r_0-r)}{r_0}[1-\cos(r_0\theta/2r)]$.

3.34 证明 $\boldsymbol{X}=t\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2+e^t\boldsymbol{e}_3\quad(-\infty<t<\infty)$和

$$\boldsymbol{X}=(\log t)\boldsymbol{e}_1+\sin(\log t)\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3\quad(0<t<\infty)$$

是同一定向曲线的表示.

3.35 证明一定向正则曲线有定义在下列四个区间之一上的表示:

(i) $0\leqslant t\leqslant1$;　　(ii) $0<t<1$;

(iii) $0\leqslant t<1$;　　(iv) $0<t\leqslant1$.

3.36 两个正则表示: I_t 上的 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$和 I_θ 上的 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta)$称为等价的,若它们表示同一定向曲线,即若存在一允许参数变换 $t=t(\theta)$使得 $dt/d\theta>0$, $t(I_\theta)=I_t$ 和

$$\boldsymbol{X}(t(\theta))=\boldsymbol{X}^*(\theta).$$

证明这是正则表示集上的一个等价关系. 于是正则定向曲线是关于带有正导数的容许参数变换的正则表示的等价类.

3.37 证明 I 上可求长弧

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$$

在 $I^*(I^*\subset I)$ 上的弧段 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 是可求长的.

3.38 若 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 是有长 S 的可求长弧且 $a<t_0<b$, 证明 $a\leqslant t\leqslant t_0$ 上的弧段 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 和 $t_0<t\leqslant b$ 上的弧段 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 都是可求长的, 其长分别是 S_1 和 S_2 且

$$S=S_1+S_2.$$

3.39 证明定理 3.4(iii): 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是定向曲线 C 的自然表示和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(t)$ 是 C 的任意另一表示, 则

$$ds/dt=|d\boldsymbol{X}/dt|.$$

第四章 曲率和挠率

§4.1 基本内容

引 言

几何的基本问题之一，是严格地确定使一个图形区别于另一个图形的几何量. 例如，线段用它的长度，圆用它的半径，三角形用边-角-边确定，等等. 一般来说，对于足够光滑的正则曲线，这问题是可以解决的. 我们将看到，一条正则曲线可用两个量唯一确定，这两个量就是作为自然参数的函数的曲率和挠率.

1. 单位切向量

设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是正则曲线 C 的自然参数表示，导数 $d\boldsymbol{X}/ds=\dot{\boldsymbol{X}}(s)$ 用以确定 C 在点 $\boldsymbol{X}(s)$ 的切线方向，这与我们的几何直觉相符，因为

$$\dot{\boldsymbol{X}}(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{X}(s+\Delta s)-\boldsymbol{X}(s)}{\Delta s},$$

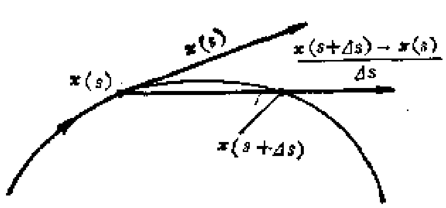


图 4-1

且 $\dfrac{\boldsymbol{X}(s+\Delta s)-\boldsymbol{X}(s)}{\Delta s}$ 是 C 的割线方向，如图 4-1 所示. 又因为对自然参数表示 $|d\boldsymbol{X}/ds|=|\dot{\boldsymbol{X}}|=1$，所以向量 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 还具有单位长度.

若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s^*)$ 是 C 的另一个自然参数表示，则由定理 3.4，$s=\pm s^*+$常数且

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{ds^*}=\frac{d\boldsymbol{X}}{ds}\frac{ds}{ds^*}=\pm\frac{d\boldsymbol{X}}{ds},$$

即 $d\boldsymbol{X}/ds^*$ 与 $d\boldsymbol{X}/ds$ 有相同或相反的方向，它取决于 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s^*)$ 的定向. 于是 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 是定向的量. 在图 4-1 中，它的正向是 s 增加的方向.

向量 $\dot{\boldsymbol{X}}(s)$ 称为定向曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 在 $\boldsymbol{X}(s)$ 的单位切向量，并记作 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(s)=\dot{\boldsymbol{X}}(s)$.

例 4.1 沿着螺线 $\boldsymbol{X}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3$, a, $b\neq 0$，有

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3$$

且 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=(a^2+b^2)^{1/2}$，于是

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{X}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|$$
$$=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3),$$

这里用到 $ds/dt=|d\boldsymbol{X}/dt|$（定理 3.4），我们看到，沿着这条螺线单位切向量 $\boldsymbol{t}$ 和 x_3 轴交成定角 $\theta=\arccos(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{e}_3)=\arccos b(a^2+b^2)^{-1/2}$.

如同单位切向量一样，沿着曲线的其它几何量也可用自然参数表示来确定. 然而，像上面的例子，运用链法则和关系式 $ds/dt=|dX/dt|$，这些量亦可以用其它参数表出.

设 $X=X(t)$ 是 C 的任一参数表示且与 $X=X(s)$ 有相同的定向，则

$$X'=\frac{dX}{dt}=\frac{dX}{ds}\frac{ds}{dt}=t\left|\frac{dX}{dt}\right|=t|X'|,$$

其中再次用到 $ds/dt=|dX/dt|$，于是 t 与 X' 有相同的方向，即它也是曲线的切向量，并且

$$t=X'/|X'|. \tag{4.1}$$

2. 切线和法平面

通过正则曲线 C 上的点 X 且平行于曲线在 X 处的切向量的直线称为 C 在 X 点的切线，见图 4-2. 由方程(2.1)可得 C 在点 $X_0=X(t_0)$ 的切线方程是

$$X=X_0+kt_0,\ -\infty<k<\infty,$$

其中 $t_0=t(t_0)$ 是在 X_0 的单位切向量.

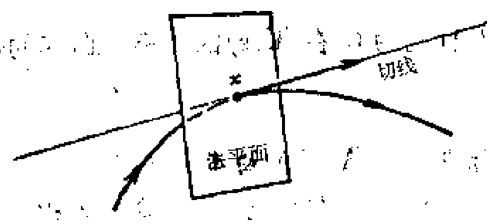


图 4-2

通过 X 且垂直于曲线在 X 处的切线的平面称为 C 在 X 点的法平面. 由方程(2.5)可得，在 X_0 点的法平面方程是

$$(X-X_0)\cdot t_0=0.$$

为方便起见，我们引入第二个变量 Y 表示与 $X=X(t)$ 有关的图形上的一般点，则 C 上任意点 X 的切线方程可写成

$$Y=X+kt,\ -\infty<k<\infty. \tag{4.2}$$

在 X 点的法平面方程为

$$(Y-X)\cdot t=0. \tag{4.3}$$

最后，我们注意到 X' 平行于 t，因而切线和法平面的方程还可以分别写为

$$Y=X+kX',\ -\infty<k<\infty$$

和

$$(Y-X)\cdot X'=0.$$

例 4.2 曲线 $X=te_1+t^2e_2+t^3e_3$ 在 $t=1$ 的切线是

$$Y=X(1)+kX'(1)$$

即

$$Y=(1+k)e_1+(1+2k)e_2+(1+3k)e_3,\ -\infty<k<\infty,$$

在 $t=1$ 的法平面是

$$(Y-X(1))\cdot X'(1)=0$$

或

$$(y_1-1)+(y_2-1)2+(y_3-1)3=0,$$

即

$$y_1+2y_2+3y_3=6.$$

3. 曲 率

假定 $X=X(s)$ 是类 $\geqslant 2$ 的正则曲线，则切向量 $t=t(s)=\dot{X}(s)$ 是 C^1 类的，我们可以考虑它的导数

$$dt/ds=\dot{t}(s)=\ddot{X}(s).$$

单位切向量 t 依赖于 C 的定向，而 $\dot{t}$ 却是与定向无关. 因为设 $X=X(s^*)$ 是 C 的另外一个自然参数表示，且它的单位切向量

$$t^* = dX/ds^*,$$

则 $s = \pm s^* +$ 常数且

$$\frac{dt^*}{ds^*} = \frac{d}{ds^*}\left(\frac{dX}{ds^*}\right) = \frac{d}{ds^*}\left(\pm\frac{dX}{ds}\right) = \pm\frac{d}{ds}\left(\frac{dX}{ds}\right)\frac{ds}{ds^*}$$
$$= (\pm 1)^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dX}{ds}\right) = \frac{dt}{ds},$$

因此 $\dot{t}$ 是与定向无关的.

向量 $\dot{t}$ 称为 C 在点 $X(s)$ 上的**曲率向量**, 并记作 $k = k(s) = \dot{t}(s)$.

因为 t 是单位向量, 由定理 2.7 得出 $k = \dot{t}$ 垂直于 t, 因而平行于法平面. 当 k 为非零向量时, 它就是曲线转弯的方向, 如图 4-3 所示.

曲率向量的大小记作

$$|\varkappa| = |k(s)|, \tag{4.4}$$

并称它为 C 在 $X(s)$ 的**曲率**. 曲率的倒数记作

$$\rho = \frac{1}{|\varkappa|} = \frac{1}{|k(s)|}, \tag{4.5}$$

称它为在 $X(s)$ 的**曲率半径**.

在 C 上曲率向量 $k = 0$ 的点称为**逗留点**. 于是在逗留点上, 曲率 $|\varkappa|$ 为零, 曲率半径 ρ 是无穷大.

在问题 4.9 中, 我们证明曲率等于切线方向对弧长的变化率, 这样, 沿着切线方向对弧长的变化速度大的曲线, 例如半径很小的圆, 它的曲率相对地大, 或等价地, 曲率半径相对地小.

例 4.3 沿着半径为 a 的圆, $X = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2$, $a > 0$, 有

$$\frac{dX}{dt} = -a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2, \quad \left|\frac{dX}{dt}\right| = a,$$

$$t = \frac{dX}{dt}\Big/\left|\frac{dX}{dt}\right| = -(\sin t)e_1 + (\cos t)e_2,$$

且 $$k = \dot{t} = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} = \frac{dt}{dt}\Big/\left|\frac{dX}{dt}\right| = -\frac{1}{a}((\cos t)e_1 + (\sin t)e_2).$$

注意, 这个 k 是指向原点的、曲率 $|\varkappa| = |k| = 1/a$ 是一个常数, 曲率半径 $\rho = 1/|\varkappa| = a$. 因此, 圆的曲率半径就是该圆的半径.

例 4.4 沿着螺线 $X = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + bte_3$, $a > 0$, $b \neq 0$, 有

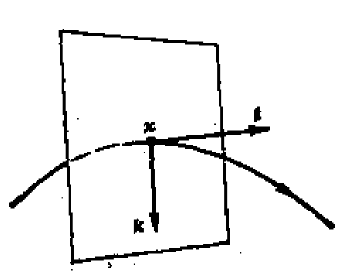


图 4-3

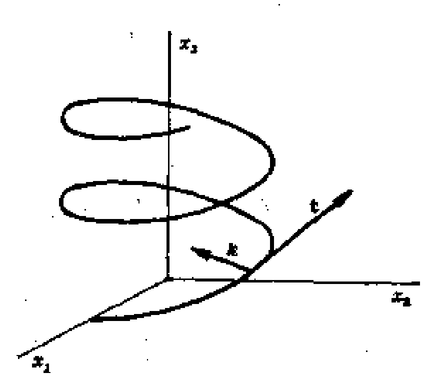


图 4-4

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3,$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=(a^2+b^2)^{1/2},$$

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3),$$

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}&=\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|\\&=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a(\cos t)\boldsymbol{e}_1-a(\sin t)\boldsymbol{e}_2)/(a^2+b^2)^{1/2}\\&=-\frac{a}{a^2+b^2}((\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2).\end{aligned}$$

注意，这个 $\boldsymbol{k}$ 平行于 x_1x_2 平面且指向原点，如图 4-4 所示．曲率是常数且等于

$$|\varkappa|=|\boldsymbol{k}|=a/(a^2+b^2).$$

若沿曲线 C 的曲率恒等于零，即若 $|\boldsymbol{k}|\equiv0$，则 $\dot{\boldsymbol{t}}\equiv\boldsymbol{0}$，积分得

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}=\text{常向量}\neq\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{t}=\dot{\boldsymbol{X}}$，再次积分，有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}=\text{常向量},$$

即 C 是通过 $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 且平行于 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 的直线．相反地，如果 C 是直线

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},$$

则

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

且

$$|\boldsymbol{k}|=|\dot{\boldsymbol{t}}|=0.$$

于是我们有

定理 4.1 一条类 $\geqslant2$ 的正则曲线是直线的充分必要条件是它的曲率恒等于零．

可以直接用任意参数表示的导数来表达曲率，在问题 4.7 中，我们证明

定理 4.2 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 是类 $\geqslant2$ 的曲线的任意参数表示，则

$$|\varkappa|=|\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''|/|\boldsymbol{X}'|^3.$$

4. 单位主法向量

设 C 是类 $\geqslant2$ 的曲线，曲率向量 $\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}=\ddot{\boldsymbol{X}}$ 沿着 C 连续地变化，$\boldsymbol{k}$ 的单位向量

$$\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|,$$

在 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ 时不确定，并且它可以跳跃，见后面的例子．因此，我们考虑的不是 $\boldsymbol{u}_k$ 本身，而是平行于 $\boldsymbol{k}$ 的单位向量，它的方向可以任选，但要在 C 上处处能够连续．这个向量将记作 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(s)$，且称它为 C 在点 $\boldsymbol{X}(s)$ 的单位主法向量．

注意，若 C 上没有逗留点，即对一切 s，$\boldsymbol{k}(s)\neq\boldsymbol{0}$，我们可以直接选取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}(s)/|\boldsymbol{k}(s)|,$$

即选取 $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{k}$ 的方向上的单位向量．还需注意，对于直线，有 $\boldsymbol{k}\equiv\boldsymbol{0}$，因而单位主法向量 $\boldsymbol{n}$ 是不确定的．

选定 $\boldsymbol{n}(s)$ 后，在 C 上将会有一个连续的函数 $\varkappa(s)$ 使

$$\boldsymbol{k}(s)=\varkappa(s)\boldsymbol{n}(s),\tag{4.6}$$

在曲线的某一点处，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 同向，就有 $\varkappa=|\boldsymbol{k}|$；当 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 反向，就有 $\varkappa=-|\boldsymbol{k}|$；在逗留点上，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ 且 $\varkappa=0$.

由等式(4.6)定义的量 $\varkappa(s)$ 也称为 C 在点 $\boldsymbol{X}(s)$ 的曲率，但要注意，由于 $\boldsymbol{n}$ 的方向最初是任意的，故函数 $\varkappa(s)$ 可能差一个符号；局部地说，仅仅它的绝对值 $|\varkappa|=|\boldsymbol{k}|$，即前面所定义的曲率，是曲线的一个内在性质.

若用 $\boldsymbol{n}$ 点乘等式(4.6)两边，且应用 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{n}|^2=1$，可得到如下公式

$$\varkappa=\boldsymbol{k}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s). \tag{4.7}$$

例 4.5 如图 4-5 所示，沿三次曲线

$$\boldsymbol{X}=t\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{3}t^3\boldsymbol{e}_2,$$

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{e}_1+t^2\boldsymbol{e}_2,$$

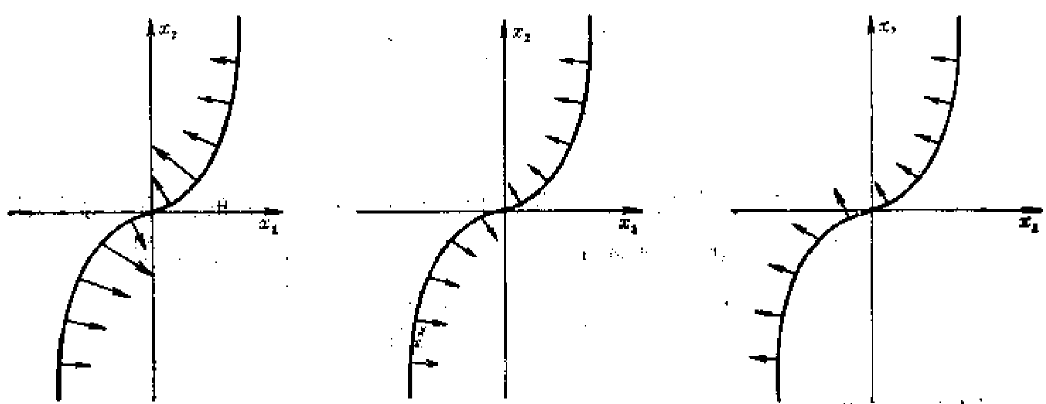
$$\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=(1+t^4)^{1/2},$$

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=(1+t^4)^{-1/2}(\boldsymbol{e}_1+t^2\boldsymbol{e}_2)$$

和

$$\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=-2t(1+t^4)^{-2}(t^2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2),$$

$\boldsymbol{k}$ 的方向如图 4-5(a)所示.



(a) 向量 $\boldsymbol{k}$　(b) 向量 $\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$　(c) 向量 $\boldsymbol{n}=\begin{cases}-\boldsymbol{u}_k, & 当\ t<0\\ \boldsymbol{e}_2, & 当\ t=0\\ \boldsymbol{u}_k, & 当\ t>0\end{cases}$

图 4-5

在 $t=0$，有 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ 且是一个拐点，这里，$\boldsymbol{u}_k$ 存在一个如图 4-5(b)所示的方向上的跳跃，因为当 t 通过正的 t 趋近于 0 时，$\boldsymbol{u}_k$ 的极限是

$$\lim_{t\to0^+}\boldsymbol{u}_k=\lim_{t\to0^+}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}=\lim_{t\to0^+}\frac{-t}{|t|(1+t^4)^{1/2}}(t^2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\lim_{t\to0^+}\frac{-(t^2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)}{(1+t^4)^{1/2}}=\boldsymbol{e}_2,$$

而当 t 通过负的 t 趋近于 0 时，$\boldsymbol{u}_k$ 的极限是

$$\lim_{t\to0^-}\boldsymbol{u}_k=\lim_{t\to0^-}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}=\lim_{t\to0^-}\frac{-t}{|t|(1+t^4)^{1/2}}(t^2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\lim_{t\to0^-}\frac{t^2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2}{(1+t^4)^{1/2}}=-\boldsymbol{e}_2,$$

这里应用了 $\dfrac{t}{|t|}=\begin{cases}1, & 当\ t>0,\\ -1, & 当\ t<0.\end{cases}$ 若我们选取

$$\boldsymbol{n}=\begin{cases}-\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|, & 当 t<0,\\ \boldsymbol{e}_2, & 当 t=0,\\ \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|, & 当 t>0\end{cases}=-(1+t^4)^{-1/2}(t^2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2),$$

$\boldsymbol{n}$ 在曲线上将连续地变化，如图 4–5(c)所示．由等式(4.7)，对这个 $\boldsymbol{n}$ 有

$$\varkappa=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}=[-2t(1+t^4)^{-2}(t^2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)]\cdot[-(1+t^4)^{-1/2}(t^2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)]=2t(1+t^4)^{-3/2}.$$

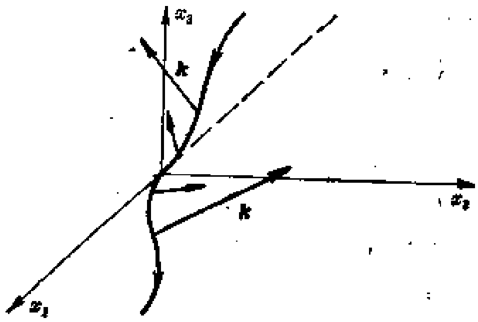


图 4-6

例 4.6. 研究 C^∞ 类曲线(参见例 3.13)：

$$\boldsymbol{X}=\begin{cases}t\boldsymbol{e}_1+e^{-1/t^2}\boldsymbol{e}_3, & 当 t<0,\\ \boldsymbol{0}, & 当 t=0,\\ t\boldsymbol{e}_1+e^{-1/t^2}\boldsymbol{e}_2, & 当 t>0,\end{cases}$$

如图 4–6 所示，当 $t<0$ 这曲线位于 x_1x_3 平面上，而当 $t>0$ 曲线位于 x_1x_2 平面上，由此得出，当 $t<0$，$\boldsymbol{k}$ 位于 x_1x_3 平面，$t>0$ 则位于 x_1x_2 平面．因为 $\boldsymbol{u}_k$ 从 x_1x_3 平面跳跃到 x_1x_2 平面，所以要定义 $\boldsymbol{n}$ 使它在 $t=0$ 处连续是不可能的．

从上例知道，即使是 C^∞ 类的曲线，在逗留点也可能没有确定的主法向量．可是如果曲线是解析的，则连续的主法向量总是存在．在问题 4.15 中，我们证明

定理 4.3 一条不是直线的解析曲线，在逗留点的一个邻域中有确定的连续单位主法向量．

5. 主法线和密切平面

如图 4–7 所示，通过曲线 C 上的点 $\boldsymbol{X}$ 且平行于单位主法向量的直线就叫 C 在 $\boldsymbol{X}$ 的主法线，由此可得在 $\boldsymbol{X}$ 的主法线方程是

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{n},\quad -\infty<k<\infty. \tag{4.8}$$

过 $\boldsymbol{X}$ 平行于单位切向量和单位主法向量的平面称为 C 在 $\boldsymbol{X}$ 处的密切平面．由例 2.3，利用混合积得出在 $\boldsymbol{X}$ 处的密切面方程是

$$[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}]=0. \tag{4.9}$$

注意到 $\boldsymbol{t}=\dot{\boldsymbol{X}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{t}}=\ddot{\boldsymbol{X}}$ 平行于 $\boldsymbol{n}$，则在 $\varkappa\neq0$ 的点，密切平面的方程还可写为

$$[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\dot{\boldsymbol{X}}\ddot{\boldsymbol{X}}]=0. \tag{4.10}$$

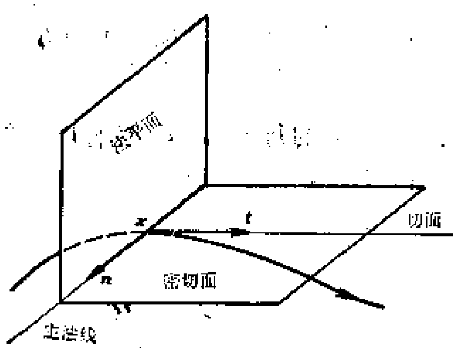


图 4-7

我们记得，所谓曲线在某一点的切线，可定义作通过该点邻近的两点的割线，当这两点趋于给定点时的极限位置．这样得到的切线，它的方向和曲线在该点的方向最吻合，类似地，在某点的密切平面也可定义为过该点邻近的曲线上三个点的平面，当这三点趋于给定点时的极限位置．切线和密切面是和曲线有一定切触阶的几何图形的实例．曲线和曲面两者间切触理论，将在下一章研究，届时我们将用这种观点再研究密切平面．

例 4.7. 考虑螺旋线

$$\boldsymbol{X}=(\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{X}'=(-\sin t)\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\quad |\boldsymbol{X}'|=\sqrt{2},$$

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{X}'/|\boldsymbol{X}'|=(1/\sqrt{2})((-\sin t)\boldsymbol{e}_1+(\cos t)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$$

和
$$\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{t}'/|\boldsymbol{X}'|=-\left(\frac{1}{2}\right)((\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2),$$

因为对一切 t, $\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|=-((\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2),$$

在 $t=\pi/2$ 的主法线方程是

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}(\pi/2)+k\boldsymbol{n}(\pi/2)$$

即
$$\boldsymbol{Y}=(1-k)\boldsymbol{e}_2+\pi/2\boldsymbol{e}_3,\quad -\infty<k<\infty.$$

在 $t=\pi/2$ 的密切平面方程是

$$[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}(\pi/2))\boldsymbol{t}(\pi/2)\boldsymbol{n}(\pi/2)]=0$$

或
$$\begin{vmatrix} y_1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ y_2-1 & 0 & -1 \\ y_3-\pi/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=0,$$

即
$$y_1+y_3=\pi/2.$$

6. 副法线，活动三棱形

设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是类 $\geqslant 2$ 的正则曲线 C，沿着曲线 C，$\boldsymbol{n}$ 连续变化，则在 C 上的每一点，有两个正交且连续的单位切向量 $\boldsymbol{t}$ 和单位主法向量 $\boldsymbol{n}$. 现在考虑向量

$$\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s),$$

注意 $\boldsymbol{b}$ 是连续的且具有单位长度，而 $(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b})$ 构成一个右手系的正交三向量组，如图 4-8 所示. 向量 $\boldsymbol{b}(s)$ 称为 C 在点 $\boldsymbol{X}(s)$ 的*单位副法向量*，三向量组 $(\boldsymbol{t}(s),\ \boldsymbol{n}(s),\ \boldsymbol{b}(s))$ 就称为 C 的*活动三棱形*.

通过 $\boldsymbol{X}$ 且平行于 $\boldsymbol{b}$ 的直线称为 C 在 $\boldsymbol{X}$ 的*副法线*. 在 $\boldsymbol{X}$ 的副法线方程是

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{b},\quad -\infty<k<\infty. \tag{4.11}$$

通过 C 上的点 $\boldsymbol{X}$ 且平行于 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的平面称为在 $\boldsymbol{X}$ 的*从切面*. 在 $\boldsymbol{X}$ 的从切面的方程是

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{n}=0. \tag{4.12}$$

这样在 C 上的每一点 $\boldsymbol{X}$，就有以下的三条特征直线和三个特征平面：

切线: $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{t}$;

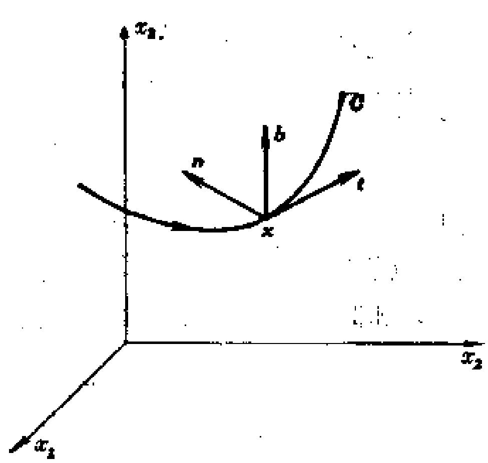


图 4-8

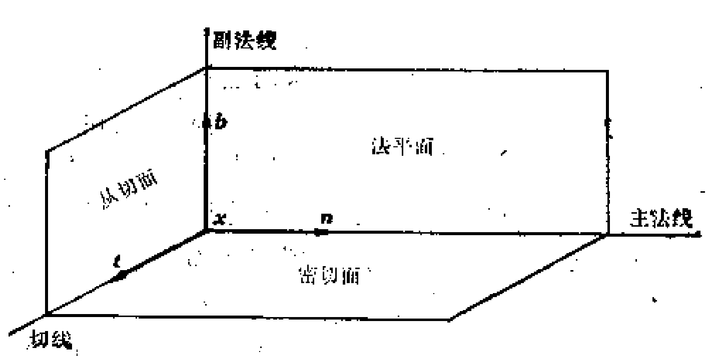


图 4-9

主法线：$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{n}$;

副法线：$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{b}$;

法平面：$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{t}=0$;

从切面：$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{n}=0$;

密切面：$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{b}=0$.

例 4.8 在例 4.4 中螺线

$$\boldsymbol{X}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3,\ a>0,\ b\neq 0,$$

有

$$\boldsymbol{t}=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3),$$

$$\boldsymbol{k}=-\frac{a}{a^2+b^2}((\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2),$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}=-((\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2),$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & -a(a^2+b^2)^{-1/2}\sin t & -\cos t\\ \boldsymbol{e}_2 & a(a^2+b^2)^{-1/2}\cos t & -\sin t\\ \boldsymbol{e}_3 & b(a^2+b^2)^{-1/2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=(a^2+b^2)^{-1/2}(b(\sin t)\boldsymbol{e}_1-b(\cos t)\boldsymbol{e}_2+a\boldsymbol{e}_3),$$

所以在 $t=t_0$ 的副法线方程是

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}(t_0)+k\boldsymbol{b}(t_0),$$

即

$$\boldsymbol{Y}=(a\cos t_0+kb(a^2+b^2)^{-1/2}\sin t_0)\boldsymbol{e}_1+(a\sin t_0-kb(a^2+b^2)^{-1/2}\cos t_0)\boldsymbol{e}_2+(bt_0+ak(a^2+b^2)^{-1/2})\boldsymbol{e}_3,\ -\infty<k<\infty,$$

若引进参数

$$\theta=k(a^2+b^2)^{-1/2},$$

$$\boldsymbol{Y}=(a\cos t_0+\theta b\sin t_0)\boldsymbol{e}_1+(a\sin t_0-\theta b\cos t_0)\boldsymbol{e}_2+(bt_0+a\theta)\boldsymbol{e}_3,\ -\infty<\theta<\infty,$$

在 $t=t_0$ 的从切面方程是

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}(t_0))\cdot\boldsymbol{n}(t_0)=0,$$

即

$$(y_1-a\cos t_0)(-\cos t_0)+(y_2-a\sin t_0)(-\sin t_0)=0,$$

或

$$y_1\cos t_0+y_2\sin t_0=a,$$

可以看出从切面平行于 x_3 轴.

7. 挠　率

现在我们假定 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是类 $\geqslant 3$ 的正则曲线，它的 $\boldsymbol{n}(s)$ 是 C^1 类的，则对 $\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$ 微分，得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{b}}(s)&=\dot{\boldsymbol{t}}(s)\times\boldsymbol{n}(s)+\boldsymbol{t}(s)\times\dot{\boldsymbol{n}}(s)=k(s)[\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{n}(s)]+\boldsymbol{t}(s)\times\dot{\boldsymbol{n}}(s)\\&=\boldsymbol{t}(s)\times\dot{\boldsymbol{n}}(s),\end{aligned}\tag{4.13}$$

这里运用了等式(4.6)和对一切 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量，故 $\dot{\boldsymbol{n}}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$，因而 $\dot{\boldsymbol{n}}$ 平行于从切面，由此得出，$\dot{\boldsymbol{n}}$ 是 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合，设

$$\dot{\boldsymbol{n}}(s)=\mu(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s),$$

代入(4.13)中，

$$\dot{\boldsymbol{b}}(s)=\boldsymbol{t}(s)\times[\mu(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)]=\tau(s)[\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{b}(s)],$$

即

$$\dot{\boldsymbol{b}}(s)=-\tau(s)\boldsymbol{n}(s). \tag{4.14}$$

这里运用了$(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b})$是右手系的正交三向量组，因而$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{n}$.

由(4.14)式定义的连续函数$\tau(s)$称为C在$\boldsymbol{X}(s)$的第二曲率或挠率．注意，如果把(4.14)式两边与$\boldsymbol{n}$取数量积，就得公式

$$\tau=-\dot{\boldsymbol{b}}(s)\boldsymbol{n}(s). \tag{4.15}$$

注意τ的符号与$\boldsymbol{n}$的方向和C的定向无关，因而是曲线的内在性质．为此，我们首先改变$\boldsymbol{n}$的方向，即假定$\boldsymbol{n}^*=-\boldsymbol{n}$，则$\boldsymbol{b}^*=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{t}\times(-\boldsymbol{n})=-\boldsymbol{b}$，且由等式(4.15)，

$$\tau^*=-\dot{\boldsymbol{b}}^*\cdot\boldsymbol{n}^*=-(-\dot{\boldsymbol{b}})\cdot(-\boldsymbol{n})=-\dot{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{n}=\tau.$$

即τ与$\boldsymbol{n}$的方向无关．其次，改变C的定向，即设$s=-s^*+$常数，则$\boldsymbol{t}^*=-\boldsymbol{t}$，又

$$\boldsymbol{b}^*=\boldsymbol{t}^*\times\boldsymbol{n}=-(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n})=-\boldsymbol{b}$$

和
$$\frac{d\boldsymbol{b}^*}{ds^*}=\frac{d\boldsymbol{b}^*}{ds}\frac{ds}{ds^*}=-\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}(-1)=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds},$$

因而又有
$$\tau^*=-\frac{d\boldsymbol{b}^*}{ds^*}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\cdot\boldsymbol{n}=\tau,$$

这正是要证的结论．

例 4.9 我们再来研究螺线

$$\boldsymbol{X}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3,\ a>0,\ b\neq 0.$$

参见例 4.8，有

$$\boldsymbol{b}=(a^2+b^2)^{-1/2}(b(\sin t)\boldsymbol{e}_1-b(\cos t)\boldsymbol{e}_2+a\boldsymbol{e}_3),$$

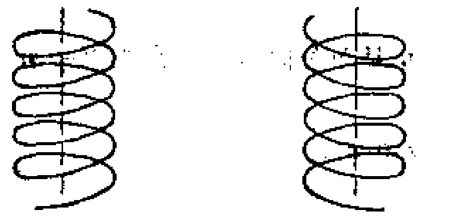
$$\dot{\boldsymbol{b}}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\right|=(a^2+b^2)^{-1}(b(\cos t)\boldsymbol{e}_1+b(\sin t)\boldsymbol{e}_2),$$

$$\begin{aligned}\tau&=-\dot{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{n}=-(a^2+b^2)^{-1}(b(\cos t)\boldsymbol{e}_1+b(\sin t)\boldsymbol{e}_2)\cdot((-\cos t)\boldsymbol{e}_1-(\sin t)\boldsymbol{e}_2)\\&=b/(a^2+b^2),\end{aligned}$$

即挠率是常数．注意，如果$b>0$(因而$\tau>0$)，曲线是右旋螺线，如图 4-10(a)所示；如果$b<0$(因而$\tau<0$)，曲线是左旋螺线，如图 4-10(b)所示．因为τ的符号是内在性质，因此我们断定这样的两条曲线不能叠合．

若沿着曲线$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$挠率恒等于零，即$\tau\equiv 0$，则$\dot{\boldsymbol{b}}=-\tau\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{b}=$常向量$=\boldsymbol{b}_0$．现在考虑

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{b}_0)=\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}_0,$$



(a) 右旋螺线，$\tau>0$　　(b) 左旋螺线，$\tau<0$

图 4-10

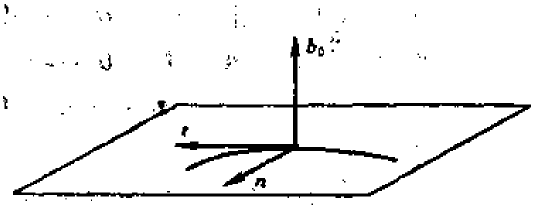


图 4-11

因为 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{b}_0$ 正交，故 $\frac{d}{ds}(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{b}_0)\equiv 0$，积分得

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{b}_0=\text{常数}. \tag{4.16}$$

也就是说，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是平面 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{b}_0=$ 常数上的平面曲线，特别地，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 位于它的密切平面上，见图 4-11. 反过来也是正确的，于是有

定理 4.4 若沿着一条类 $\geqslant 3$ 的曲线，$\boldsymbol{n}$ 是 C^1 类的，则这曲线是平面曲线的充分必要条件是该曲线的挠率恒等于零.

除非特别说明，我们约定今后所讲的曲线都是类 $\geqslant 3$ 的正则曲线，且 $\boldsymbol{n}$ 是 C^1 类的. 在这种情况下可得出 τ 是连续的，并且 $\varkappa$，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}^1$ 都是 C^1 类的.

挠率的一般参数表示也是十分便利的公式，在问题 4.19 中我们证明

定理 4.5 在曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 上 $\varkappa\neq 0$ 的点有

$$\tau=\frac{[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}''']}{|\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''|^2}.$$

8. 球面标形

如图 4-12 所示，沿着曲线 C 的单位切向量生成了一条曲线 Γ，它在以原点为心，半径为 1 的球面上，该曲线 Γ 称为 $\boldsymbol{t}$ 的*球面标形*.

若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是 C 的自然表示，则

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{t}(s)=\dot{\boldsymbol{X}}(s)$$

将是 Γ 的一个表示. 但一般地，s 不是 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{t}(s)$ 的自然参数因为

$$\left|\frac{d\boldsymbol{X}_1}{ds}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right|=|\dot{\boldsymbol{t}}|=|\varkappa|.$$

事实上，$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{t}(s)$ 是 Γ 的自然表示当且仅当沿着 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$，曲率 $|\varkappa|=1$.

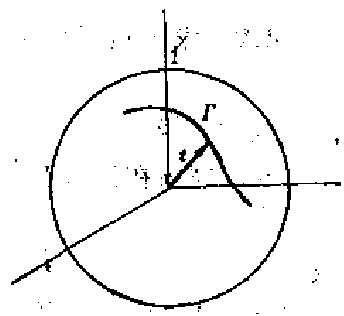


图 4-12

类似地，可以考虑单位法向量 $\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{n}(s)$ 的球面标形和单位副法向量 $\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{b}(s)$ 的球面标形.

例 4.10 参阅例 4.8 和例 4.9，对螺线

$$\boldsymbol{X}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3,\ a>0,\ b\neq 0,$$

有

$$\boldsymbol{t}=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3),$$

$$\boldsymbol{n}=-((\cos t)\boldsymbol{e}_1+(\sin t)\boldsymbol{e}_2),$$

$$\boldsymbol{b}=(a^2+b^2)^{-1/2}(b(\sin t)\boldsymbol{e}_1-b(\cos t)\boldsymbol{e}_2+a\boldsymbol{e}_3),$$

我们看出 $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$ 关于 $\boldsymbol{e}_3$ 的分量都是常数. 因而它们的球面标形都是绕 x_3 轴的圆.

$\boldsymbol{t}$ 的球面标形的半径，也就是曲率半径为

$$\rho_t=\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)=\frac{a}{(a^2+b^2)^{1/2}}.$$

$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的球面标形的曲率半径分别是 $\rho_n=1$ 和

$$\rho_b=\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}.$$

§4.2 问题及其解答

1. 切线和法平面

4.1 求曲线

$$X=(1+t)e_1-t^2e_2+(1+t^3)e_3$$

在 $t=1$ 的切线和法平面的方程.

解:
$$X'=e_1-2te_2+3t^2e_3,$$
$$X(1)=2e_1-e_2+2e_3,$$
$$X'(1)=e_1-2e_2+3e_3,$$

在 $t=1$ 的切线方程是

$$Y=X(1)+kX'(1)$$

或
$$Y=(2+k)e_1-(1+2k)e_2+(2+3k)e_3,$$

法面方程是
$$(Y-X(1))\cdot X'(1)=0$$

或
$$(y_1-2)+(y_2+1)(-2)+(y_3-2)3=0,$$

即
$$y_1-2y_2+3y_3=10.$$

4.2 求 x_1x_2 平面和螺线

$$X=(\cos t)e_1+(\sin t)e_2+te_3 \quad (t>0)$$

的切线的交线.

解: 螺线在任意点 X 的切线是

$$Y=X+kX'$$

或
$$Y=(\cos t-k\sin t)e_1+(\sin t+k\cos t)e_2+(t+k)e_3,$$

以 X 作为定位向量, 有

$$x_1=\cos t-k\sin t,\ x_2=\sin t+k\cos t,\ x_3=t+k,$$

x_1x_2 平面的方程是 $x_3=0$. 因此, 沿该交线 $t+k=0$ 或 $k=-t$. 于是所求的交线就是曲线

$$x_1=\cos t+t\sin t,\ x_2=\sin t-t\cos t,\ x_3=0.$$

4.3 证明沿曲线 $X=ate_1+bt^2e_2+t^3e_3$(其中 $2b^2=3a$) 的切向量和向量 $a=e_1+e_3$ 组成一个定角.

证:
$$X'=ae_1+2bte_2+3t^2e_3,$$
$$|X'|=(a^2+4b^2t^2+9t^4)^{1/2}=(a^2+6at^2+9t^4)^{1/2}=a+3t^2,$$

这里运用了 $2b^2=3a$. 这时切向量 X' 和 a 之间的夹角是

$$\arccos\left\{\frac{(X'\cdot a)}{|X'||a|}\right\}=\arccos\left\{\frac{a+3t^2}{(a+3t^2)\sqrt{2}}\right\}=\arccos(1/\sqrt{2})=\pi/4.$$

4.4 如上题, 若空间曲线的切向量和一个定向量构成定角 α, 则这曲线称为一般螺线或柱面螺线或定倾曲线, 这个定向量称为螺线的轴. 注意 $\alpha=0$ 除外, 因为这时全部切向量相平行, 曲线是直线(见习题 4.28). 证明一般螺线可有如下形式的自然参数表示

$$X=x_1(s^*)e_1+x_2(s^*)e_2+s^*(\cos\alpha)e_3.$$

证: 设螺线通过原点且它的轴平行于 e_3, 则

$$\cos\alpha=\cos\angle(t,e_3)=t\cdot e_3=\dot{X}\cdot e_3=\dot{x}_3,$$

积分 $\dot{x}_3=\cos\alpha$ 得

$$x_3=s\cos\alpha+c,\ c=\text{常数},$$

若 $\alpha\neq\pi/2$，令 $s^*=s+c/(\cos\alpha)$，则 $x_3=s^*\cos\alpha$，于是证得一般螺线有合题意的自然参数表示

$$\boldsymbol{X}=x_1(s^*)\boldsymbol{e}_1+x_2(s^*)\boldsymbol{e}_2+s^*(\cos\alpha)\boldsymbol{e}_3.$$

若 $\alpha=\pi/2$，则因为原点在曲线上，$x_3=c=0$. 于是曲线

$$\boldsymbol{X}=x_1(s)\boldsymbol{e}_1+x_2(s)\boldsymbol{e}_2$$

在 x_1x_2 平面上.

2. 曲 率

4.5 求曲线

$$\boldsymbol{X}=t\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}t^2\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}t^3\boldsymbol{e}_3$$

在点 $t=1$ 上的曲率向量 $\boldsymbol{k}$ 和曲率 $|\varkappa|$.

解:
$$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2+t^2\boldsymbol{e}_3,\quad |\boldsymbol{X}'|=(1+t^2+t^4)^{1/2},$$
$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{X}'/|\boldsymbol{X}'|=(1+t^2+t^4)^{-1/2}(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2+t^2\boldsymbol{e}_3),$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}'&=(1+t^2+t^4)^{-1/2}(\boldsymbol{e}_2+2t\boldsymbol{e}_3)-(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2+t^2\boldsymbol{e}_3)(1+t^2+t^4)^{-3/2}(t+2t^3)\\&=-(1+t^2+t^4)^{-3/2}[(2t^3+t)\boldsymbol{e}_1+(t^4-1)\boldsymbol{e}_2-(t^3+2t)\boldsymbol{e}_3],\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}&=\boldsymbol{t}'/|\boldsymbol{X}'|\\&=-(1+t^2+t^4)^{-2}[(2t^3+t)\boldsymbol{e}_1+(t^4-1)\boldsymbol{e}_2-(t^3+2t)\boldsymbol{e}_3],\end{aligned}$$

在 $t=1$，有
$$\boldsymbol{k}=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)\quad 和\quad |\varkappa|=|\boldsymbol{k}|=\frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

4.6 证明一般螺线(见问题 4.4)到垂直于轴的平面的投影的曲率 $|\varkappa^*|=|\varkappa|/\sin^2\alpha$，其中 $\alpha\neq0$ 是这螺线的切向量和轴的夹角，而 $|\varkappa|$ 是这螺线的曲率.

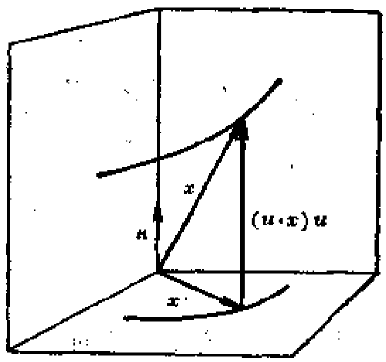


图 4-13

证: 设单位向量 $\boldsymbol{u}$ 是螺线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 的轴，如图 4-13 所示，这螺线在过原点且垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的平面上的投影是曲线

$$\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{X}(s)-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{X}(s))\boldsymbol{u},$$

注意，一般说来 s 并非投影 $\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{X}^*(s)$ 的自然参数. 微分得 $\dfrac{d\boldsymbol{X}^*}{ds}=\boldsymbol{t}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{t}-(\cos\alpha)\boldsymbol{u}$，且

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\boldsymbol{X}^*}{ds}\right|&=\left[\frac{d\boldsymbol{X}^*}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{X}^*}{ds}\right]^{1/2}\\&=[(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t})-2(\cos\alpha)(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u})+(\cos^2\alpha)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})]^{1/2}\\&=[1-2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha]^{1/2}=\sin\alpha,\quad 0<\alpha<\pi,\end{aligned}$$

于是
$$\boldsymbol{t}^*=\frac{d\boldsymbol{X}^*}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}^*}{ds}\right|=\frac{\boldsymbol{t}-(\cos\alpha)\boldsymbol{u}}{\sin\alpha}$$

且
$$\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds}=\dot{\boldsymbol{t}}/\sin\alpha,$$

最后
$$|\varkappa^*|=|\dot{\boldsymbol{t}}^*|=\left|\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds}\right|\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{X}^*}{ds}\right|=|\dot{\boldsymbol{t}}|/\sin^2\alpha=|\varkappa|/\sin^2\alpha.$$

4.7 证明定理 4.2: 沿着类 $\geqslant2$ 的曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$，有

$$|\varkappa| = |X' \times X''|/|X'|^3.$$

证：

$$X' = \frac{dX}{dt} = \frac{dX}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{X}s',$$

$$X'' = \frac{d}{dt}(\dot{X}s') = \dot{X}\frac{ds'}{dt} + s'\frac{d\dot{X}}{dt} = \dot{X}s'' + (s')^2\ddot{X},$$

$$X' \times X'' = (\dot{X}s') \times (\dot{X}s'' + \ddot{X}(s')^2) = (s')^3(\dot{X} \times \ddot{X}) = |X'|^3(\dot{X} \times \ddot{X}),$$

其中 $s' = ds/dt = |X'|$. 这时

$$|X' \times X''| = |X'|^3|\dot{X} \times \ddot{X}| = |X'|^3|\dot{X}||\ddot{X}|\sin\angle(\dot{X}, \ddot{X}),$$

但 $\dot{X} = t$ 和 $\ddot{X} = \dot{t}$ 是正交的, $|\dot{X}| = 1$ 且 $|\ddot{X}| = |\dot{t}| = |\varkappa|$, 因此

$$|\varkappa| = |X' \times X''|/|X'|^3.$$

4.8 证明: 若 $X'(t)$ 和 $X''(t)$ 对一切 t 是线性相关的, 则类 $\geqslant 2$ 的曲线 $X = X(t)$ 是一条直线.

证: 因为若 X' 和 X'' 线性相关, 则

$$|X' \times X''| = 0, \ |\varkappa| = |X' \times X''|/|X'|^3 = 0$$

对一切 t 成立, 因此由定理 4.1, $X = X(t)$ 是直线.

4.9 设 $X = X(s)$ 是类 $\geqslant 2$ 的, 又设 $\Delta\theta$ 表示在 $X(s)$ 及其邻近的点 $X(s+\Delta s)$, $\Delta s > 0$ 处的两个单位切向量 $t(s)$ 和 $t(s+\Delta s)$ 之间的夹角, 如图 4-14(a) 所示. 证明曲率

$$|\varkappa| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s},$$

即 $|\varkappa|$ 是切线方向对弧长的变化率的一个量度.

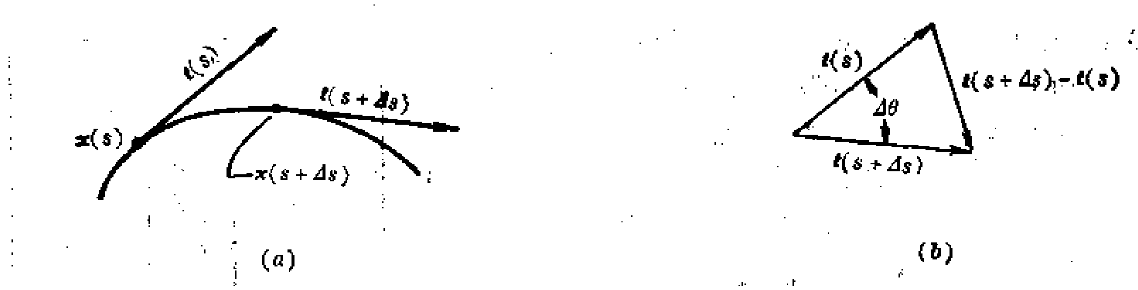


图 4-14

证: 因为 t 是单位向量, $|t(s+\Delta s) - t(s)|$ 是腰为单位长的等腰三角形的底, 如图 4-4(b), 因此

$$|t(s+\Delta s) - t(s)| = 2\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\theta\right) = \Delta\theta + o(\Delta\theta),$$

这里用了正弦函数的 Taylor 展式. 此时

$$|\varkappa| = |\dot{t}| = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{t(s+\Delta s) - t(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{t(s+\Delta s) - t(s)}{\Delta s}\right|$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta + 0(\Delta\theta)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\left[\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\left(1 + \frac{o(\Delta\theta)}{\Delta\theta}\right)\right],$$

因为 $\lim_{\Delta s \to 0} \Delta\theta = 0$, 故

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{o(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = 0,$$

且
$$|\varkappa|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

4.10 证明：若类 $\geqslant 2$ 的曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 的所有切线共点，则这曲线是直线.

证：假定 $\boldsymbol{Y}_0$ 是切线 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}(s)+k\boldsymbol{t}(s)$ 的公共点，则对曲线上每一 s，存在 $k=k(s)$ 使
$$\boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{X}(s)+k(s)\boldsymbol{t}(s),$$
注意，对于切线 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}(s)+k\boldsymbol{t}(s)$；$k=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{Y}$ 在曲线上. 若设曲线局部地说是简单的，此时，除了 s 的某个值 s_0 外，$k(s)\neq 0$ 成立，微分上式
$$\boldsymbol{0}=\dot{\boldsymbol{X}}+\dot{k}\boldsymbol{t}+k\dot{\boldsymbol{t}}=(1+\dot{k})\boldsymbol{t}+k\dot{\boldsymbol{t}},$$
用 $\dot{\boldsymbol{t}}$ 乘两边，
$$0=(1+\dot{k})(\boldsymbol{t}\cdot\dot{\boldsymbol{t}})+k(\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\dot{\boldsymbol{t}}),$$
因为 $\dot{\boldsymbol{t}}$ 垂直于 $\boldsymbol{t}$，故 $0=k|\dot{\boldsymbol{t}}|^2$ 或 $0=k|k|^2$. 因为当 $s\neq s_0$，$k(s)\neq 0$，故当 $s\neq s_0$，$|\varkappa|=0$. 但 $|\varkappa|$ 是连续的，因此对一切 s，$|\varkappa|=0$，由定理 4.1 知，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是直线.

3. 活动三棱形

4.11 求曲线
$$\boldsymbol{X}=(3t-t^3)\boldsymbol{e}_1+3t^2\boldsymbol{e}_2+(3t+t^3)\boldsymbol{e}_3$$
的连续主法单位向量和副法单位向量.

解：
$$\boldsymbol{X}'=(3-3t^2)\boldsymbol{e}_1+6t\boldsymbol{e}_2+(3+3t^2)\boldsymbol{e}_3,$$
$$|\boldsymbol{X}'|=3[(1-t^2)^2+(2t)^2+(1+t^2)^2]^{1/2}$$
$$=3\sqrt{2}(1+2t^2+t^4)^{1/2}=3\sqrt{2}(1+t^2),$$
$$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{X}'}{|\boldsymbol{X}'|}=\frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}[(1-t^2)\boldsymbol{e}_1+2t\boldsymbol{e}_2+(1+t^2)\boldsymbol{e}_3],$$
$$\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}=\frac{\boldsymbol{t}'}{|\boldsymbol{X}'|}=\frac{-2t\boldsymbol{e}_1+(1-t^2)\boldsymbol{e}_2}{3(1+t^2)^3},$$
$$|\boldsymbol{k}|=\frac{[(2t)^2+(1-t^2)^2]^{1/2}}{3(1+t^2)^3}=\frac{1}{3(1+t^2)^2}.$$
因为对一切 t，$\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}$，可选取
$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}=\frac{-2t}{1+t^2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\boldsymbol{e}_2,$$
和
$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)^2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & 1-t^2 & -2t\\ \boldsymbol{e}_2 & 2t & 1-t^2\\ \boldsymbol{e}_3 & 1+t^2 & 0\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)^2}[-(1+t^2)(1-t^2)\boldsymbol{e}_1-2t(1+t^2)\boldsymbol{e}_2+(1+t^2)^2\boldsymbol{e}_3]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}[(t^2-1)\boldsymbol{e}_1-2t\boldsymbol{e}_2+(1+t^2)\boldsymbol{e}_3].$$

4.12 证明在曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 上，向量 $\boldsymbol{X}''$ 平行于密切面并且它在 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 上的分量分别是 $|\boldsymbol{X}'|'$ 和 $\varkappa|\boldsymbol{X}'|^2$.

证：将 $\boldsymbol{X}'=\dfrac{d\boldsymbol{X}}{ds}\dfrac{ds}{dt}=\boldsymbol{t}s'$ 对 t 求导得
$$\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{t}s''+\boldsymbol{t}'s'=\boldsymbol{t}s''+\dot{\boldsymbol{t}}s'^2=\boldsymbol{t}s''+\boldsymbol{n}\varkappa s'^2,$$

这里用了由等式(4.6)得到的 $\dot{\boldsymbol{t}}=\kappa\boldsymbol{n}$. 由此知 $\boldsymbol{X}''$ 平行密切面且它在 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 上的分量分别是 $|\boldsymbol{X}'|'=s''$ 和 $\kappa|\boldsymbol{X}'|^2=\kappa s'^2$.

4.13 (a)若在曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 上一点 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}'$ 和 $\boldsymbol{X}''$ 线性无关，证明在 $\boldsymbol{X}$ 的密切面是 $[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'']=0$. (b)运用此公式求曲线 $\boldsymbol{X}=t\boldsymbol{e}_1+t^2\boldsymbol{e}_2+t^3\boldsymbol{e}_3$ 在 $t=1$ 处的密切面.

证：(a) 我们从上题中看到 $\boldsymbol{X}''$ 平行密切面，且知 $\boldsymbol{X}'$ 是 $\boldsymbol{t}$ 的倍数，故 $\boldsymbol{X}'$ 平行密切面. 因为已知 $\boldsymbol{X}'$ 和 $\boldsymbol{X}''$ 线性无关，可得 $\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''$ 是垂直于 $\boldsymbol{X}$ 处密切面的非零向量，因此在 $\boldsymbol{X}$ 处的密切面方程是 $[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'']=0$.

(b) $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{e}_1+2t\boldsymbol{e}_2+3t^2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{X}''=2\boldsymbol{e}_2+6t\boldsymbol{e}_3$, 于是在 $t=1$ 处的密切面方程是

$$[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}(1))\boldsymbol{X}'(1)\boldsymbol{X}''(1)]=0,$$

或
$$\begin{vmatrix} y_1-1 & 1 & 0 \\ y_2-1 & 2 & 2 \\ y_3-1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

由此
$$(y_1-1)6-(y_2-1)6+(y_3-1)2=0$$

或
$$3y_1-3y_2+y_3=1.$$

4.14 证明螺线

$$\boldsymbol{X}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3$$

上其密切面通过一固定点的所有点在同一平面上.

证：设
$$\boldsymbol{X}_\lambda=a(\cos t_\lambda)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t_\lambda)\boldsymbol{e}_2+bt_\lambda\boldsymbol{e}_3$$

表示在螺线上这样的点，其上的密切面通过定点

$$\boldsymbol{Y}_0=y_{01}\boldsymbol{e}_1+y_{02}\boldsymbol{e}_2+y_{03}\boldsymbol{e}_3.$$

容易证明，对所有 t, $\boldsymbol{X}'$ 和 $\boldsymbol{X}''$ 都是线性无关的. 于是在 $\boldsymbol{X}$ 处的密切面方程是

$$[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'']=0,$$

故对每一 λ,

$$[(\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X}(t_\lambda))\boldsymbol{X}'(t_\lambda)\boldsymbol{X}''(t_\lambda)]=0,$$

或
$$\begin{vmatrix} y_{01}-a\cos t_\lambda & -a\sin t_\lambda & -a\cos t_\lambda \\ y_{02}-a\sin t_\lambda & a\cos t_\lambda & -a\sin t_\lambda \\ y_{03}-bt_\lambda & b & 0 \end{vmatrix}=0,$$

或展开得
$$(by_{02})(a\cos t_\lambda)-(by_{01})(a\sin t_\lambda)+(a^2)(bt_\lambda)=a^2y_{03},$$

因此
$$\boldsymbol{X}_\lambda=a(\cos t_\lambda)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t_\lambda)\boldsymbol{e}_2+bt_\lambda\boldsymbol{e}_3$$

位于平面 $by_{02}x_1-by_{01}x_2+a^2x_3=a^2y_{03}$ 上.

4.15 证明定理 4.3. 若 $\boldsymbol{X}(s_0)$ 是非直线的解析曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 上的一个逗留点，则在 s_0 的某邻域中，曲线存在连续的单位主法向量 $\boldsymbol{n}(s)$.

证：设 $\boldsymbol{X}^{(k)}(s_0)$ 是 $\boldsymbol{X}(s)$ 在 s_0 的第一个 $k>1$ 阶非零导数. 因为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 非直线，这样的非零导数存在. 其实，$k>2$, 因为在逗留点 $\dot{\boldsymbol{t}}(s_0)=\ddot{\boldsymbol{X}}(s_0)=\boldsymbol{0}$. 这样，我们可写出：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s_0)+\dot{\boldsymbol{X}}(s_0)(s-s_0)+\frac{\boldsymbol{X}^{(k)}(s_0)}{k!}(s-s_0)^k+\frac{\boldsymbol{X}^{(k+1)}(s_0)(s-s_0)^{k+1}}{(k+1)!}+\cdots,$$

则
$$\boldsymbol{t}=\dot{\boldsymbol{X}}=\dot{\boldsymbol{X}}(s_0)+\frac{\boldsymbol{X}^{(k)}(s_0)(s-s_0)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{\boldsymbol{X}^{(k+1)}(s_0)(s-s_0)^k}{k!}+\cdots$$

和
$$\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}=\frac{\boldsymbol{X}^{(k)}(s_0)(s-s_0)^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{\boldsymbol{X}^{(k+1)}(s_0)(s-s_0)^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots$$
$$=(s-s_0)^{k-2}\left[\frac{\boldsymbol{X}^{(k)}(s_0)}{(k-2)!}+\frac{\boldsymbol{X}^{(k+1)}(s_0)(s-s_0)}{(k-1)!}+\cdots\right]$$
$$=(s-s_0)^{k-2}\boldsymbol{W}(s),$$
这里 $\boldsymbol{W}(s)$在 s_0 是解析的, 且
$$\boldsymbol{W}(s_0)=\frac{\boldsymbol{X}^{(k)}(s_0)}{(k-2)!}\neq 0.$$
因为 $\boldsymbol{W}(s)$在 s_0 必定连续, 故存在一个邻域 $s_\delta(s_0)$, 使对 $s_\delta(s_0)$中的 s, $\boldsymbol{W}(s)\neq\boldsymbol{0}$. 现在考虑向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{W}(s)/|\boldsymbol{W}(s)|$, 对于 $s_\delta(s_0)$中的 s, 向量 $\boldsymbol{n}$ 是连续的并具有单位长度, 且 $\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 共线, 因为
$$\boldsymbol{k}=(s-s_0)^{k-2}\boldsymbol{W}(s)=(s-s_0)^{k-2}|\boldsymbol{W}(s)|\frac{\boldsymbol{W}(s)}{|\boldsymbol{W}(s)|}=(s-s_0)^{k-2}|\boldsymbol{W}(s)|\boldsymbol{n}=\varkappa(s)\boldsymbol{n},$$
这正是符合要求的结果. 注意, 对这样的 $\boldsymbol{n}$, $\varkappa=|\boldsymbol{k}|$当且仅当 k为偶数($(s-s_0)^{k-2}\geqslant 0$). 当 k 为奇数时,
$$\varkappa=\begin{cases}|\boldsymbol{k}|, & 当\ s\geqslant s_0\\ -|\boldsymbol{k}|, & 当\ s<s_0.\end{cases}$$

4. 挠　　率

4.16 应用定理 4.2 和 4.5 的公式, 求曲线
$$\boldsymbol{X}=(3t-t^3)\boldsymbol{e}_1+3t^2\boldsymbol{e}_2+(3t+t^3)\boldsymbol{e}_3$$
的曲率和挠率.

解:
$$|\varkappa|=\frac{|\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''|}{|\boldsymbol{X}'|^3}$$
$$=\frac{|[(3-3t^2)\boldsymbol{e}_1+6t\boldsymbol{e}_2+(3+3t^2)\boldsymbol{e}_3]\times[-6t\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2+6t\boldsymbol{e}_3]|}{|(3-3t^2)\boldsymbol{e}_1+6t\boldsymbol{e}_2+(3+3t^2)\boldsymbol{e}_3|^3}$$
$$=\frac{18|(t^2-1)\boldsymbol{e}_1-2t\boldsymbol{e}_2+(1+t^2)\boldsymbol{e}_3|}{27|(1-t^2)\boldsymbol{e}_1+2t\boldsymbol{e}_2+(1+t^2)\boldsymbol{e}_3|^3}=\frac{1}{3(1+t^2)^2},$$
$$\tau=\frac{(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}''')}{|\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''|^2}=\frac{(\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}'')\cdot\boldsymbol{X}'''}{|\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''|^2}$$
$$=\frac{18[(t^2-1)\boldsymbol{e}_1-2t\boldsymbol{e}_2+(1+t^2)\boldsymbol{e}_3]\cdot 6[-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3]}{18^2|(t^2-1)\boldsymbol{e}_1-2t\boldsymbol{e}_2+(1+t^2)\boldsymbol{e}_3|^2}$$
$$=\frac{1}{3(1+t^2)^2}.$$
注意, 沿此曲线, $|\varkappa|=\tau$.

4.17 证明沿曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$,
$$\dddot{\boldsymbol{X}}=-\varkappa^2\boldsymbol{t}+\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}+\varkappa\tau\boldsymbol{b}.$$
证: 微分 $\ddot{\boldsymbol{X}}=\dot{\boldsymbol{t}}=\varkappa\boldsymbol{n}$, 有
$$\dddot{\boldsymbol{X}}=\varkappa\dot{\boldsymbol{n}}+\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}=\varkappa\frac{d}{ds}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t})+\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}=\varkappa(\boldsymbol{b}\times\dot{\boldsymbol{t}}+\dot{\boldsymbol{b}}\times\boldsymbol{t})+\dot{\varkappa}\boldsymbol{n},$$
这里运用了 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ 是右手系正交三向量组, 因此 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}$. 再运用 $\dot{\boldsymbol{t}}=\varkappa\boldsymbol{n}$ 和 $\dot{\boldsymbol{b}}=-\tau\boldsymbol{n}$, 有
$$\dddot{\boldsymbol{X}}=\varkappa^2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})-\varkappa\tau(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})+\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}=\varkappa^2(-\boldsymbol{t})+\varkappa\tau\boldsymbol{b}+\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}.$$

4.18 证明沿曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$, $[\dot{\boldsymbol{X}}\ddot{\boldsymbol{X}}\dddot{\boldsymbol{X}}]=\varkappa^2\tau$.

证：运用上题的结果，注意到 $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ 是右手系正交三向量组，有

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{X}}\times\dddot{\boldsymbol{X}}=\dot{\boldsymbol{t}}\times\dddot{\boldsymbol{X}}&=\varkappa\boldsymbol{n}\times(-\varkappa^2\boldsymbol{t}+\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}+\tau\varkappa\boldsymbol{b})\\&=-\varkappa^3(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})+\varkappa\dot{\varkappa}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})+\tau\varkappa^2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b})\\&=\varkappa^3\boldsymbol{b}+\tau\varkappa^2\boldsymbol{t},\end{aligned}$$

最后，
$$[\dot{\boldsymbol{X}}\ddot{\boldsymbol{X}}\dddot{\boldsymbol{X}}]=\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\ddot{\boldsymbol{X}}\times\dddot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{t}\cdot\ddot{\boldsymbol{X}}\times\dddot{\boldsymbol{X}}=\varkappa^3(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b})+\tau\varkappa^2(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t})=\tau\varkappa^2,$$
这里用 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 和 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$.

4.19 证明定理 4.5：在曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 上 $\varkappa\neq0$ 的点的挠率是

$$\tau=\frac{[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}''']}{|\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''|^2}.$$

证：
$$\dot{\boldsymbol{X}}=\frac{d\boldsymbol{X}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\,\frac{dt}{ds}=\boldsymbol{X}'\dot{t},$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}}=\frac{d}{ds}(\boldsymbol{X}'\dot{t})=\boldsymbol{X}'\ddot{t}+\left(\frac{d}{ds}\,\boldsymbol{X}'\right)\dot{t}=\boldsymbol{X}'\ddot{t}+\boldsymbol{X}''\dot{t}^2,$$

$$\begin{aligned}\dddot{\boldsymbol{X}}=\frac{d}{ds}(\boldsymbol{X}'\ddot{t}+\boldsymbol{X}''\dot{t}^2)&=\boldsymbol{X}'\dddot{t}+\boldsymbol{X}''\dot{t}\ddot{t}+\boldsymbol{X}''2\dot{t}\ddot{t}+\boldsymbol{X}'''\dot{t}^3\\&=\boldsymbol{X}'\dddot{t}+3\boldsymbol{X}''\dot{t}\ddot{t}+\boldsymbol{X}'''\dot{t}^3,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}[\dot{\boldsymbol{X}}\ddot{\boldsymbol{X}}\dddot{\boldsymbol{X}}]&=(\boldsymbol{X}'\dot{t})\cdot(\boldsymbol{X}'\ddot{t}+\boldsymbol{X}''\dot{t}^2)\times(\boldsymbol{X}'\dddot{t}+3\boldsymbol{X}''\dot{t}\ddot{t}+\boldsymbol{X}'''\dot{t}^3)\\&=(\boldsymbol{X}'\dot{t})\cdot[3\ddot{t}^2\dot{t}(\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}'')+\ddot{t}\dot{t}^3(\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''')+\dot{t}^2\dddot{t}(\boldsymbol{X}''\times\boldsymbol{X}')+\dot{t}^5(\boldsymbol{X}''\times\boldsymbol{X}''')]\\&=3\dot{t}^2\ddot{t}^2[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'']+\ddot{t}\dot{t}^4[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''']+\dot{t}^3\dddot{t}[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}']+\dot{t}^6[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}'''],\end{aligned}$$

因为
$$[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'']=0,\ [\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''']=0,$$

$$[\dot{\boldsymbol{X}}\ddot{\boldsymbol{X}}\dddot{\boldsymbol{X}}]=\dot{t}^6[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}''']\quad 或\quad [\dot{\boldsymbol{X}}\ddot{\boldsymbol{X}}\dddot{\boldsymbol{X}}]=\frac{[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}''']}{|\boldsymbol{X}'|^6},$$

这是因为
$$\dot{t}=\frac{dt}{ds}=\frac{1}{ds/dt}=\frac{1}{|\boldsymbol{X}'|}.$$

运用上题结果和 $\varkappa=\dfrac{|\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''|}{|\boldsymbol{X}'|^3}$ (定理 4.2)，有

$$\tau=\frac{[\dot{\boldsymbol{X}}\ddot{\boldsymbol{X}}\dddot{\boldsymbol{X}}]}{\varkappa^2}=\frac{[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}''']}{\varkappa^2|\boldsymbol{X}'|^6}=\frac{[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''\boldsymbol{X}''']}{|\boldsymbol{X}'\times\boldsymbol{X}''|^2}.$$

4.20 证明若一条曲线的所有密切面有公共点，则这曲线是平面曲线。

证：在 $\boldsymbol{X}$ 处的密切面方程是 $(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{b}=0$，于是若 $\boldsymbol{Y}_0$ 是公共点，则对所有 s，$(\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{b}=0$，微分此式并运用 $\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直，且 $\dot{\boldsymbol{b}}=-\tau\boldsymbol{n}$，有

$$(\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X})\cdot\dot{\boldsymbol{b}}=0\quad 或\quad \tau(\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

现在假定曲线不是平面曲线，则由定理 4.4，存在一个点 s_0，因而也就有一个邻域 $s_\delta(s_0)$，使 $\tau\neq0$. 这样，在 $s_\delta(s_0)$ 中，有 $(\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$. 然而，$(\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{b}=0$，因此 $\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X}$ 平行于 $\boldsymbol{t}$. 于是存在 $k=k(s)$，使得对 $s_\delta(s_0)$ 中的 s，$\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{t}$，即点 $\boldsymbol{Y}_0$ 也是切线的交点(见问题 4.10)，这时在 $s_\delta(s_0)$ 中曲线是直线，但这是不可能的，因为在 $s_\delta(s_0)$ 中 $\tau\neq0$. 故对一切 s，$\tau=0$，从而曲线是平面曲线。

4.21 证明曲线是一般螺线的充分必要条件是 $\tau/\varkappa$ 为常数，其中 $\varkappa\neq0$ 及当 $\varkappa=0$ 时，$\tau=0$.

证：设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是一般螺线，轴 $\boldsymbol{u}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}=\cos\alpha$. 从问题 4.4 知道，$\alpha=$

0, 亦即使曲线变成平行于 $\boldsymbol{u}$ 的直线这种情况应除外. 于是对每一个 s, 存在唯一的单位向量 $\boldsymbol{b}^*(s)$ 垂直 $\boldsymbol{t}(s)$, 使 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{t}\cos\alpha+\boldsymbol{b}^*\sin\alpha$, 显然 $\boldsymbol{b}^*(s)$ 和 $\boldsymbol{n}^*(s)=\boldsymbol{b}^*(s)\times\boldsymbol{t}(s)$ 是连续可微的, 微分 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}=\cos\alpha$, 得 $\dot{\boldsymbol{t}}\cdot(\boldsymbol{t}\cos\alpha+\boldsymbol{b}^*\sin\alpha)=0$, 又因为 $\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{t}=0$, 故得 $\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{b}^*=0$. 这样, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}^*$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^*$ 可以分别选作曲线上的单位主法向量和单位副法向量. 由

$$\boldsymbol{0}=\dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{t}}\cos\alpha+\dot{\boldsymbol{b}}\sin\alpha=\varkappa\boldsymbol{n}\cos\alpha-\tau\boldsymbol{n}\sin\alpha,$$

得 $\tau/\varkappa=\cot\alpha=$常数, 其中 $\varkappa\neq0$ 和当 $\varkappa=0$ 时, $\tau=0$. 反之, 假定当 $\varkappa\neq0$, $\tau/\varkappa=\cot\alpha$ 和当 $\varkappa=0$, $\tau=0$, 则 $\varkappa\cos\alpha-\tau\sin\alpha=0$, 因而 $\dot{\boldsymbol{t}}\cos\alpha+\dot{\boldsymbol{b}}\sin\alpha=\boldsymbol{0}$, 积分之 $\boldsymbol{t}\cos\alpha+\boldsymbol{b}\sin\alpha=\boldsymbol{u}=$常向量. 于是 $\boldsymbol{u}$ 是单位向量且 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}=\cos\alpha=$常数, 即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是螺线.

4.22 证明沿着类 $\geqslant4$ 的正则曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$,

$$[\ddot{\boldsymbol{X}}\dddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}^{(4)}]=\varkappa^5\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right),$$

并且 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是一般螺线当且仅当 $[\ddot{\boldsymbol{X}}\dddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}^{(4)}]=0$.

证: 参阅问题 4.18, $\dot{\boldsymbol{X}}\times\ddot{\boldsymbol{X}}=\varkappa^3\boldsymbol{b}+\tau\varkappa^2\boldsymbol{t}$, 微分之,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}\times\boldsymbol{X}^{(4)}&=\left(\frac{d}{ds}\varkappa^3\right)\boldsymbol{b}+\varkappa^3\dot{\boldsymbol{b}}+\left(\frac{d}{ds}\tau\varkappa^2\right)\boldsymbol{t}+\tau\varkappa^2\dot{\boldsymbol{t}}\\&=\left(\frac{d}{ds}\varkappa^3\right)\boldsymbol{b}-\tau\varkappa^3\boldsymbol{n}+\left(\frac{d}{ds}\tau\varkappa^2\right)\boldsymbol{t}+\tau\varkappa^3\boldsymbol{n}\\&=\left(\frac{d}{ds}\varkappa^3\right)\boldsymbol{b}+\left(\frac{d}{ds}\tau\varkappa^2\right)\boldsymbol{t},\end{aligned}$$

应用问题 4.17, 则

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{X}}\cdot\dddot{\boldsymbol{X}}\times\boldsymbol{X}^{(4)}&=(-\varkappa^2\boldsymbol{t}+\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}+\tau\varkappa\boldsymbol{b})\cdot\left[\left(\frac{d}{ds}\varkappa^3\right)\boldsymbol{b}+\left(\frac{d}{ds}\tau\varkappa^2\right)\boldsymbol{t}\right]\\&=-\varkappa^2\frac{d}{ds}\tau\varkappa^2+\tau\varkappa\frac{d}{ds}\varkappa^3\\&=-\varkappa^4\dot{\tau}-2\tau\varkappa^3\dot{\varkappa}+3\tau\varkappa^3\dot{\varkappa}\\&=-\varkappa^3[\varkappa\dot{\tau}-\dot{\varkappa}\tau]\\&=-\varkappa^5\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right),\end{aligned}$$

于是

$$[\ddot{\boldsymbol{X}}\cdot\dddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}^{(4)}]=-[\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\ddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}^{(4)}]=\varkappa^5\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right).$$

若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是一般螺线, 则曲线上处处有 $\varkappa=0$ 或 $\tau/\varkappa$ 为常数, 因而 $[\ddot{\boldsymbol{X}}\cdot\dddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}^{(4)}]=0$. 反之, 若 $[\ddot{\boldsymbol{X}}\cdot\dddot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}^{(4)}]=0$, 且曲线上没有逗留点, 因而 $\varkappa\neq0$, 则我们可得 $\tau/\varkappa=$常数, 因此 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 是一般螺线.

5. 球面标形

4.23 证明曲线 C 的切线的球面标形的切线平行于 C 上对应点的主法线.

证: 设 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{t}(s)$ 表示曲线 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$ 的切线的球面标形. 而 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{t}(s)$ 的切向量是

$$\frac{d\boldsymbol{X}_1}{ds}=\dot{\boldsymbol{t}}(s)=\varkappa(s)\boldsymbol{n}(s),$$

这就给出了要求的结论.

4.24 证明切线的球面标形 $X_1=t(s)$ 的曲率是

$$\varkappa_1^2=(\varkappa^2+\tau^2)/\varkappa^2.$$

证：由定理 4.2，

$$|\varkappa_1|=\frac{|\dot{t}\times\ddot{t}|}{|\dot{b}|^3}=\frac{|\ddot{X}\times\dddot{X}|}{|\varkappa|^3}.$$

由问题 4.18，

$$|\varkappa_1|=\frac{|\varkappa^3 b+\tau\varkappa^2 t|}{|\varkappa|^3}=\frac{|\varkappa b+\tau t|}{|\varkappa|},$$

即

$$\varkappa_1^2=\frac{|\varkappa b+\tau t|^2}{\varkappa^2}=\frac{(\varkappa b+\tau t)\cdot(\varkappa b+\tau t)}{\varkappa^2}=\frac{\varkappa^2+\tau^2}{\varkappa^2}.$$

4.25 证明充分正则的曲线的副法线标形 $X_3=b(s)$ 的挠率是

$$\tau_3=\frac{\tau\dot{\varkappa}-\varkappa\dot{\tau}}{\tau(\varkappa^2+\tau^2)}.$$

证：我们运用定理 4.5 求 τ_3. 由 $\dot{b}=-\tau n$ 得

$$\begin{aligned}-\ddot{b}&=\dot{\tau}n+\tau\dot{n}=\dot{\tau}n+\tau\frac{d}{ds}(b\times t)\\&=\dot{\tau}n+\tau[(\dot{b}\times t)+(b\times\dot{t})]\\&=\dot{\tau}n+\tau[-\tau(n\times t)+\varkappa(b\times n)]\\&=\dot{\tau}n+\tau^2 b-\varkappa\tau t,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\dot{b}\times\ddot{b}&=(\tau n)\times(\dot{\tau}n+\tau^2 b-\varkappa\tau t)\\&=\tau^3(n\times b)-\tau^2\varkappa(n\times t)\\&=\tau^3 t+\tau^2\varkappa b\\&=\tau^2(\tau t+\varkappa b),\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\dot{b}\times\dddot{b}&=\frac{d}{ds}(\dot{b}\times\ddot{b})=\frac{d}{ds}[\tau^2(\tau t+\varkappa b)]\\&=2\tau\dot{\tau}(\tau t+\varkappa b)+\tau^2(\dot{\tau}t+\tau\dot{t}+\dot{\varkappa}b+\varkappa\dot{b})\\&=2\tau\dot{\tau}(\tau t+\varkappa b)+\tau^2(\dot{\tau}t+\varkappa\tau n+\dot{\varkappa}b-\tau\varkappa n)\\&=2\tau\dot{\tau}(\tau t+\varkappa b)+\tau^2(\dot{\tau}t+\dot{\varkappa}b)\\&=3\tau^2\dot{\tau}t+(2\tau\dot{\tau}\varkappa+\tau^2\dot{\varkappa})b,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}[\dot{b}\ddot{b}\dddot{b}]&=-\ddot{b}\cdot(\dot{b}\times\dddot{b})\\&=(\dot{\tau}n+\tau^2 b-\varkappa\tau t)\cdot[3\tau^2\dot{\tau}t+(2\tau\dot{\tau}\varkappa+\dot{\varkappa}\tau^2)b]\\&=\tau^3[-3\varkappa\dot{\tau}+2\varkappa\dot{\tau}+\tau\dot{\varkappa}]\\&=\tau^3(\tau\dot{\varkappa}-\varkappa\dot{\tau}),\end{aligned}$$

最后

$$\tau_3=\frac{[\dot{b}\ddot{b}\dddot{b}]}{|\dot{b}\times\ddot{b}|^2}=\frac{\tau^3(\tau\dot{\varkappa}-\varkappa\dot{\tau})}{\tau^4(\varkappa^2+\tau^2)}=\frac{\tau\dot{\varkappa}-\varkappa\dot{\tau}}{\tau(\varkappa^2+\tau^2)}.$$

§4.3 补 充 题

4.26 求曲线

$$X=(\cos t)e_1+(\sin t)e_2+te_3$$

在点 $t=\pi/2$ 的法平面和 x_1x_2 平面的交线.

答案: $x_1=-\pi/2,\ x_2=k,\ x_3=0,\ -\infty<k<\infty.$

4.27 求曲线

$$X=(1+t)e_1-t^2e_2+(1+t^3)e_3$$

在 $t=1$ 的切线和 x_1x_2 平面的交点.

答案: (4/3, −1/3, 0).

4.28 证明: 若一曲线的所有切线互相平行, 则该曲线为直线.

4.29 设 $\Delta\theta$ 是单位切向量 $t(s+\Delta s)$ 和 $t(s)$(其中 $\Delta s>0$)之间的夹角, 证明

$$\lim_{\Delta s\to 0}\Delta\theta=0.$$

4.30 证明平面曲线

$$X=x_1(t)e_1+x_2(t)e_2$$

的曲率是
$$|\varkappa|=\frac{|x_1'x_2''-x_2'x_1''|}{[(x_1')^2+(x_2')^2]^{3/2}}.$$

4.31* 证明: 若对一切 t, X' 和 X'' 线性相关, 则曲线是直线.

4.32 求曲线

$$X=(t-\sin t)e_1+(1-\cos t)e_2+te_3$$

的曲率.

答案: $|\varkappa|=(1+4\sin^4 t/2)^{1/2}/(1+4\sin^2 t/2)^{3/2}.$

4.33 求曲线

$$X=(t-\sin t)e_1+(1-\cos t)e_2+te_3$$

的挠率.

答案: $\tau=-1/(1+4\sin^4 t/2).$

4.34 证明 $|\varkappa\tau|=|\dot{t}\cdot\dot{b}|.$

4.35 证明曲线

$$X=te_1+\frac{1+t}{t}e_2+\frac{1-t^2}{t}e_3\quad(t>0)$$

位于一个平面上.

4.36 求使曲线

$$X=a(\cos t)e_1+a(\sin t)e_2+f(t)e_3$$

成为平面曲线的最一般的函数 $f(t)$.

答案: $f(t)=A\sin t+B\cos t+C$, A, B, C 为常数.

4.37 证明在曲线

$$X=te_1+\frac{1}{2}t^2e_2+\frac{1}{3}t^3e_3$$

上任意三点的密切面交于一点, 且此点位于这三点所确定的平面上.

4.38 证明: 若 $\varkappa\neq 0$, $X=X(t)$ 是平面曲线的充分必要条件是 $[X'X''X''']=0$.

* 在原文中, 本题和问题 4.3 重复. ——译者注

4.39 证明定理 4.4 的必要性部分: 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(s)$是平面曲线, 则 $\tau\equiv 0$.

4.40 证明一条曲线是一般螺线的充分必要条件是它的切线标形是一个圆或圆弧.

4.41 证明曲线 C 的切线标形的切线平行于在对应点上的副法线标形的切线.

4.42 证明沿副法线标形的曲率是

$$\varkappa_3^2=(\varkappa^2+\tau^2)/\tau^2.$$

4.43 证明沿切线标形的挠率是

$$\tau_1=\frac{\varkappa\dot{\tau}-\dot{\varkappa}\tau}{\varkappa(\varkappa^2+\tau^2)}.$$

第五章 曲线论

§5.1 基本内容

1. Frenet 方程

定理 5.1 沿着曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$，向量 $\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$ 满足方程

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{t}} &= \kappa \boldsymbol{n}, \\
\dot{\boldsymbol{n}} &= -\kappa \boldsymbol{t}+\tau \boldsymbol{b}, \\
\dot{\boldsymbol{b}} &= -\tau \boldsymbol{n}.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

方程(5.1)称为曲线的 Serret-Frenet 方程. 它是研究曲线论的基础，应该把它熟记，其中第一和第三个方程已在(4.6)和(4.14)推导过，至于第二个方程微分 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}$，再应用第一和第三个方程就得到

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{n}} &= \dot{\boldsymbol{b}}\times \boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}\times\dot{\boldsymbol{t}} = -\tau(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})+\boldsymbol{b}\times(\kappa\boldsymbol{n}) \\
&= (-\tau)(-\boldsymbol{b})+\kappa(-\boldsymbol{t}) = -\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}.
\end{aligned}
$$

注意，若把 Frenet 方程写成：

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{t}} &= 0\boldsymbol{t}+\kappa\boldsymbol{n}+0\boldsymbol{b}, \\
\dot{\boldsymbol{n}} &= -\kappa\boldsymbol{t}+0\boldsymbol{n}+\tau\boldsymbol{b}, \\
\dot{\boldsymbol{b}} &= 0\boldsymbol{t}-\tau\boldsymbol{n}+0\boldsymbol{b},
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$ 的系数构成矩阵：

$$
\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.
$$

2. 自 然 方 程

我们证明 Frenet 方程的第一个推论，曲率和挠率是自然参数的函数，它们完全确定了曲线. 即证明，如果 c 和 c^* 是空间中两条有相同曲率和挠率函数的曲线，即对所有 s，$\kappa(s)=\kappa^*(s)$、$\tau(s)=\tau^*(s)$，则 c 和 c^* 只有空间位置的不同. 证明如下：

设给出两条有相同曲率和挠率函数的曲线 c 和 c^*，平移 c^* 使对某一个 $s=s_0$，c^* 和 c 上的对应点迭合，然后绕 s_0 对应的点旋转 c^* 使三棱形 $(\boldsymbol{t}^*_0$、$\boldsymbol{n}^*_0$、$\boldsymbol{b}^*_0)$ 和 $(\boldsymbol{t}_0$、$\boldsymbol{n}_0$、$\boldsymbol{b}_0)$ 也迭合，微分 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*$，并利用 Frenet 方程得到

$$
\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*)=\boldsymbol{t}\cdot\dot{\boldsymbol{t}}^*+\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{t}^*=\boldsymbol{t}\cdot\kappa^*\boldsymbol{n}^*+\kappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}^*=\kappa(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}^*+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}^*);
$$

同理有

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*) &= \boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{n}}^*+\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{n}\cdot(-\kappa^*\boldsymbol{t}^*+\tau^*\boldsymbol{b}^*)+(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}^* \\
&= -\kappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}^*+\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}^*)+\tau(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}^*)
\end{aligned}
$$

和 $$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^*)=\dot{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{b}}^*=\boldsymbol{b}\cdot(-\tau^*\boldsymbol{n}^*)+(-\tau\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{b}^*=-\tau(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}^*+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}^*).$$

以上三式相加得到

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^*)=0.$$

积分得 $(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^*)=$常数.

但在 s_0, $\boldsymbol{t}_0=\boldsymbol{t}_0^*$、$\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{n}_0^*$、$\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{b}_0^*$,

所以 $\boldsymbol{t}_0\cdot\boldsymbol{t}_0^*=\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n}_0^*=\boldsymbol{b}_0\cdot\boldsymbol{b}_0^*=1.$

于是在 s_0 因而亦对所有 s, 有

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^*=3.$$

因 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{t}^*$ 是两个单位向量, 它们有以下性质: $-1\leqslant\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*=\cos\angle(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*)\leqslant 1$, 因此, 若 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^*=3$, 则 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*=1$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*=1$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^*=1$.

于是对所有 s, $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}^*$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}^*$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^*$.

最后, 因为 $\boldsymbol{t}=d\boldsymbol{x}/ds=\boldsymbol{t}^*=d\boldsymbol{x}^*/ds$, 得到 $\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}^*(s)+$常向量, 但在 s_0, $\boldsymbol{x}(s_0)=\boldsymbol{x}^*(s_0)$, 所以对所有 s, $\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}^*(s)$, 即是曲线 c 和 c^* 迭合, 这就证明了如下定理

定理 5.2 曲线由以 s 为自然参数的曲率和挠率函数唯一确定.

方程 $\varkappa=\varkappa(s)$, $\tau=\tau(s)$ 称为曲线的自然方程或内蕴方程, 因为它们完全确定了曲线.

例 5.1 (a) 根据定理 4.1 和定理 4.4 得到直线的内蕴方程为

$$\varkappa\equiv 0 \quad 和 \quad \tau\equiv 0.$$

(b) 方程 $\varkappa=$常数$\neq 0$, $\tau=0$(见例 4.3) 是半径为 $\rho=\frac{1}{|\varkappa|}$ 的圆的内蕴方程.

(c) 圆柱螺线的内蕴方程是 $\varkappa=$常数$\neq 0$, $\tau=$常数$\neq 0$, (见例 4.4 和 4.9). 这条螺线在半径为 $|\varkappa|/(\varkappa^2+\tau^2)$ 的圆柱面上, 它的螺距为 $2\pi|\tau|/(\varkappa^2+\tau^2)$, 当 $\tau>0$ 时, 它是右旋螺线, 当 $\tau<0$ 时它是左旋螺线.

3. 存在唯一性基本定理

注意, Frenet 方程是关于 $\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$ 的三个向量的一阶微分方程组, 因而自然会问, 给出任意两个连续函数 $\varkappa$ 和 τ, Frenet 方程是否有解 $\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$, 并由 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{t}$, 是否可以得到有给定曲率和挠率的曲线

$$\boldsymbol{x}=\int\boldsymbol{t}\,ds+\boldsymbol{c},$$

回答是肯定的, 由以下定理知道.

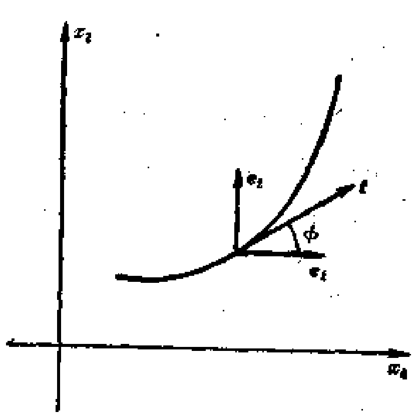


图 5-1

定理 5.3 空间曲线存在唯一性基本定理

设 $\varkappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 是区间 $a\leqslant s\leqslant b$ 上的任意连续函数, 则除了空间位置可不同之外, 存在一条且只有一条空间曲线 c, 其曲率是 $\varkappa(s)$, 挠率是 $\tau(s)$、这里 s 是 c 的自然参数.

具有给定的曲率和挠率的曲线的唯一性已经证明(见定理 5.2), 至于它的存在性的证明, 见附录 1.

一般地说, Frenet 方程用积分不能得到它的解, 但是可以设法把它简化为一个称为 Riccati 方程的一阶微分方程, 详细情况可参阅 L. P. Eisenhart, A Treatise on the

Differential Geometry of Curves and Surfaces Ginn and Co., 1909.

但是在平面曲线的情况下，即是当 $\tau\equiv 0$ 时，Frenet 方程的积分总是可能的，为此，设 ϕ 表 $\boldsymbol{t}$ 和 x_1 轴的交角，如图 5-1 所示，则

$$\boldsymbol{t}=(\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{e}_2. \tag{5.2}$$

因为 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$ 可写作 $\boldsymbol{n}=(-\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\cos\phi)\boldsymbol{e}_2$. (5.3)

微分得 $\dot{\boldsymbol{t}}=\dot\phi[(-\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\cos\phi)\boldsymbol{e}_2]=\dot\phi\boldsymbol{n}$; $\dot{\boldsymbol{n}}=-\dot\phi[(\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{e}_2]=-\dot\phi\boldsymbol{t}$.

但当 $\tau=0$ 时，Frenet 方程简化为 $\dot{\boldsymbol{t}}=\varkappa\boldsymbol{n}$，$\dot{\boldsymbol{n}}=-\varkappa\boldsymbol{t}$.

于是若 $\dot\phi=\varkappa$，即

$$\phi=\int\varkappa\,ds+c_1. \tag{5.4}$$

上述 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 是解. ϕ 确定后，可从(5.2)得到

$$\boldsymbol{x}=\int\boldsymbol{t}\,ds+\boldsymbol{c}_2=\int[(\cos\phi(s))\boldsymbol{e}_1+(\sin\phi(s))\boldsymbol{e}_2]ds+\boldsymbol{c}_2. \tag{5.5}$$

注意：(5.4) 中积分常数的改变确定一个关于 ϕ 的变换，由这个变换确定曲线关于原点的旋转，改变(5.5)中的积分常向量确定一个关于曲线的平移.

注意：若对所有 s，$\varkappa\neq 0$，则对所有 s，$\dot\phi\neq 0$. 这就允许引进 $\phi=\phi(s)$ 作为 (5.5) 的参数，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\int((\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{e}_2)\frac{ds}{d\phi}d\phi+\boldsymbol{c}_2\\&=\int\frac{1}{\varkappa(\phi)}((\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{e}_2)d\phi+\boldsymbol{c}_2.\end{aligned} \tag{5.6}$$

例 5.2 方程 $\varkappa=\frac{1}{s}$，$\tau=0$，$s>0$ 是对数螺线的自然方程. 事实上，设 $\dot\phi=\varkappa=1/s$，则 $\phi=\log s+c_1$，解出 $s=e^{(\phi-c_1)}$ 和 $\varkappa=1/s=e^{-(\phi-c_1)}$ 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\int\frac{1}{\varkappa(\phi)}((\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{e}_2)d\phi+\boldsymbol{c}_2\\&=\int e^{(\phi-c_1)}((\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{e}_2)d\phi+\boldsymbol{c}_2\\&=\frac{1}{2}e^{(\phi-c_1)}(\cos\phi+\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}e^{(\phi-c_1)}(\sin\phi-\cos\phi)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{c}_2\\&=\frac{1}{2}e^{(\phi-c_1)}[\sqrt{2}(\cos(\phi-\pi/4))\boldsymbol{e}_1+\sqrt{2}(\sin(\phi-\pi/4))\boldsymbol{e}_2]+\boldsymbol{c}_2.\end{aligned}$$

若选取 $c_1=\pi/4$，$\boldsymbol{c}_2=\boldsymbol{0}$，且令 $\phi-\pi/4=\theta$，得到 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta}[(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2]$.

在极坐标中，上式是对数螺线 $r=(1/\sqrt{2})e^{\theta}$.

4. 曲线的规范表示

设 P 是曲线 C 上的任一点，并设 P 点是坐标原点且基$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$和曲线在 P 点的三棱形$(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$重合，最后选取 C 的自然参数，使得在 P 点 $s=0$，若 C 用 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 表示，则 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$，$\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{t}(0)=\boldsymbol{e}_1$，$\ddot{\boldsymbol{x}}(0)=\dot{\boldsymbol{t}}(0)=\varkappa(0)\boldsymbol{n}(0)=\varkappa_0\boldsymbol{e}_2$，

因为 $$\dddot{\boldsymbol{x}}=\frac{d}{ds}\dot{\boldsymbol{t}}=\frac{d}{ds}\varkappa\boldsymbol{n}=\varkappa\dot{\boldsymbol{n}}+\dot\varkappa\boldsymbol{n}=\varkappa(-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})+\dot\varkappa\boldsymbol{n}=-\varkappa^2\boldsymbol{t}+\dot\varkappa\boldsymbol{n}+\varkappa\tau\boldsymbol{b},$$

有 $$\dddot{\boldsymbol{x}}(0)=-\varkappa_0^2\boldsymbol{e}_1+\dot\varkappa_0\boldsymbol{e}_2+\varkappa_0\tau_0\boldsymbol{e}_3,$$

最后因为 c 是类≥3, $\boldsymbol{x}(s)$可写作

$$\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(0)+\dot{\boldsymbol{x}}(0)s+\ddot{\boldsymbol{x}}(0)\frac{s^2}{2!}+\dddot{\boldsymbol{x}}(0)\frac{s^3}{3!}+0(s^3)$$

$$=\boldsymbol{e}_1 s+\varkappa_0\boldsymbol{e}_2\frac{s^2}{2}+(-\varkappa_0^2\boldsymbol{e}_1+\dot{\varkappa}_0\boldsymbol{e}_2+\varkappa_0\tau_0\boldsymbol{e}_3)\frac{s^3}{3!}+0(s^3)$$

$$=\left(s-\frac{\varkappa_0^2}{6}s^3\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\varkappa_0}{2}s^2+\frac{\dot{\varkappa}_0}{6}s^3\right)\boldsymbol{e}_2+\frac{\varkappa_0\tau_0}{6}s^3\boldsymbol{e}_3+0(s^3).$$

用 $\boldsymbol{x}(s)$ 的分量,上式变为

$$x_1=s-\frac{1}{6}\varkappa_0^2s^3+o_1(s^3);\qquad x_2=\frac{1}{2}\varkappa_0s^2+\frac{1}{6}\dot{\varkappa}_0s^3+o_2(s^3);$$

$$x_3=\frac{1}{6}\varkappa_0\tau_0s^3+o_3(s^3).$$

以上方程称为曲线 c 在 P 点的规范表示, 其首项对描述曲线在 P 点邻近性质是方便的.

例 5.3 如图 5-2 所示, 曲线 c 在 P 点的规范表示中, $\boldsymbol{x}$ 在切线上的投影是向量 $x_1\boldsymbol{e}_1$, 因为 x_1 含有 s 的一次项,我们看到曲线的大部份, 落在它的切线上, $\boldsymbol{x}$ 在主法线上的投影是分量 x_2, x_2 含有 s 的二次项, $\boldsymbol{x}$ 在副法线上的投影是分量 x_3, x_3 含有 s 的三次项, 注意如果 $\varkappa_0\neq0$, 因为分量 x_2 与 s^2 一样, 经过 P 不改号, 故曲线位于从切面的一侧, 如果加上 $\tau_0\neq0$, 因为 x_3 如同 s^3 一样, 经过 P 改号, 曲线穿过 P 点的密切平面, 如果 $\tau_0>0$ 如图 5-2(a)所示, 三棱形($\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$) 在 P 点附近作右手螺旋旋转, 如果 $\tau_0<0$ 则三棱形($\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$) 在 P 点附近作左手螺旋旋转, 如图 5-2(b)所示.

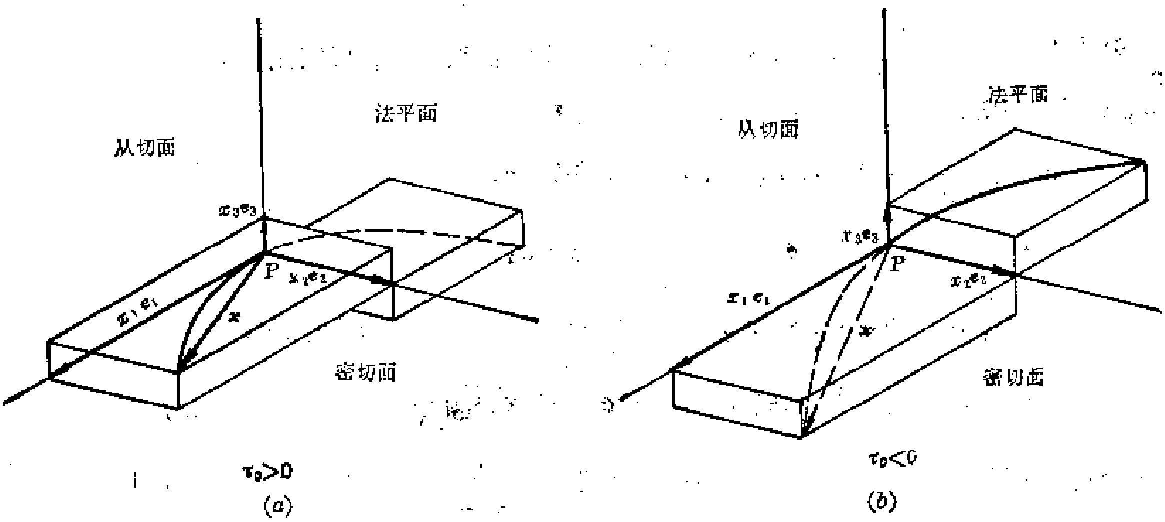


图 5-2

例 5.4 研究曲线的规范表示的首项

$$x_1=s,\ x_2=\frac{1}{2}\varkappa_0s^2,\ x_3=\frac{1}{6}\varkappa_0\tau_0s^3.$$

假设 $\varkappa_0>0$, $\tau_0>0$, 从前二个方程消去 s, 我们看到在一点的邻域, 曲线在密切平面(x_1x_2 平面)的投影为抛物线 $x_2=\frac{1}{2}\varkappa_0x_1^2$, 如图 5-3($a$) 所示, 曲线在从切面的投影为三次曲线 $x_3=\frac{1}{6}\varkappa_0\tau_0x_1^3$, 如图 5-3($b$) 所示. 曲线在法平面的投影为半立方抛物线 $x_3^2=\frac{2}{9}(\tau_0^2/\varkappa_0)x_2^3$, 如图 5-3($c$)所示.

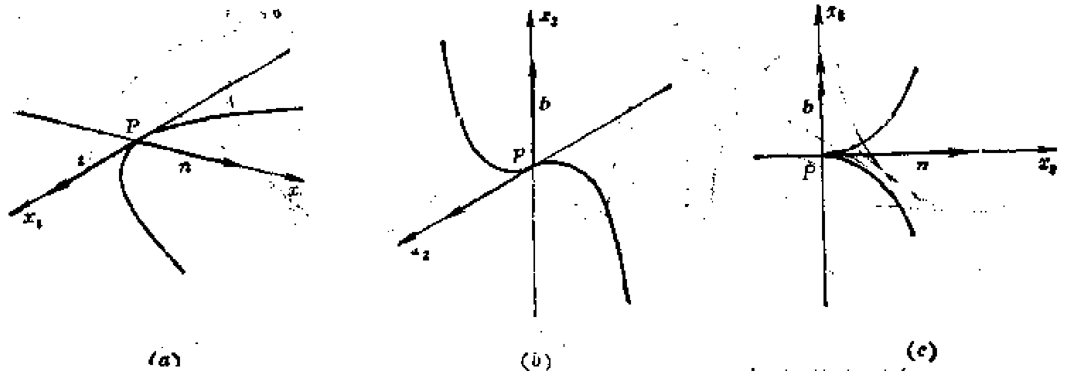


图 5-3

5. 渐 伸 线

曲线C的切线所生成的曲面，称为C的切线曲面，曲线C^*在C的切线曲面上并且和C的切线垂直相交，则曲线C^*称为曲线C的渐伸线。

如果C的方程是$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$，$\boldsymbol{x}^*$是渐伸线$C^*$上过$C$在$\boldsymbol{x}(s)$的切线的点，如图5-4所示，则$\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}(s)$平行于$\boldsymbol{t}(s)$，于是$C^*$有形如$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}(s)+k(s)\boldsymbol{t}(s)$的方程，并且，在渐伸线上，切向量

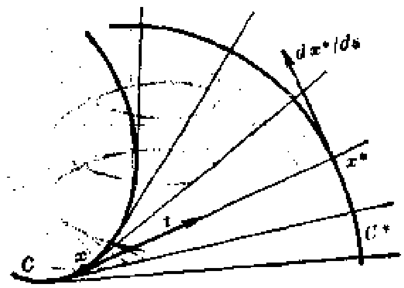


图 5-4

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\dot{\boldsymbol{x}}+\dot{k}\boldsymbol{t}+k\dot{\boldsymbol{t}}=(1+\dot{k})\boldsymbol{t}+\dot{k}\varkappa\boldsymbol{n}$$

和C的切向量$\boldsymbol{t}$垂直，即是

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\cdot\boldsymbol{t}=(1+\dot{k})(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t})+\varkappa k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t})=1+\dot{k}=0.$$

积分得$k=-s+c$，$c=$常数，于是存在无限多条渐伸线，对每一个C，渐伸线方程是

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+(c-s)\boldsymbol{t}.$$

注意在$\boldsymbol{x}$有逗留点的地方，$\boldsymbol{x}^*$不是正则的，因为

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}+(c-s)\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}-\boldsymbol{t}=(c-s)\dot{\boldsymbol{t}}=(c-s)\varkappa\boldsymbol{n}.$$

在$\varkappa=0$的地方，$\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=0$，于是我们假设沿$C$，$\varkappa\neq0$，由此得到沿$C$的渐伸线$\varkappa^*\neq0$，因为在问题5.15中，我们证明了渐伸线的曲率满足

$$\varkappa^{*2}=\frac{\varkappa^2+\tau^2}{(c-s)^2\varkappa^2}.$$

于是当$\varkappa\neq0$时，$\varkappa^*\neq0$。

当曲线$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$在$\boldsymbol{x}$的切线用方程$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{t}$，$-\infty<k<\infty$，给出时，则有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{dk}\right|=|\boldsymbol{t}|=1.$$

即是，k是自然参数，又因当$k=0$时，$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}$，得到$|k|$是$C$上的点$\boldsymbol{x}$和$C$的切线上的点$\boldsymbol{x}^*$之间的距离，所以$C$的两条渐伸线$C_1^*$：$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+(c_1-s)\boldsymbol{t}$和$C_2^*$：$\boldsymbol{x}_2^*=\boldsymbol{x}+(c_2-s)\boldsymbol{t}$之间的距离，对所有$s$保持常数且等于$|(c_1-s)-(c_2-s)|=|c_1-c_2|$。如图5-5($a$)所示，从上面的推导可知，一条渐伸线可以用绕着$C$的绳子展开拉紧而得到。特别，如图5-5($b$)所示，若

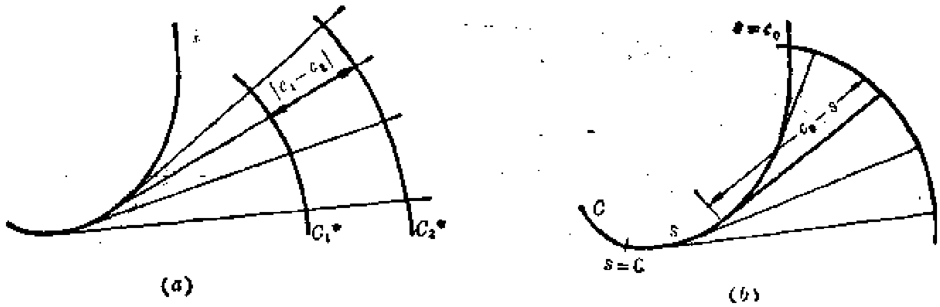


图 5-5

绳子的长是 c_0，且沿 C 选取自然参数 s，使得 s 是从绳子的固定端点起算的距离，则用展开绳子生成的曲线就是渐伸线 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+(c_0-s)\boldsymbol{t}$.

例 5.5 沿圆柱螺线 $\boldsymbol{x}=a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+bt\boldsymbol{e}_3$, $a>0$ 有

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3,$$

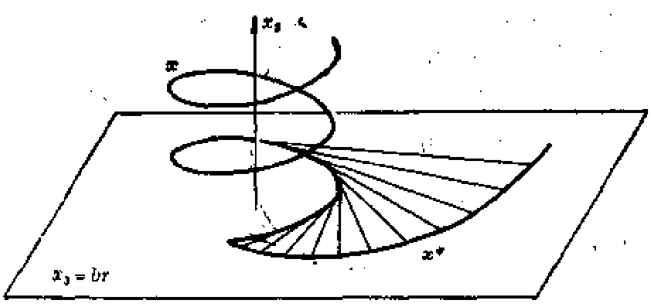


图 5-6

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|=(a^2+b^2)^{1/2}.$$

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|$$
$$=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a(\sin t)\boldsymbol{e}_1+a(\cos t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3),$$

且

$$s=\int_0^t\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|dt=(a^2+b^2)^{1/2}t.$$

于是渐伸线是曲线

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+(c-s)\boldsymbol{t}=[a\cos t-a(c-s)(a^2+b^2)^{-1/2}\sin t]\boldsymbol{e}_1$$
$$+[a\sin t+a(c-s)(a^2+b^2)^{-1/2}\cos t]\boldsymbol{e}_2+[bt+(c-s)(a^2+b^2)^{-1/2}b]\boldsymbol{e}_3.$$

令 $r=c(a^2+b^2)^{1/2}$，并应用 $t=s(a^2+b^2)^{-1/2}$，则

$$\boldsymbol{x}^*=a[(\cos t+t\sin t)-r\sin t]\boldsymbol{e}_1+a[(\sin t-t\cos t)+r\cos t]\boldsymbol{e}_2+br\boldsymbol{e}_3.$$

注意，如图 5-6 所示，此渐伸线是限制在平面 $x_3=br$ 上的平面曲线。

6. 渐 屈 线

若曲线 C 是曲线 C^* 的渐伸线，则定义 C^* 是 C 的渐屈线，因此给出 C，C 的渐屈线是这样的曲线，使得它的切线和 C 垂直相交，若 C 用 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 给出且 $\boldsymbol{x}^*(s)$ 是渐屈线的切线上的切点，这切线交 C 于 $\boldsymbol{x}(s)$，则

$$\boldsymbol{x}^*(s)=\boldsymbol{x}(s)+\alpha(s)\boldsymbol{n}(s)+\beta(s)\boldsymbol{b}(s),$$

事实上，如图 5-7 所示，$\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}(s)$ 垂直于 $\boldsymbol{t}(s)$，因此它是 $\boldsymbol{n}(s)$ 和 $\boldsymbol{b}(s)$ 的线性组合，微分上式得

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\dot{\boldsymbol{x}}+\dot{\alpha}\boldsymbol{n}+\alpha\dot{\boldsymbol{n}}+\dot{\beta}\boldsymbol{b}+\beta\dot{\boldsymbol{b}}$$
$$=\boldsymbol{t}+\dot{\alpha}\boldsymbol{n}+\alpha(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})+\dot{\beta}\boldsymbol{b}-\beta\tau\boldsymbol{n}=(1-\alpha\kappa)\boldsymbol{t}+(\dot{\alpha}-\beta\tau)\boldsymbol{n}+(\dot{\beta}+\tau\alpha)\boldsymbol{b}.$$

因为 $\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}$ 和 C^* 相切，它与 $\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{n}+\beta\boldsymbol{b}$ 的分量对应成比例，故存在 k，使得 $1-\alpha\kappa=0$,

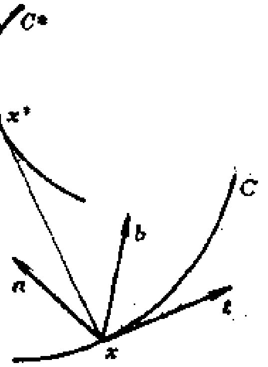


图 5-7

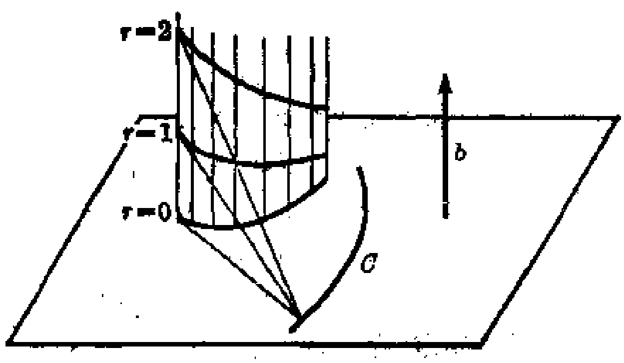


图 5-8

$(\dot{\alpha}-\beta\tau)=k\alpha$, 且$(\dot{\beta}+\tau\alpha)=k\beta$ 得到 $\alpha=1/k$, 后两个方程消去 k 得

$$\beta(\dot{\alpha}-\beta\tau)-\alpha(\dot{\beta}+\tau\alpha)=0.$$

解出 τ,

$$\tau=\frac{\beta\dot{\alpha}-\alpha\dot{\beta}}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,cot}\frac{\beta}{\alpha}.$$

积分得到

$$\beta=\alpha\cot\left[\int\tau\,ds+c\right].$$

因为 $\alpha=1/\varkappa$, 有

$$\beta=(1/\varkappa)\cot\left[\int\tau\,ds+c\right],$$

于是有无限多条渐屈线, 对每一选定的 c, 渐屈线的方程是

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+\frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{n}+\frac{1}{\varkappa}\cot\left(\int\tau\,ds+c\right)\boldsymbol{b}.$$

注意, 我们必须假设沿曲线C, $(\dot{\alpha}-\beta\tau)^2+(\dot{\beta}+\tau\alpha)^2\neq0$, 因为微分 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{n}+\beta\boldsymbol{b}$ 得:

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=(\dot{\alpha}-\beta\tau)\boldsymbol{n}+(\dot{\beta}+\tau\alpha)\boldsymbol{b}.$$

因此在 $(\dot{\alpha}-\beta\tau)^2+(\dot{\beta}+\tau\alpha)^2=0$ 的地方 C^* 不是正则的, 特别, 若 C 是平面曲线, 则 $\tau=0$, $\beta=r\alpha$, $r=$ 常数, 且$(\dot{\alpha}-\beta\tau)^2+(\dot{\beta}+\tau\alpha)^2=(\dot{\varkappa}^2/\varkappa^4)(1+r^2)$. 于是对平面曲线 C 我们假设$\dot{\varkappa}\neq0$.

例 5.6 若C是平面曲线, 则 $\tau=0$, 以及它的渐屈线的方程为

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+\frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{n}+\frac{r}{\varkappa}\boldsymbol{b},\ r=\text{常数}.$$

如图 5-8 所示, 当 $r=0$ 时, 渐屈线位于C所在的平面上, 这个平面就是C的密切面, 事实上, 它是C在同一平面上的唯一渐屈线, 并称为C的*平面渐屈线*, 注意, 因为 $\boldsymbol{b}=$ 常向量, 其它的渐屈线落在柱面上, 这个柱面的直母线垂直于C所在的平面, 并且通过C的平面渐屈线.

7. 切触理论

设过曲线C上的点 $\boldsymbol{x}$ 且过C在 $\boldsymbol{x}$ 的切线的平面为 π_1, 过 $\boldsymbol{x}$ 但不过C在 $\boldsymbol{x}$ 的切线的平面为 π_2. 直观上, 似乎 π_1 比 π_2 在 $\boldsymbol{x}$ 和C有较高的"切触". 同样, 在过 $\boldsymbol{x}$ 的切线的所有平面中, 最高阶切触的平面似乎是密切平面.

为了研究曲线C和一般曲面的切触程度, 我们假设C是足够高类的曲线, 它的方程为 $\boldsymbol{x}=x_1(t)\boldsymbol{e}_1+x_2(t)\boldsymbol{e}_2+x_3(t)\boldsymbol{e}_3$, 又设 $F(x_1, x_2, x_3)=0$ 表示曲面 S, 且C和S不仅交于一点 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0)$, 还交于 $\boldsymbol{x}_0$ 邻域的其它 $n-1$ 个点 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}(t_1), \cdots, \boldsymbol{x}_{n-1}=\boldsymbol{x}(t_{n-1})$, 现在研究函

数

$$f(t)=F(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)).$$

明显地，因为 C 和 S 在 $\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_{n-1}$ 相交，故有

$$f(t_0)=F(x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ x_3(t_0))=0,$$
$$f(t_1)=F(x_1(t_1),\ x_2(t_1),\ x_3(t_1))=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f(t_{n-1})=F(x_1(t_{n-1}),\ x_2(t_{n-1}),\ x_3(t_{n-1}))=0.$$

从 Rolle 定理知道，存在 $t_1',\ t_2',\ \cdots,\ t_{n-1}'$，其中

$$t_0<t_1'<t_1,\ t_1<t_2'<t_2,\ \cdots,\ t_{n-2}<t_{n-1}'<t_{n-1},$$

使得 $$f'(t_1')=f'(t_2')=\cdots=f'(t_{n-1}')=0.$$

又从 Rolle 定理知，存在 $t_2'',\ t_3'',\ \cdots,\ t_{n-1}''$，其中

$$t_1'<t_2''<t_2',\ t_2'<t_3''<t_3',\ \cdots,\ t_{n-2}'<t_{n-1}''<t_{n-1}',$$

使得 $$f''(t_2'')=f''(t_3'')=\cdots=f''(t_{n-1}'')=0.$$

继续这样做，就求得在 t_0 的邻域存在 $t_0,\ t_1',\ t_2'',\ \cdots t_{n-1}^{(n-1)}$，使得

$$f(t_0)=f'(t_1')=f''(t_2'')=\cdots=f^{(n-1)}(t_{n-1}^{(n-1)})=0.$$

现在研究当 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_{n-1}$ 趋近于 $\boldsymbol{x}_0$ 时曲面族的极限，即是设 S 是交 C 于 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}_0$ 邻域的 $n-1$ 个点的曲面族，当 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_{n-1}$ 趋近于 $\boldsymbol{x}_0$ 时的极限位置，当 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_{n-1}$ 趋近于 $\boldsymbol{x}_0$ 时，数 $t_1',t_2'',\cdots,\ t_{n-1}^{(n-1)}$ 趋近于 t_0，因而在极限情形中 $f(t_0)=f'(t_0)=f''(t_0)=\cdots=f^{(n-1)}(t_0)=0$，于是导出以下的定义：

称曲线 $\boldsymbol{x}=x_1(t)\boldsymbol{e}_1+x_2(t)\boldsymbol{e}_2+x_3(t)\boldsymbol{e}_3$ 与曲面 $F(x_1,\ x_2,\ x_3)=0$，在对应于 $t=t_0$ 的点有 n 点切触，若函数

$$f(t)=F(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$$

满足 $f(t_0)=f'(t_0)=\cdots=f^{(n-1)}(t_0)=0$，但 $f^{(n)}(t_0)\neq0$。

注意，上面的定义不依赖于曲线的参数表示，事实上，设

$$\boldsymbol{x}=x_1^*(\theta)\boldsymbol{e}_1+x_2^*(\theta)\boldsymbol{e}_2+x_3^*(\theta)\boldsymbol{e}_3$$

是曲线的另一表示，则

$$x_i^*(\theta)=x_i(t(\theta)),\ i=1,\ 2,\ 3,$$

且
$$\begin{aligned}g(\theta)&=F(x_1^*(\theta),\ x_2^*(\theta),\ x_3^*(\theta))\\&=F(x_1(t(\theta)),\ x_2(t(\theta)),\ x_3(t(\theta)))=f(t(\theta)),\\g'(\theta)&=t'f'(t(\theta)),\\g''(\theta)&=(t')^2f''(t(\theta))+t''f'(t(\theta)).\end{aligned}$$

一般地说，$g^{(i)}(\theta)$ 是 $f^{(i)}(t(\theta))$ 和比它阶数低的导数的线性组合，即，$g^{(i)}(\theta)=(t')^i(t(\theta))+c_1f^{(i-1)}(t(\theta))+\cdots+t^{(i)}f'(t(\theta))$，但是如果 $f^{(i)}(t_0)=f^{(i)}(t(\theta_0))=0,\ i=1,\ \cdots,\ n-1$ 且

$$f^{(n)}(t_0)=f^{(n)}(t(\theta_0))\neq0,$$

则 $g^{(i)}(\theta_0)=0,\ i=1,\ \cdots,\ n-1$，且因为 $t'(\theta_0)\neq0,\ g^{(n)}(\theta_0)\neq0$，这就是所要的结果。

例 5.7 通过曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 上的点 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(s_0)$ 具有单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 的任一平面的方程是 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0$。现在研究函数

$$f(s)=(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{N},$$

它的导数 $$f'(s)=\dot{\boldsymbol{x}}(s)\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{t}(s)\cdot\boldsymbol{N},$$

$$f''(s)=\dot{\boldsymbol{t}}(s)\cdot\boldsymbol{N}=\varkappa(s)\boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{N},$$

很明显，
$$f(s_0)=(\boldsymbol{x}(s_0)-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0.$$

现在，$f'(s_0)=\boldsymbol{t}(s_0)\cdot\boldsymbol{N}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{N}$ 垂直于在 $\boldsymbol{x}_0$ 的单位切向量 $\boldsymbol{t}(s_0)$，于是平面与曲线至少有二点切触的充分必要条件是平面通过曲线的切线. 其次，如果 $\varkappa(s_0)\neq 0$，则

$$f''(s_0)=\varkappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0)\cdot\boldsymbol{N}=0$$

的充分必要条件是 $\boldsymbol{N}$ 垂直于曲线在 $\boldsymbol{x}_0$ 的主法线. 于是，若 $\varkappa(s_0)\neq 0$ 平面与曲线至少有三点切触的充分必要条件是 $\boldsymbol{N}$ 垂直于 $\boldsymbol{t}(s_0)$ 和 $\boldsymbol{n}(s_0)$，即充分必要条件是平面为曲线在 $\boldsymbol{x}_0$ 的密切平面 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{b}(s_0)=0$. 注意在逗留点，即 $\varkappa(s_0)=0$ 所有通过切线的平面跟曲线至少有三点切触.

空间两条曲线之间的切触阶可用类似的方法定义，即是：设曲线 C 是足够高类的曲线，且它的方程为

$$\boldsymbol{x}=x_1(t)\boldsymbol{e}_1+x_2(t)\boldsymbol{e}_2+x_3(t)\boldsymbol{e}_3,$$

又设曲线 Γ 是以下两个曲面

$$F(x_1, x_2, x_3)=0,$$
$$G(x_1, x_2, x_3)=0$$

的交线，若函数

$$f(t)\equiv F(x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$
$$g(t)\equiv G(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

满足
$$f(t_0)=f'(t_0)=f''(t_0)=\cdots=f^{(n-1)}(t_0)=0,$$
$$g(t_0)=g'(t_0)=g''(t_0)=\cdots=g^{(n-1)}(t_0)=0,$$

但 $f^{(n)}(t_0)\neq 0$ 或 $g^{(n)}(t_0)\neq 0$，则称 C 和 Γ 在对应于 $t=t_0$ 的点有 n 点切触. 相应地，C 和 Γ 有 n 点切触的充分必要条件是 C 和确定 Γ 的一个曲面有 n 点切触，且和另一个曲面至少有 n 点切触.

例 5.8 确定一个和曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 在 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(s_0)$ 点至少有 3 点切触的圆 Γ. 注意，上面提过，曲线 Γ 作为球面和平面的交线，这球面和曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 至少有 3 点切触，这平面和曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 至少有 3 点切触. 中心在 $\boldsymbol{y}_0$ 且过 $\boldsymbol{x}_0$ 的球面方程是

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0|^2=|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|^2.$$

我们研究函数

$$\begin{aligned}f(s)&=|\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0|^2-|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|^2\\&=(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\\&\quad-|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|^2,\\f'(s)&=2(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(s)\\&=2(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{t}(s),\\f''(s)&=2(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{t}}(s)\\&\quad+2\boldsymbol{t}(s)\cdot\boldsymbol{t}(s)\\&=2\varkappa(s)\boldsymbol{x}(s)(-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{n}(s)+2.\end{aligned}$$

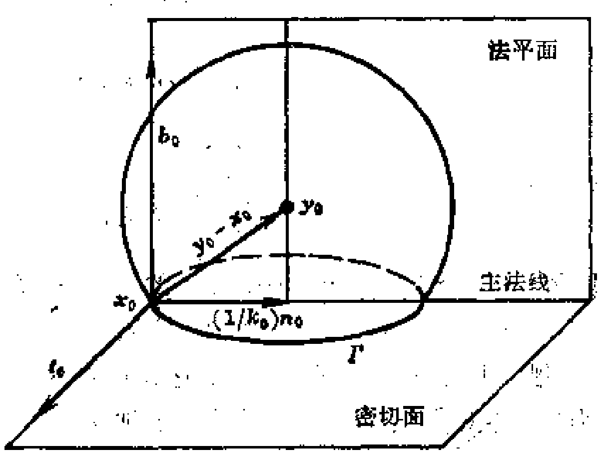


图 5-9

显然 $f(s_0)=0$. $f'(s_0)=2(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{t}_0=0$ 充分必要条件是

$$(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{t}_0=0.$$

即是球面至少有 2 点切触的充分必要条件是它的中心位于法平面上，如图 5-9 所示，其次 $f''(s_0)=2\varkappa_0(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{n}_0+2=0$，充分必要条件是 $\varkappa_0(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}_0=1$. 于是球面至少有 3 点切触的充分必要条件是它的中心在法平面上，且向量 $\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0$ 在 $\boldsymbol{n}_0$ 上的投影等于 $1/\varkappa_0$. 注意在逗留点，即在 $\varkappa_0=0$ 的点，至少有 3 点切触的球面不存在．最后，这样的球面(至少有 3 点切触的球面)和在 $\boldsymbol{x}_0$ 的密切平面的交线将是在 $\boldsymbol{x}_0$ 至少有 3 点切触的圆 Γ，由于 $\varkappa_0\neq0$，这个密切平面是在 $\boldsymbol{x}_0$ 至少有 3 点切触的唯一平面，注意，这个圆是唯一的，因为虽然在 $\boldsymbol{x}_0$ 有无限多个至少有 3 点切触的球面，而向量 $\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0$ 都在法平面上且在 $\boldsymbol{n}_0$ 上的投影是常数 $\dfrac{1}{\varkappa_0}$.

上例中所确定的和曲线 C 在 $\boldsymbol{x}$ 至少有 3 点切触的圆，称为 C 在 $\boldsymbol{x}$ 的**密切圆**，密切圆位于密切平面，它的中心在主法线上，位于 C 在 $\boldsymbol{x}$ 的曲率向量的一侧，它的半径等于 c 在 $\boldsymbol{x}$ 的曲率半径 $\rho=1/|\varkappa|$．密切圆的中心称为**曲率中心**，它的位置是

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\boldsymbol{n}.$$

8. 密切曲线和曲面

与曲线交于一点的所有平面中，密切平面是具有最高切触的平面，一般地，给出一个曲面族 s_λ，族中每个曲面都和曲线 C 在点 $\boldsymbol{x}$ 相交，设 $s_0\in s_\lambda$，如果 C 和 s_0 在 $\boldsymbol{x}$ 的切触阶高于或等于 C 和曲面 s_λ 中其它任一曲面的切触阶，则 s_0 称为族 s_λ 对于 C 的**密切曲面**．类似地，给出一个曲线族 Γ_λ，族中每条曲线都和曲线 C 在点 $\boldsymbol{x}$ 相交，设 $\Gamma_0\in\Gamma_\lambda$，如果 C 和 Γ_0 在 $\boldsymbol{x}$ 的切触阶高于或等于 C 和曲线 Γ_λ 中其它任一曲线的切触阶，则 Γ_0 称为族 Γ_λ 对于 C 的**密切曲线**。

为了详细地研究密切曲面，我们假设 C 是由 $\boldsymbol{x}=x_1(t)\boldsymbol{e}_1+x_2(t)\boldsymbol{e}_2+x_3(t)\boldsymbol{e}_3$ 给定的足够高类的曲线，且 s_λ 是带有 $n-1$ 个参数的曲面族，用方程 $F(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})=0$ 表示，C 和 s_λ 相交于对应 $t=t_0$ 的点．研究函数

$f(t, a_1, \cdots, a_{n-1})=F(x_1(t), x_2(t), x_3(t), a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$. 显然 $f(t_0, a_1, \cdots, a_{n-1})=0$ 这是因为我们假设曲面族和 C 交于 $\boldsymbol{x}(t_0)$，我们研究方程

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t_0, a_1, \cdots, a_{n-1})=0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t_0, a_1, \cdots, a_{n-1})=0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}}f(t_0, a_1, \cdots, a_{n-1})=0,$$

这是含 $n-1$ 个未知数 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 的 $n-1$ 个方程的方程组，解一般是存在的，设为 $a_1=\alpha_1$, $a_2=\alpha_2, \cdots, a_{n-1}=\alpha_{n-1}$，显然曲面 $F(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})=0$ 和曲线 C 在 $\boldsymbol{x}$ 至少有 n 点切触，但是族中的密切曲面，它和 C 在 $\boldsymbol{x}$ 的切触阶高于或等于族中其它曲面的切触阶。类似的论述对曲线也适用，于是一般地说，$n-1$ 个参数的曲面(曲线)族的密切曲面(曲线)和曲线 C 交于点 $\boldsymbol{x}$，在点 $\boldsymbol{x}$，密切曲面(曲线)和 C 至少有 n 点切触.

例 5.9 过曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 上对应于 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(s_0)$ 的点的所有平面族，是 2 个参数的曲面

族 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0$（$\boldsymbol{N}$ 的三个分量的关系为 $|\boldsymbol{N}|=1$）。如果 $\varkappa_0\neq 0$，在 $\boldsymbol{x}_0$ 的密切平面是这个族中唯一的密切平面，如例 5.7 所指出的，这个密切平面和曲线在 $\boldsymbol{x}_0$ 至少有 3 点切触，而任一其它平面，和曲线在 $\boldsymbol{x}_0$ 都少于 3 点切触.

例 5.10 过曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 上的点 $\boldsymbol{x}_0$ 的所有球面族，是三个参数（中心 $\boldsymbol{y}_0$ 的分量）的球面族

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0|^2=|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|^2.$$

如果我们设 $\varkappa_0$ 和 τ_0 异于零，这个球面族的密切球面是唯一的，且和曲线在 $\boldsymbol{x}_0$ 至少有 4 点切触，密切球面的中心和半径确定如下，研究函数

$$\begin{aligned}
f(s)&=|\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}|^2-|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|^2=(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)-|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|^2,\\
f'(s)&=2(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(s)=2(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{t}(s),\\
f''(s)&=2(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{t}}(s)+2\boldsymbol{t}(s)\cdot\boldsymbol{t}(s)=2\varkappa(s)(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{n}(s)+2,\\
f'''(s)&=2\dot{\varkappa}(s)(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{n}(s)+2\varkappa(s)\boldsymbol{t}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)+2\varkappa(s)(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{n}}(s)\\
&=2\dot{\varkappa}(s)(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{n}(s)+2\varkappa(s)(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)(-\varkappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s))\\
&=2\dot{\varkappa}(s)(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{n}(s)-2\varkappa^2(s)(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{t}(s)\\
&\quad+2\varkappa(s)\tau(s)(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{b}(s).
\end{aligned}$$

显然，$f(s_0)=0$，$f'(s_0)=0$ 的充分必要条件是 $(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{t}_0=0$ 且 $f''(s_0)=0$ 的充分必要条件是 $(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}_0=1/\varkappa_0$，最后用上面两个条件我们又有 $f'''(s_0)=0$ 的充分必要条件是

$$-2\dot{\varkappa}_0/\varkappa_0-2\varkappa_0\tau_0(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{b}_0=0,$$

即 $$(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{b}_0=-\dot{\varkappa}_0/\varkappa_0^2\tau_0.$$

于是，如图 5-10 所示，如果 $\varkappa_0\neq 0$，$\tau_0\neq 0$，存在唯一的和曲线至少有 4 点切触的密切球面，球心 $\boldsymbol{y}_0$ 使得向量 $\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0$ 对于 $\boldsymbol{t}_0$，$\boldsymbol{n}_0$，$\boldsymbol{b}_0$ 的分量分别为 0，$1/\varkappa_0$，$-\dot{\varkappa}/\varkappa_0^2\tau_0$。很明显，这球面的半径是

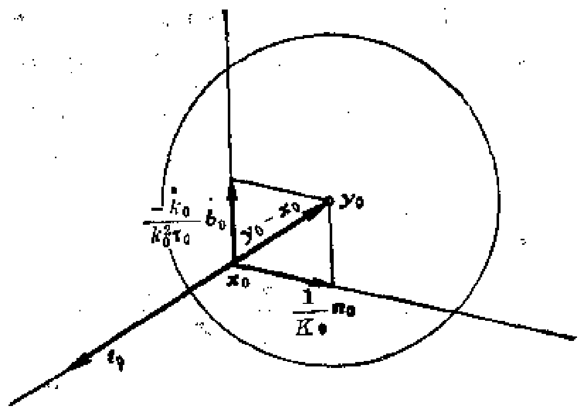


图 5-10

$$|\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0|=\sqrt{\left(\frac{1}{\varkappa_0}\right)^2+\left(\frac{\dot{\varkappa}_0}{\varkappa_0^2\tau_0}\right)^2}.$$

上例中所确定的球面称为 C 在 $\boldsymbol{x}$ 的密切球面。密切球面的球心称为曲率球心，它的位置是

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{n}-\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2\tau}\boldsymbol{b}.$$

有时引进挠率半径 $\sigma=1/\tau$ 是方便的，根据 σ 和曲率半径 $\rho=1/|\varkappa|$，当 $\varkappa>0$ 时上式变为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\rho\boldsymbol{n}+\dot{\rho}\sigma\boldsymbol{b}.$$

最后，设 $F(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})=0$ 是含有 $n-1$ 个参数的曲面族，族中每一个曲面交曲线 $\boldsymbol{x}(t)=x_1(t)\boldsymbol{e}_1+x_2(t)\boldsymbol{e}_2+x_3(t)\boldsymbol{e}_3$ 于对应 $t=t_0$ 的点。注意，可以使 $n-1$ 个参数的曲面族满足 $n-1$ 个条件，所以一般地可以找到曲面族的曲面它与曲线另外还有 $n-1$ 个交点，比如说曲面还对应交于 t_0 的一个邻域中的 $t_1, \cdots, t_{n-1}$。现在研究当 $t_1, \cdots, t_{n-1}$

趋于 t_0 时的极限，如果极限曲面 S 存在，且它的方程为 $F(x_1, x_2, x_3)=0$，则用与前面引入切触概念类似的论证得到函数

$$f(t)=F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

满足
$$f(t_0)=f'(t_0)=\cdots=f^{(n-1)}(t_0)=0,$$

即是，极限曲面 S 和曲线在 t_0 点至少有 n 点切触，类似的论证对 $n-1$ 个参数的曲线族也成立，于是如果 $n-1$ 个参数的曲面(曲线)族的密切曲面(曲线)是唯一的，且和曲线 C 在 x 点有 n 点切触，则它是通过曲线 C 上 $n-1$ 个邻近点的曲面(曲线)族当这 $n-1$ 个点趋于 x 时的极限曲面(曲线)。

例 5.11 曲线 C 在点 x 的密切圆是通过 x 和 C 上两个邻近点的圆，当这两个点趋于 x 时的极限圆，类似地，密切球面是通过 x 和 C 上三个邻近点的球面，当这三个点趋于 x 时的极限球面。

§5.2 问题及其解答

1. 自然方程，基本定理

5.1 求悬链线 $x=a(\cosh(t/a))e_1+te_2$，a=常数的自然方程。

解：因为它是平面曲线，$\tau=0$，剩下求作为 s 的函数的 $\varkappa$，我们计算

$$x'=\sinh(t/a)e_1+e_2,\quad |x'|=[\sinh^2(t/a)+1]^{1/2}=\cosh(t/a),$$

$$x''=(1/a)(\cosh(t/a))e_1,$$

$$x'\times x''=-(1/a)(\cosh(t/a))e_3.$$

从定理 4.2

$$\varkappa^2=\frac{(x'\times x'')\cdot(x'\times x'')}{(x'\cdot x')^3}=\frac{(1/a^2)\cosh^2(t/a)}{(\sinh^2(t/a)+1)^3}=\frac{1}{a^2\cosh^4(t/a)},$$

$$s=\int_0^t |x'|\,dt=\int_0^t \cosh(t/a)dt=a\sinh(t/a).$$

因此
$$s^2+a^2=a^2\sinh^2(t/a)+a^2=a^2\cosh^2(t/a).$$

消去 t 得 $\varkappa=a/(s^2+a^2)$，这就是所要的结果。

5.2 求圆外旋轮线

$$x=\left[(r_0+r_1)\cos\theta-r_1\cos\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\theta\right)\right]e_1+\left[(r_0+r_1)\sin\theta-r_1\sin\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\right)\right]e_2$$

的自然方程。

解：计算

$$x'=\frac{dx}{d\theta}=\left[-(r_0+r_1)\sin\theta+(r_0+r_1)\sin\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\theta\right)\right]e_1$$
$$+\left[(r_0+r_1)\cos\theta-(r_0+r_1)\cos\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\theta\right)\right]e_2.$$

$$x''=\frac{dx'}{d\theta}=\left[-(r_0+r_1)\cos\theta+\frac{(r_0+r_1)^2}{r_1}\cos\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\theta\right)\right]e_1$$
$$+\left[-(r_0+r_1)\sin\theta+\frac{(r_0+r_1)^2}{r_1}\sin\left(\frac{r_0+r_1}{r}\theta\right)\right]e_2.$$

$$\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}''=\frac{(r_0+r_1)^2(r_0+2r_1)}{r_1}\left[1-\left(\sin\theta\sin\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\theta\right)+\cos\theta\cos\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\theta\right)\right)\right]\boldsymbol{e}_3$$
$$=\frac{(r_0+r_1)^2(r_0+2r_1)}{r_1}[1-\cos(r_0/r_1)\theta]\boldsymbol{e}_3.$$

$$(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')\cdot(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')=\frac{(r_0+r_1)^4(r_0+2r_1)^2}{r_1^2}[1-\cos(r_0/r_1)\theta]^2.$$

$$\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}'=2(r_0+r_1)^2\left[1-\left(\sin\theta\sin\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\theta\right)+\cos\theta\cos\left(\frac{r_0+r_1}{r_1}\theta\right)\right)\right]$$
$$=2(r_0+r_1)^2[1-\cos(r_0/r_1)\theta].$$

$$\varkappa^2=\frac{(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')\cdot(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')}{(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}')^3}=\frac{(r_0+2r_1)^2}{8r_1^2(r_0+r_1)^2[1-\cos(r_0/r_1)\theta]}$$
$$=\frac{(r_0+2r_1)^2}{16r_1^2(r_0+r_1)^2\sin^2(r_0/2r_1)\theta},$$

$$s=\int_{\frac{r_1\pi}{r_0}}^{\theta}\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{d\theta}\right|d\theta=\frac{-4r_1(r_0+r_1)}{r_0}\cos(r_0/2r_1)\theta,$$

$$s^2=\frac{16r_1^2(r_0+r_1)^2}{r_0^2}\cos^2(r_0/2r_1)\theta.$$

在 $\varkappa^2$ 和 s^2 的方程中,消去 θ 得

$$\frac{s^2}{A^2}+\frac{1}{\varkappa^2B^2}=1$$

即
$$\frac{s^2}{A^2}+\frac{\rho^2}{B^2}=1,$$

其中
$$A=\frac{4r_1(r_0+r_1)}{r_0},\quad B=\frac{4r_1(r_0+r_1)}{r_0+r_1}.$$

这就是所要的结果。

注意 $A>B$. 而对于圆内旋轮线 $B>A$(参见问题 3.28).

5.3 确定自然方程是 $\varkappa=(1/2as)^{1/2}$, $\tau=0$, $a>0$, $s>0$ 的曲线.

解: 令 $\dot\phi=\varkappa=(1/2as)^{1/2}$, 积分得 $\phi=(2s/a)^{1/2}$ 即 $s=a\phi^2/2$, 所以 $\varkappa=1/a\phi$. 从方程(5.6)得到曲线

$$\boldsymbol{x}=a\int\phi[(\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\phi)\boldsymbol{e}_2]d\phi=a(\cos\phi+\phi\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+a(\sin\phi-\phi\cos\phi)\boldsymbol{e}_2.$$

5.4 证明自然方程是 $\varkappa=\sqrt{2}/(s^2+4)$, $\tau=\sqrt{2}/(s^2+4)$ 的曲线是在柱面上的一般螺线,这柱面的截痕是悬链线.

证: 因为 $\varkappa/\tau=1=$ 常数. 从问题 4.21 知曲线是一段螺线.

现在设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 是螺线的自然表示, 螺线的轴的单位向量是 $\boldsymbol{u}$, $\alpha=\angle(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u})$, 从问题 4.21 知 $\varkappa/\tau=\tan\alpha$, 于是 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, 问题变成求螺线在过原点且垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的平面上的投影 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}(s)-(\boldsymbol{x}(s)\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ 的自然方程,如图 5-11所示,计算

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\boldsymbol{t}-(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{t}-(\cos\alpha)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u}/\sqrt{2},$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|=[(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u}/\sqrt{2})\cdot(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u}/\sqrt{2})]^{1/2}=1/\sqrt{2}.$$

沿投影曲线的自然参数是

$$s^*=\int_0^s\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|ds=s/\sqrt{2}.$$

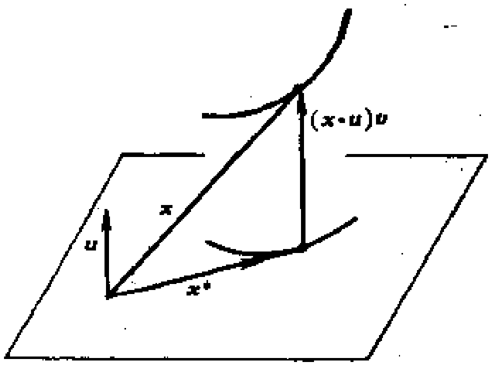


图 5-11

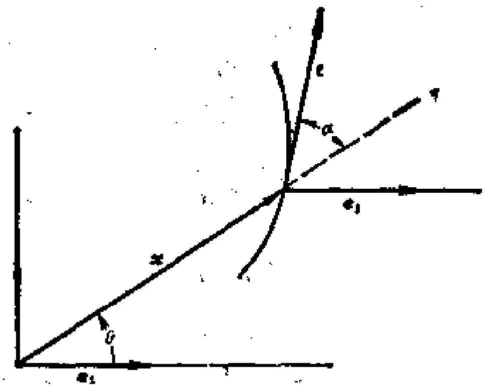


图 5-12

从问题 4.6 知 $\varkappa^*=\varkappa/\sin^2\alpha=2\sqrt{2}/(s^2+4)$.

因此 $\varkappa^*=\sqrt{2}/(s^{*2}+2)$ 是投影的自然方程, 从问题 5.1 知投影曲线是悬链线.

5.5 证明位于半径为 a 的球面上挠率 τ 求不为零的曲线, 满足以下方程

$$\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^2+\left(\frac{\dot\varkappa}{\varkappa^2\tau}\right)^2=a^2.$$

证: 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 位于中心在 $\boldsymbol{y}_0$ 半径为 a 的球面上, 则对所有 s, $(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)\cdot(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}_0)=a^2$.

微分得 $\quad 2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}=0$, 即 $\quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{t}=0$.

再微分 $\quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{t}}+\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{t}=0$, 即 $\quad \varkappa(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{n}+1=0$.

得到 $\varkappa\neq0$ 且 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{n}=-1/\varkappa$, 最后再微分得

$$\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{n}}=\dot\varkappa/\varkappa^2 \quad \text{即} \quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot(-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})=\dot\varkappa/\varkappa^2.$$

应用 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{t}=0$, 有 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot\boldsymbol{b}=\dot\varkappa/\varkappa^2\tau$, 其中 $\tau\neq0$, 于是 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0$ 对 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ 的分量是 0, $-1/\varkappa$, $\dot\varkappa/\varkappa^2\tau$, 因此 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0=\dfrac{-1}{\varkappa}\boldsymbol{n}+\dfrac{\dot\varkappa}{\varkappa^2\tau}\boldsymbol{b}$.

但在球面上

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0)=\left(-\frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{n}+\frac{\dot\varkappa}{\varkappa^2\tau}\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{n}+\frac{\dot\varkappa}{\varkappa^2\tau}\boldsymbol{b}\right)=\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^2+\left(\frac{\dot\varkappa}{\varkappa^2\tau}\right)^2=a^2.$$

5.6 证明, 如果平面曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的向径 $\boldsymbol{x}$ 和切线方向 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(s)$ 成定角, 则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 是对数螺线.

证: 我们有 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t}=(\cos\alpha)|\boldsymbol{x}|$, 因为 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{t}$, $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}|=|\sin\alpha||\boldsymbol{x}|$, 我们可以选取 $\boldsymbol{n}$ 的方向使得 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=(-\sin\alpha)|\boldsymbol{x}|$. 微分第一个式子得

$$\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{t}}=(\cos\alpha)\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t}}{|\boldsymbol{x}|}, \quad \text{即} \quad 1+\varkappa\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=\cos^2\alpha.$$

再微分 $\quad \dot\varkappa\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}+\varkappa\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{n}+\varkappa\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{n}}=0$,

因为 $\tau=0$, $\dot{\boldsymbol{n}}=-\varkappa\boldsymbol{t}$, 于是 $\dot\varkappa\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}-\varkappa^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t}=0$, 且

$$|\boldsymbol{x}|(-\dot\varkappa\sin\alpha-\varkappa^2\cos\alpha)=0, \quad \text{即} \quad \dot\varkappa=-(\cot\alpha)\varkappa^2.$$

这个微分方程可用分离变量解出

$\varkappa=\dfrac{1}{(\cot\alpha)s+c}$. 这是对数螺线的自然方程(见例 5.2 和问题 5.28).

另一方法是引进 $\phi=\angle(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{e}_1)$, 极角 $\theta=\angle(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1)=\phi-\alpha$, 且 $r=|\boldsymbol{x}|$, 如图 5-12 所示. 则 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t}=(\cos\alpha)r$ 且 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=(-\sin\alpha)r$, 微分后面的式子得到

$$-\sin\alpha\,\frac{dr}{d\theta}=\frac{d}{ds}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})\frac{ds}{d\phi}\,\frac{d\phi}{d\theta}=(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{n}})(1/\varkappa)=(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{n}})(1/\varkappa),$$

其中我们应用

$$\frac{d\phi}{ds}=\varkappa \quad 和 \quad \frac{d\phi}{d\theta}=1,$$

则
$$-\sin\alpha\frac{dr}{d\theta}=-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t})=-(\cos\alpha)r,$$

其中我们应用

$$\dot{\boldsymbol{n}}=-\varkappa\boldsymbol{t},$$

积分
$$\frac{dr}{d\theta}=r\cot\alpha$$

得 $r=e^{(\cot\alpha)\theta+c}$ 是对数螺线.

5.7 设曲线 C 由 $\boldsymbol{x}=a\int\boldsymbol{g}(t)\times\boldsymbol{g}'(t)dt$, $a=$常数$\neq0$ 确定. 其中 $\boldsymbol{g}(t)$ 是满足 $|\boldsymbol{g}(t)|=1$ 且 $[\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'']\neq0$ 的向量函数, 证明 $\varkappa\neq0$ 和 $\tau=1/a$.

证: $\boldsymbol{x}'=a(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}')$.

$\boldsymbol{x}''=a(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}'')+a(\boldsymbol{g}'\times\boldsymbol{g}')=a(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}'')$.

$\boldsymbol{x}'''=a(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}''')+a(\boldsymbol{g}'\times\boldsymbol{g}'')$.

因为 $|\boldsymbol{g}|=1$, $\boldsymbol{g}\perp\boldsymbol{g}'$, 应用定理 1.8 导出的恒等式 $[F_1]$, $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}'=a^2(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}')\cdot(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}')=a^2(\boldsymbol{g}'\cdot\boldsymbol{g}')(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g})=a^2|\boldsymbol{g}'|^2$. 从恒等式 $[F_2]$ 得

$$\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}''=a^2(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}')\times(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}'')=a^2\{[\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'']\boldsymbol{g}-[\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}]\boldsymbol{g}''\}=a^2(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'')\boldsymbol{g}.$$

但从定理 4.2 知 $\varkappa=\dfrac{|\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}''|}{|\boldsymbol{x}'|^3}$, 所以 $\varkappa=\dfrac{|[\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'']|}{a|\boldsymbol{g}'|^3}\neq0$, 且

$$[\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}''\boldsymbol{x}''']=(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')\cdot\boldsymbol{x}'''=a^2[\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'']\boldsymbol{g}\cdot[a(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}''')+a(\boldsymbol{g}'\times\boldsymbol{g}'')]=a^3[\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'']^2.$$

从定理 4.5

$$\tau=\frac{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}''\boldsymbol{x}''')}{(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')\cdot(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')}=\frac{a^3(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'')^2}{a^4(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'')^2}=\frac{1}{a}=常数\neq0.$$

5.8 证明上题的逆命题: 如果 $\tau=$常数$=1/a$, 曲线可以表示为

$$\boldsymbol{x}=a\int\boldsymbol{g}(t)\times\boldsymbol{g}'(t)dt,$$

其中 $|\boldsymbol{g}(t)|=1$, 且 $[\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g}'']\neq0$.

证: 从 Frenet 方程

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{b}\times(-\dot{\boldsymbol{b}}/\tau)=a\boldsymbol{b}\times\dot{\boldsymbol{b}}.$$

于是
$$\boldsymbol{x}=\int\boldsymbol{t}\,ds=a\int\boldsymbol{b}\times\dot{\boldsymbol{b}}\,ds.$$

从 $\dot{\boldsymbol{b}}=-\tau\boldsymbol{n}=-(1/a)\boldsymbol{n}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{b}}=-(1/a)\dot{\boldsymbol{n}}=-(1/a)(-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})$, 推出 $\boldsymbol{b}$, $\dot{\boldsymbol{b}}$, $\ddot{\boldsymbol{b}}$ 是线性无关的, 即 $[\boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{b}}\ddot{\boldsymbol{b}}]\neq0$.

5.9 证明曲线上充分小的弧的长度 s 和对应弦的长度 $|\boldsymbol{PQ}|$ 之差是 s^3 阶.

证: 应用曲线的规范表示

$$x_1=s-\frac{1}{6}\varkappa_0^2s^3+o_1(s^3),$$

$$x_2=\frac{1}{2}\varkappa_0s^2+\frac{1}{6}\dot{\varkappa}_0s^3+o_2(s^3),$$

$$x_3=\frac{1}{6}\varkappa_0\tau_0 s^3+o_3(s^3).$$

平方每个分量

$$x_1^2=s^2-\frac{1}{3}\varkappa_0^2 s^4+o(s^4),$$

$$x_2^2=\frac{1}{4}\varkappa_0^2 s^4+o(s^4),\ x_3^2=o(s^4).$$

现在 $$|PQ|=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}=\left[s^2-\frac{1}{12}\varkappa_0^2 s^4+o(s^4)\right]^{1/2}$$

$$=\left[\left(s-\frac{1}{24}\varkappa_0^2 s^3+o(s^3)\right)^2\right]^{1/2}=s-\frac{1}{24}\varkappa_0^2 s^3+o(s^3),$$

于是 $|PQ|-s=-\frac{\varkappa_0^2}{24}s^3+(s^3)$，差是 s^3 阶的.

5.10 如果曲线 C 的主法线是曲线 C^* 的副法线，证明沿 C，$\alpha(\varkappa^2+\tau^2)=\varkappa$，$\alpha=$常数.

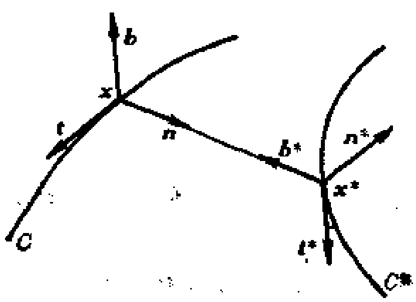


图 5-13

证：设 C 用 $x=x(s)$ 给出，设 x^* 表示 C^* 上的点，其中 C^* 的副法线是 $x(s)$ 的主法线，如图 5-13 所示. 则 $x^*-x(s)$ 平行于 $n(s)$，所以 $x^*=x(s)+\alpha(s)n(s)$. 研究切向量

$$\frac{dx^*}{ds}=\frac{d}{ds}(x+\alpha n)=(\dot{x}+\dot{\alpha}n+\alpha\dot{n})$$

$$=(t+\dot{\alpha}n-\alpha\varkappa t+\alpha\tau b)$$

$$=(1-\alpha\varkappa)t+\dot{\alpha}n+\alpha\tau b,$$

因为 $$\frac{dx^*}{ds}\perp b^*,\quad \frac{dx^*}{ds}\perp n,$$

于是 $$0=n\cdot\frac{dx^*}{ds}=(1-\alpha\varkappa)(t\cdot n)+\dot{\alpha}(n\cdot n)+\alpha\tau(b\cdot n)=\dot{\alpha}.$$

因此 $$\alpha=\text{常数},\quad \frac{dx^*}{ds}=(1-\alpha\varkappa)t+\alpha\tau b.$$

现在 $$t^*=\frac{dx^*}{ds^*}=\frac{dx^*}{ds}\frac{ds}{ds^*}=[(1-\alpha\varkappa)t+\alpha\tau b]\frac{ds}{ds^*},$$

$$\frac{dt^*}{ds^*}=\frac{d}{ds}[(1-\alpha\varkappa)t+\alpha\tau b]\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2+[(1-\alpha\varkappa)t+\alpha\tau b]\frac{d^2s}{ds^{*2}}$$

$$=[-\alpha\dot{\varkappa}t+(1-\alpha\varkappa)\dot{t}+\alpha\dot{\tau}b+\alpha\tau\dot{b}]\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2+[(1-\alpha\varkappa)t+\alpha\tau b]\frac{d^2s}{ds^{*2}}$$

$$=[-\alpha\dot{\varkappa}t+[\varkappa(1-\alpha\varkappa)-\alpha\tau^2]n+\alpha\dot{\tau}b]\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2$$

$$+[(1-\alpha\varkappa)t+\alpha\tau b]\frac{d^2s}{ds^{*2}}.$$

但因 $\frac{dt^*}{ds^*}=\varkappa^*n^*$，$\frac{dt^*}{ds^*}\perp b^*$，于是

$$\frac{dt^*}{ds^*}\perp n\quad 且\quad 0=n\cdot\frac{dt^*}{ds^*}=[(1-\alpha\varkappa)\varkappa-\alpha\tau^2]\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2.$$

因为 $$\frac{ds}{ds^*}\neq 0\quad(否则\ s=常数),$$

有 $$(1-\alpha\varkappa)\varkappa-\alpha\tau^2=0\quad 即\quad \alpha(\varkappa^2+\tau^2)=\varkappa.$$

5.11 两条曲线 C 和 C^* 如果它们有公共的主法线，则称 C 和 C^* 为 Bertrand 曲线，如图 5-14 所示.

(a) 证明两条 Bertrand 曲线对应点之间的距离是常数;

(b) 证明两条 Bertrand 曲线对应切线之间的交角是定角.

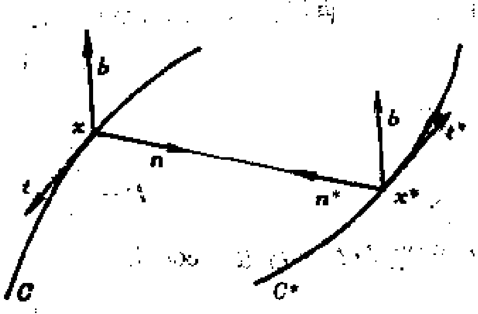


图 5-14

证: (a) 设 C 用 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 给出，$\boldsymbol{x}^*$ 表示 C^* 上的点，它的主法线也是 $\boldsymbol{x}(s)$ 的主法线，则 $\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}(s)$ 平行于 $\boldsymbol{n}(s)$. 所以 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}(s)+\alpha(s)\boldsymbol{n}(s)$.

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\dot{\boldsymbol{x}}+\dot{\alpha}\boldsymbol{n}+\alpha\dot{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{t}+\dot{\alpha}\boldsymbol{n}+\alpha(-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})=(1-\alpha\varkappa)\boldsymbol{t}+\dot{\alpha}\boldsymbol{n}+\alpha\tau\boldsymbol{b},$$

但 $\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}$ 是 C^* 的切向量，因此垂直于 $\boldsymbol{n}^*$ 和 $\boldsymbol{n}$，于是

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right)=\dot{\alpha}=0,\ \alpha=\text{常数},$$

所以对应点之间的距离是

$$|\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}(s)|=|\alpha\boldsymbol{n}(s)|=|\alpha|=\text{常数}.$$

(b) 设 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{t}^*$ 分别是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 和 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{n}$ 的单位切向量，研究

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{t})=\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}^*\cdot\dot{\boldsymbol{t}}=\left(\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds^*}\cdot\boldsymbol{t}\right)\frac{ds^*}{ds}+\boldsymbol{t}^*\cdot\varkappa\boldsymbol{n}$$

$$=\varkappa^*\frac{ds^*}{ds}(\boldsymbol{n}^*\cdot\boldsymbol{t})+\varkappa(\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{n}).$$

因为 $\boldsymbol{n}^*=\pm\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}^*\perp\boldsymbol{t}$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{t}^*$，于是

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{t})=0,$$

所以

$$\boldsymbol{t}^*\cdot\boldsymbol{t}=\text{常数}.$$

5.12 如果沿 C, $\tau\neq0$, 证明 C 是 Bertrand 曲线(即是存在曲线 C^*，使得 C 和 C^* 是 Bertrand 曲线)的充分必要条件是存在常数 γ 和 α，使得 $\varkappa+\gamma\tau=1/\alpha$.

证: 设 C 是用 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 给出，沿 C、$\tau\neq0$ 且 $\varkappa+\gamma\tau=1/\alpha$.

用 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}(s)+\alpha\boldsymbol{n}(s)$ 来定义 C^*.

问题变成证明 C 和 C^* 是 Bertrand 曲线，我们计算

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=(\dot{\boldsymbol{x}}+\alpha\dot{\boldsymbol{n}})=\boldsymbol{t}-\alpha\varkappa\boldsymbol{t}+\alpha\tau\boldsymbol{b}=(1-\alpha\varkappa)\boldsymbol{t}+\alpha\tau\boldsymbol{b}$$

$$=\alpha\tau\gamma\boldsymbol{t}+\alpha\tau\boldsymbol{b}=\alpha\tau(\gamma\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}).$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|=|\alpha\tau|(\gamma^2+1)^{1/2}.$$

$$\boldsymbol{t}^*=\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|=\pm(\gamma^2+1)^{-1/2}(\gamma\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}),$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds}=\pm(\gamma^2+1)^{-1/2}(\gamma\dot{\boldsymbol{t}}+\dot{\boldsymbol{b}})=\pm(\gamma^2+1)^{-1/2}(\gamma\varkappa-\tau)\boldsymbol{n},$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds^*}=\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|=\pm\frac{(\gamma\varkappa-\tau)}{|\alpha\tau|(\gamma^2+1)}\boldsymbol{n}=\varkappa^*\boldsymbol{n}^*,$$

得到 $\boldsymbol{n}=\pm\boldsymbol{n}^*$. 这就证明了曲线是 Bertrand 曲线. 反之, 设 C 用 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 给出, 是 Bertrand 曲线, 且沿 C, $\tau\neq0$, 根据前题, C^* 可以表示为

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}(s)+\alpha\boldsymbol{n}(s),\ \alpha=\text{常数}\neq0.$$

计算

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\boldsymbol{t}+\alpha\dot{\boldsymbol{n}}=(1-\alpha\varkappa)\boldsymbol{t}+\alpha\tau\boldsymbol{b}.$$

$$\boldsymbol{t}^*=\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\frac{ds}{ds^*}=[(1-\alpha\varkappa)\boldsymbol{t}+\alpha\tau\boldsymbol{b}]\frac{ds}{ds^*}.$$

由前题 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*=$常数$=\cos\beta$, 则

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*=(1-\alpha\varkappa)\frac{ds}{ds^*}=\cos\beta.$$

因为 $\boldsymbol{t}^*$ 是在 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面上的单位向量, 且 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}^*=\cos\beta$, 有 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}^*=\pm\sin\beta$, 于是

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}^*=\alpha\tau\frac{ds}{ds^*}=\pm\sin\beta.$$

因为 $\alpha\neq0$, $\tau\neq0$, 且 $\frac{ds}{ds^*}\neq0$, 则 $\sin\beta\neq0$, 最后消去 $\frac{ds}{ds^*}$, 有 $\pm(1-\alpha\varkappa)\sin\beta=\alpha\tau\cos\beta$, 即 $\varkappa\pm\tau\cot\beta=1/\alpha$, 即 $\varkappa+\gamma\tau=1/\alpha$, 其中 $\gamma=\pm\cot\beta$.

5.13 如果沿 C, $\tau\neq0$, 证明存在一条以上的曲线 C^*, 使得 C 和 C^* 是 Bertrand 曲线的充分必要条件是 C 为圆柱螺线.

证: 设 C 是圆柱螺线, 则沿 C, $\tau=$常数$\neq0$ 且 $\varkappa=$常数$\neq0$, 于是对任一 $\alpha\neq0$ 能够找到一个 $\gamma=$常数$\neq0$, 使得 $\varkappa+\gamma\tau=1/\alpha$, 从前题推出 C 有无限多条 Bertrand 侣线.

反之, 设 C、C^* 和 C^{**} 是 Bertrand 曲线, 且沿 C、$\tau\neq0$, 则前题证明了存在常数 γ, γ^*, α, α^*($\alpha\neq\alpha^*$, 否则 $C^*=C^{**}$)使得

$$\varkappa+\gamma\tau=1/\alpha \quad 和 \quad \varkappa+\gamma^*\tau=1/\alpha^*.$$

于是

$$\gamma\neq\gamma^* \quad 且 \quad \tau=(1/\alpha^*-1/\alpha)/(\gamma^*-\gamma)=\text{常数}.$$

解上面的方程得到

$$\varkappa=(\gamma^*/\alpha-\gamma/\alpha^*)(\gamma^*-\gamma)=\text{常数}.$$

因为 $\varkappa=$常数和 $\tau=$常数是 C 的自然方程, 故曲线 C 是圆柱螺线.

2. 渐伸线和渐屈线

5.14 求圆 $\boldsymbol{x}=a(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+a(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$, $a>0$ 的渐伸线方程, 这条渐伸线可以用一根始点在 $\theta=0$ 的绳子展开生成, 如图 5-15 所示.

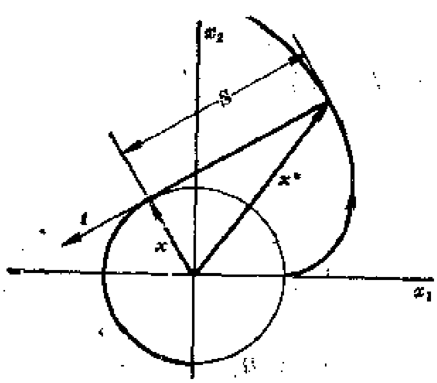


图 5-15

解: 如果 s 是圆的自然参数, 使得当 $\theta=0$ 时, $s=0$, 则渐伸线方程是 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}-s\boldsymbol{t}$, 显然, 弧长 $s=a\theta$,

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{x}}{d\theta}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{d\theta}\right|=(-\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,$$

于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^*&=(a(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+a(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2)-a\theta((-\sin\theta)\boldsymbol{e}_1\\&\quad+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2)\\&=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+a(\sin\theta-\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\end{aligned}$$

就是所要的结果.

5.15 证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的渐伸线 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+(c-s)\boldsymbol{t}$ 的曲率满足

$$\varkappa^{*2}=\frac{\varkappa^2+\tau^2}{(c-s)^2\varkappa^2}.$$

证: $\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\dot{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{t}+(c-s)\dot{\boldsymbol{t}}=(c-s)\varkappa\boldsymbol{n}$,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|=|(c-s)\varkappa|.$$

$$\boldsymbol{t}^*=\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|=\operatorname{sign}[(c-s)\varkappa]\boldsymbol{n}.$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds}=\operatorname{sign}[(c-s)\varkappa]\dot{\boldsymbol{n}}=\operatorname{sign}[(c-s)\varkappa](-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}).$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds^*}=\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|=\frac{-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}}{(c-s)\varkappa}.$$

于是
$$\varkappa^{*2}=\left|\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds^*}\right|^2=\frac{\varkappa^2+\tau^2}{(c-s)^2\varkappa^2}.$$

5.16 证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的渐伸线 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+(c-s)\boldsymbol{t}$ 的单位副法向量是

$$\boldsymbol{b}^*=\frac{\varkappa\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{t}}{|(c-s)\varkappa|\varkappa^*}.$$

证: 由前题

$$\boldsymbol{t}^*=\operatorname{sign}[(c-s)\varkappa]\boldsymbol{n},$$

且
$$\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds^*}=\frac{-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}}{(c-s)\varkappa}=\varkappa^*\boldsymbol{n}^*.$$

因此
$$\boldsymbol{n}^*=\frac{-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}}{(c-s)\varkappa\varkappa^*}$$

且
$$\boldsymbol{b}^*=\boldsymbol{t}^*\times\boldsymbol{n}^*=\frac{\boldsymbol{n}\times(-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})}{|(c-s)\varkappa|\varkappa^*}=\frac{\varkappa\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{t}}{|(c-s)\varkappa|\varkappa^*}.$$

5.17 证明平面曲线的两条渐伸线是 Bertrand 曲线(见问题 5.11)。

证: 如图 5-16 所示, 如图 C_1^* 和 C_2^* 是平面曲线 C 沿 C 的切线 L 在对应点的渐伸线, C_1^* 和 C_2^* 的切线都垂直于 L, 因此它们在这两点的主法线重合且实际上就是 L, 这就证明了 C_1^* 和 C_2^* 是 Bertrand 曲线.

5.18 证明曲线 C 的渐屈线 C^* 的主法线是平行于 C 的切线.

证: 若 C 是 C^* 的渐伸线, 则由定义 C^* 是 C 的渐屈线, 于是问题等价于: 证明曲线 C^* 的渐伸线 C 的切线, 平行于 C^* 的法线, 但这可从问题 5.15 所导出的方程

$$\boldsymbol{t}^*=\operatorname{sign}[(c-s)\varkappa]\boldsymbol{n}=\pm\boldsymbol{n}\ \text{推得.}$$

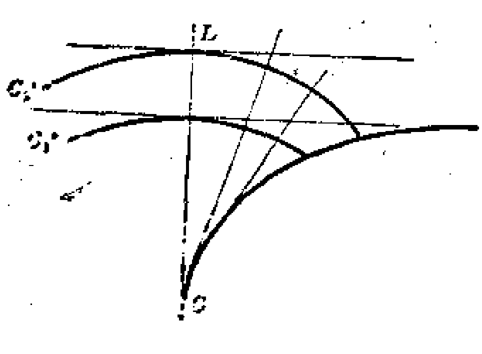


图 5-16

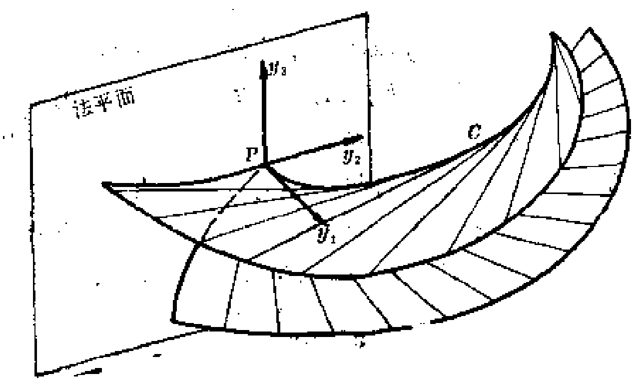


图 5-17

5.19 证明曲线 C 的切线曲面和 C 在 P 点(其中 $\tau_0\neq0,\ \varkappa_0\neq0$) 的法面的交线是在 P 点有尖点的曲线，如图 5-17 所示.

证：我们利用曲线 C 在 P 点邻近的规范表示的首项

$$x_1=s,\quad x_2=\frac{1}{2}\varkappa_0s^2,\quad x_3=\frac{1}{6}\varkappa_0\tau_0s^3.$$

在此情况下，切线曲面 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{t}\ (-\infty<k<\infty)$ 在 P 点邻近等于

$$y_1=s+k,\quad y_2=\frac{1}{2}\varkappa_0s^2+k\varkappa_0s,$$

$$y_3=\frac{1}{6}\varkappa_0\tau_0s^3+\frac{1}{2}k\varkappa_0\tau_0s^2.$$

在 P 的法面是 y_2y_3 平面，即 $y_1=0$，则沿交线

$y_1=s+k=0$ 或 $s=-k$，于是在 P 点邻近，交线是

$$y_2=\frac{1}{2}\varkappa_0s^2-\varkappa_0s^2=-\frac{1}{2}\varkappa_0s^2,$$

$$y_3=\frac{1}{6}\varkappa_0\tau_0s^3-\frac{1}{2}\varkappa_0\tau_0s^3=-\frac{1}{3}\varkappa_0\tau_0s^3,$$

或

$$y_2=-\frac{1}{2}\varkappa_0^{1/3}(3/\tau_0)^{2/3}y_3^{2/3},$$

这是个尖点，如图 5-17 所示.

3. 切触理论，密切曲面

5.20 证明曲线 $\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{e}_1+t^2\boldsymbol{e}_2+t^3\boldsymbol{e}_3$ 和抛物面 $x_1^2+x_3^2-x_2=0$ 在原点 $(t=0)$ 有 6 点切触.

证：考虑 $$f(t)=(t^2)+(t^3)^2-t^2=t^6,$$

$$f'(t)=6t^5,\ f''(t)=30t^4,\ f'''(t)=120t^3,\ f^{(4)}(t)=360t^2,\ f^{(5)}(t)=720t,\ f^{(6)}(t)=720.$$

显然 $f^{(i)}(0)=0,\ i=1,2,3,4,5$ 且 $f^{(6)}(0)\neq0$. 因此曲线和抛物面在 $t=0$ 有 6 点切触.

5.21 证明密切平面和曲线在 P 点至少有 4 点切触的充分必要条件是在 P 点曲线的曲率或挠率二者之一为零.

证：曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 在 $s=s_0$ 的密切平面是 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{b}_0=0$，我们研究

$$f(s)=(\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{b}_0$$

$$f'(s)=\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}_0,\ f''(s)=\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{b}_0=\varkappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}_0$$

$$f'''(s)=\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}_0+\varkappa\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{b}_0=\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}_0-\varkappa^2\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}_0+\varkappa\tau\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}_0.$$

显然 $$f(s_0)=0,\ f'(s_0)=\boldsymbol{t}_0\cdot\boldsymbol{b}_0=0,\ f''(s_0)=\varkappa_0\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{b}_0=0.$$

$$f'''(s_0)=\dot{\varkappa}_0\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{b}_0-\varkappa_0^2\boldsymbol{t}_0\cdot\boldsymbol{b}_0+\varkappa_0\tau_0\boldsymbol{b}_0\cdot\boldsymbol{b}_0=\varkappa_0\tau_0=0,$$

充分必要条件是 $\varkappa_0=0$ 或 $\tau_0=0$，这就是所要的结果.

5.22 证明曲线的曲率中心轨迹是曲线的渐屈线的必要充分条件是曲线为平面曲线.

证：曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的曲率中心轨迹是曲线 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(1/\varkappa)\boldsymbol{n}$，因而是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的唯一的平面渐屈线(见例 5.6)，另一方面，曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的渐屈线是形如下面的曲线

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+(1/\varkappa)\boldsymbol{n}+(1/\varkappa)\left[\cot\left(\int\tau\,ds+c\right)\right]\boldsymbol{b},$$

因为 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性无关，$\boldsymbol{y}$ 等于某一 $\boldsymbol{x}^*$ 的充分必要条件是对某一个 c，$\cot\left(\int\tau ds+c\right)=0$ 即

$\int \tau ds = \pi/2 - c =$ 常数, 因此 $\tau\equiv 0$, 所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 为平面曲线.

5.23 如果在平面曲线上两个点之间 $\dot{\varkappa}$ 不改号, 证明在这两点曲率半径的差等于曲线的曲率中心轨迹上对应点之间的弧长.

证: 曲线中心的轨迹是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(1/\varkappa)\boldsymbol{n}$, 微分得

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{ds}=\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2}\boldsymbol{n}+\frac{1}{\varkappa}\dot{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{t}-\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2}\boldsymbol{n}+\frac{1}{\varkappa}(-\varkappa\boldsymbol{t})=\frac{-\dot{\varkappa}}{\varkappa^2}\boldsymbol{n},$$

其中我们用了 $\tau\equiv 0$, 这是因为曲线是平面曲线. 现在设在点 $\boldsymbol{x}(s_1)$ 和 $\boldsymbol{x}(s_2)$ $(s_1<s_2)$ 之间 $\dot{\varkappa}\geqslant 0$. 则对 $s_1\leqslant s\leqslant s_2$,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{y}}{ds}\right|=\left|\frac{-\dot{\varkappa}}{\varkappa^2}\right|=\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2}.$$

曲率中心轨迹上对应点之间的弧长是

$$\int_{s_1}^{s_2}\left|\frac{d\boldsymbol{y}}{ds}\right|ds=\int_{s_1}^{s_2}\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2}ds=-\int_{s_1}^{s_2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)ds$$
$$=-\left(\frac{1}{\varkappa(s_2)}-\frac{1}{\varkappa(s_1)}\right)=-\rho(s_2)+\rho(s_1).$$

这是所要的结果.

5.24 证明曲线的曲率球心的轨迹的切线, 平行于曲线在对应点的副法线.

证: 曲率球心的轨迹是

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(1/\varkappa)\boldsymbol{n}-\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2\tau}\boldsymbol{b}.$$

轨迹的切向量是

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{ds}=\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2}\boldsymbol{n}+(1/\varkappa)\dot{\boldsymbol{n}}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2\tau}\right)\boldsymbol{b}-\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2\tau}\dot{\boldsymbol{b}}$$
$$=\boldsymbol{t}-\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2}\boldsymbol{n}+(1/\varkappa)(-\varkappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})-\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2\tau}\right)\boldsymbol{b}-\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2\tau}(-\tau\boldsymbol{n})$$
$$=\left[\frac{\tau}{\varkappa}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2\tau}\right)\right]\boldsymbol{b}.$$

这就得到所要的结果.

§5.3 补 充 题

5.25 求曲线 $\boldsymbol{x}=e^t(a(\cos t)\boldsymbol{e}_1+a(\sin t)\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3)$ 的自然方程.

答: $\varkappa=\dfrac{a\sqrt{2}}{s(2a^2+b^2)^{1/2}}$, $\tau=\dfrac{b}{s(2a^2+b^2)^{1/2}}$.

5.26 求圆内旋轮线的自然方程, 圆内旋轮线方程是

$$\boldsymbol{x}=\left[(r_0-r_1)\cos\theta+r_1\cos\left(\frac{r_0-r_1}{r_1}\theta\right)\right]\boldsymbol{e}_1+\left[(r_0-r_1)\sin\theta-r_1\sin\left(\frac{r_0-r_1}{r_1}\theta\right)\right]\boldsymbol{e}_2.$$

答: $\dfrac{s^2}{A^2}+\dfrac{1}{\varkappa^2B^2}=1$, $\tau=0$, $A<B$.

5.27 如果 C 是平面曲线, 证明总是存在曲线 C^*, 使得 C^* 和 C 是 Bertrand 曲线.

5.28 求自然方程是 $\varkappa=\dfrac{1}{as+b}$, $\tau=0$, $s>0$, $a>0$ 的曲线.

答: 对数螺线 $r=ce^{a\theta}$.

5.29 求曲线 $\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{e}_1+t^2\boldsymbol{e}_2+t^3\boldsymbol{e}_3$ 的切线曲面的方程.

答：$\boldsymbol{x}=(t+k)\boldsymbol{e}_1+(t^2+2kt)\boldsymbol{e}_2+(t^3+3kt^2)\boldsymbol{e}_3$, $\quad -\infty<k<\infty$.

5.30 证明圆的所有渐伸线相迭合.

5.31 如果两条曲线在对应点有相同的副法线，证明这两条曲线是平面曲线.

5.32 证明类 $\geqslant 4$ 的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 满足微分方程

$$\boldsymbol{x}^{(4)}-\left(\frac{2\dot{\varkappa}}{\varkappa}+\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)\dddot{\boldsymbol{x}}+\left(\varkappa^2+\tau^2+\frac{\dot{\varkappa}\dot{\tau}}{\varkappa\tau}+\frac{2\dot{\varkappa}^2-\varkappa\ddot{\varkappa}}{\varkappa^2}\right)\ddot{\boldsymbol{x}}+\varkappa^2\left(\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa}-\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)\dot{\boldsymbol{x}}=0$$

（提示：计算 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{t}$, $\ddot{\boldsymbol{x}}=\dot{\boldsymbol{t}}=\varkappa\boldsymbol{n}$,
$\dddot{\boldsymbol{x}}=\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}+\varkappa\dot{\boldsymbol{n}}=\dot{\varkappa}\boldsymbol{n}-\varkappa^2\boldsymbol{t}+\varkappa\tau\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{x}^{(4)}=\cdots$ 作为 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{b}$ 的线性组合代入）.

5.33 如果曲线在球面上，证明

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^2\tau}\right)-\frac{\tau}{\varkappa}=0.$$

5.34 (a) 证明回转圆锥面上的螺旋线，在垂直于锥面的轴的平面上的投影是对数螺线.

(b) 证明回转圆锥面上螺旋线的自然方程是

$$\varkappa=1/as,\ \tau=1/bs,\ a,\ b=\text{常数}.$$

5.35 证明曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的渐伸线 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+(c-s)\boldsymbol{t}$ 的挠率是

$$\tau^*=\frac{\varkappa\dot{\tau}-\dot{\varkappa}\tau}{(c-s)\varkappa(\varkappa^2+\tau^2)}.$$

5.36 证明平面曲线的渐屈线为一般螺线.

5.37 证明 $\cot\left[\int\tau ds+c\right]$ 是渐屈线的挠率和它的曲率之比.（提示：利用在问题 5.35 中曲线 C 和渐伸线 C^* 之间的关系，或者等价地用曲线 C^* 和渐屈线 C 之间的关系.）

5.38 证明圆柱螺线曲率中心的轨迹是有相同螺距的共轴的螺线，且曲率中心轨迹的曲率中心轨迹是原来的螺线.

5.39 证明圆柱螺线的挠率和这螺线在对应点的曲率中心的轨迹的挠率的乘积等于 $\varkappa^2$.

5.40 在常曲率和常挠率的情况下，求 Frenet 方程的积分.

5.41 如果螺线在球面上，证明螺线在垂直于它的轴的平面上的投影是圆外旋轮线弧.

（提示：证明投影的自然方程是 $\dfrac{s^2}{A^2}+\dfrac{1}{\varkappa^2B^2}=1$, $A>B$, 见问题 5.2.）

5.42 证明旋转抛物面上的螺线在垂直于它的轴的平面上的投影是圆的渐伸线.

5.43 证明两条 Bertrand 曲线的挠率的乘积是常数.

5.44 如果曲线 C 用 $\boldsymbol{x}=a\int\boldsymbol{g}(t)dt+b\int\boldsymbol{g}(t)\times\boldsymbol{g}'(t)dt$ 定义，其中 $|\boldsymbol{g}(t)|=1$ 且 $|\boldsymbol{g}'(t)|=1$，证明 C 是 Bertrand 曲线.

第六章 欧氏空间拓扑初步

§6.1 基本内容

引 言

在微分几何理论中，曲面的概念比曲线的概念要复杂得多．例如，用一个正则参数表示就可以完整地给出最一般的曲线，而对于曲面，即使是球面那么简单也至少要用两个不同的正则参数表示才能完整地描述．一条曲线可以包含或不包含它的端点或边界点，但是曲面则不然，例如带有边界大圆的上半球面不看作是允许的曲面，而不带边界的上半球面才是允许的．为了定义曲面，需要一些拓扑的初步概念．

为方便起见，用字母 E 表示欧氏直线，平面或三维空间．于是所谓"欧氏空间 E"就是 E^2 或 E^3.

1. 开 集

考察图 6-1，平面上圆内每一点都有一个包含在圆内的球形邻域．具有这种性质的集合称为开的，即欧氏空间 E 中的集合 S，若对 S 中每个 P，存在 P 的一个完全包含在 S 中的球形邻域 $S(P)$，则集合 S 称为开的．

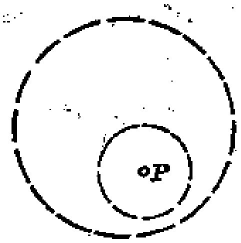


图 6-1

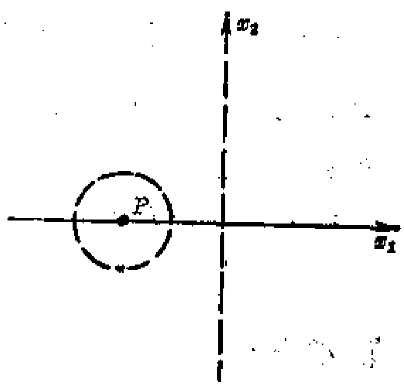


图 6-2

例 6.1 (a) 开区间 $a<x<b$ 是 E^1 中的开集．区间 $a<x\leqslant b$ 不是开集，因为每个 $S(b)$ 含有点 $x'>b$，因而不能被 $a<x\leqslant b$ 所包含．

(b) E^2 中的半平面 $x_1>0$ 是开的．但如图 6-2 所示的由半平面 $x_1>0$ 和 x_1 轴所构成的集合不是开的，因为若 P 是 x_1 轴上在原点左边的一点，每个 $S(P)$ 将含有在原点左边但不在 x_1 轴上的点，而这种点不包含于该集合中．

(c) 一点的球形邻域本身是开的．在 E^1 中，它是一个有限开区间；在 E^2 中，它是一个圆的内部，称为**开盘**；在 E^3 中，它是一个球的内部，称为**开球**．

(d) 欧氏空间 E 本身是开的．空集 $\emptyset$ 也是开的，不然 $\emptyset$ 中应有一点 P 使得 $S(P)$ 含有不在 $\emptyset$ 中的点，但是 $\emptyset$ 中并没有这样的点 P.

注意，开盘是 E^2 中的开集，但把它看作 E^3 中一个平面的子集时，它不是开集，因为 E^3 中一个平面的点的每个邻域包含有不在这平面上的点. 于是开性是集合的一种相对的性质，它与这个集合所在的空间有关.

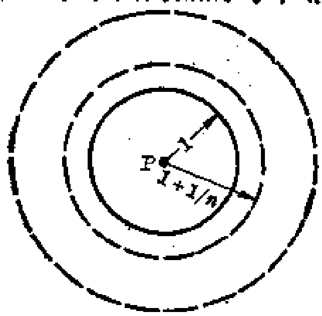


图 6-3

若 $\{O_\alpha\}$ 是任意有限或无限的开集族，则并 $\bigcup_\alpha O_\alpha$ 是开的. 因为若 P 是 $\bigcup_\alpha O_\alpha$ 中的一点，则 P 在某个 O_{α_0} 中，由于 O_{α_0} 是开的，存在一含于 O_{α_0} 中的 $S(P)$. 因而 $S(P)$ 就含于 $\bigcup_\alpha O_\alpha$ 中. 于是对于 $\bigcup_\alpha O_\alpha$ 中任意一点 P，存在一包含在 $\bigcup_\alpha O_\alpha$ 中的 $S(P)$，所以 $\bigcup_\alpha O_\alpha$ 是开的.

若 $\{O_i\}$，$i=1, \cdots, n$，是有限开集族，则交 $\bigcap_i O_i$ 也是开的. 因为若 P 是 $\bigcap_i O_i$ 中的一点，则 P 在每一个 O_i 中，由于 O_i 是开的，在每个 O_i 中有一个 $S_{\epsilon_i}(P)$. 现令 $\epsilon=\min(\epsilon_i)$，则 $S_\epsilon(P)$ 包含在每个 O_i 中. 于是 $S_\epsilon(P)$ 在 $\bigcap_i O_i$ 中，故 $\bigcap_i O_i$ 是开的.

注意，无限个开集的交未必是开的. 例如，如图 6-3 所示，E^2 中半径为 $1+1/n$，$n=1, 2, \cdots$，中心在点 P 的无限个同心开盘的交是半径为 1 中心在 P 的开盘与它的边界(半径为 1 的圆)的并. 这不是一个开集.

由以上所述得:

定理 6.1 E 中的开集有下述性质:

(a) E 是开的，$\emptyset$ 是开的;

(b) 若 O_α 是开的，则 $\bigcup_\alpha O_\alpha$ 是开的;

(c) 若 O_i，$i=1, \cdots, n$，是开的，则 $\bigcap_i O_i$ 是开的.

还有，设 P 和 Q 是 E 中不同的点，显然取 ϵ_1 和 ϵ_2 足够小时，比如说 $\epsilon_1=\epsilon_2=\frac{1}{2}|PQ|$，邻域 $S_{\epsilon_1}(P)$ 和 $S_{\epsilon_2}(Q)$ 是不相交的. 因为这些邻域是开集，我们有

定理 6.2 若 P 和 Q 是 E 中不同的点，则存在分别包含 P 和 Q 的开集 O_P 和 O_Q，使得 $O_P \cap O_Q=\emptyset$.

2. 闭集，极限点

E 中的集合 S 是闭的，若不在 S 中的点的集合是开的，即 S 是闭的，若它的余集 S^c 是开的.

例 6.2 (a) E^1 中的闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 是闭的，因为它的余集是开集 $x>b$ 和 $x<a$ 的并. 区间 $a<x\leqslant b$ 既非开也非闭.

(b) x_1x_2 平面中的有理点集 S，即其中 p 和 q 是有理数的点 (p, q) 的集合，既非开也非闭，因为一个有理数的每个邻域含有无理数，每个 $S(p, q)$ 含有不在 S 中的点，所以 S 不是开的. 又因为一个无理数的每个邻域包含有理数，S 的余也不是开的，所以 S 不是闭的.

(c) E 中仅由一个点构成的集合是闭的. E 中由有限个点构成的集合也是闭的.

(d) E 是闭的，因为 $\emptyset$ 是开的. $\emptyset$ 是闭的，因为 E 是开的.

(e) 下述是闭集的例子:

(i) E^3 中的开盘和它的边界的集合，称为闭盘．

(ii) E^3 中的开球和它的边界的集合，称为闭球．

(iii) E^3 中的球面，因为它的余集是它的开的内部与外部的并．

(iv) E^3 中的环面是 E^3 中如图 6-4 所示的曲面．它由一个圆围绕不通过该圆的直线旋转而得．E^3 中的环面是闭的．

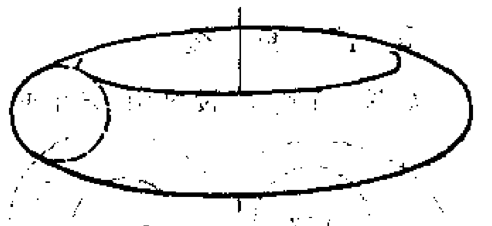


图 6-4

点 P 称为 E 中集合 S 的聚点或极限点，若 P 的每个去心邻域 $S'(P)$ 至少包含 S 的一个点，P 的去心邻域 $S'(P)$ 是由 $S(P)$ 除去 P 点构成的．

例 6.3 (a) 设 S 是 E^2 中一开盘，如图 6-5 所示．显然 S 中每个点都是 S 的极限点，因为这种点的每个去心邻域包含 S 的点．圆上的点虽然不在 S 中，但也是 S 的极限点，因为圆上一点的每个去心邻域与 S 有非空的交．

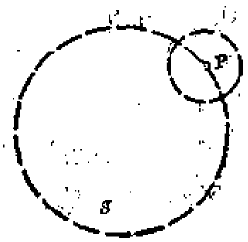


图 6-5



图 6-6

(b) 设 S 是 x 轴上无限点集 1, 1/2, 1/3, …, 1/n, …, 如图 6-6 所示．这里 O 是 S 的一个极限点，因为 O 的每个去心邻域至少包含 S 的一个点．可以证明 O 是这个集合仅有的极限点．

现在假设 E 中集合 S 有这样的性质：S 的每个极限点在 S 中．设 P 是不在 S 中的任意一点，即设 P 是 S^c 中一点，显然，P 不是 S 的极限点，因为 S 包含它的极限点．于是存在某个完全不含 S 的点的 $S(P)$，由此得出 S^c 是开的，这是因为对于 S^c 中任意一点 P，有 $S(P)$ 在 S^c 中．由于 S^c 是开的，故 S 是闭的．于是，若一个集合包含它的极限点，它就是闭的．

我们在问题 6.5 中将证明它的逆命题也真．于是有

定理 6.3 E 中一集合是闭的当且仅当它包含它的极限点．

集合 S 的闭包是由 S 和 S 的极限点构成的集合，记为 $\hat{S}$．可以证明 $\hat{S}$ 是包含 S 的最小闭集，即：(a) $\hat{S}$ 是闭的；(b) 若 T 是闭的且 $S\subseteq T$，则 $\hat{S}\subseteq T$．前者见问题 6.7，后者留给读者作为练习(6.33)．

例 6.4 (a) 我们研究一下例 6.1(b) 中由半平面 $x_1>0$ 和 x_1 轴构成的集合，这个集合既不开也不闭，x_2 轴上的点是这个集合的极限点，它不属于这个集合，若我们把这些极限点包括进去，即若考虑由半平面 $x_1\geqslant 0$ 和 x_1 轴构成的点集，我们得到一个闭集，它是所给集合的闭包．

(b) 因为 x_1x_2 平面中的每个点的每个去心邻域包含有有理点，E^2 中每个点是 E^2 中有理点集的一个极限点，于是 E^2 中有理点集的闭包是 E^2．

最后，E 中一集合是有界的，若它被包含在一点的某个邻域中．于是在 E^1 中，S 是有界的当且仅当它位于一有限开区间中；在 E^2 中，S 是有界的，当且仅当它位于一开盘中；在 S^F

中，S 是有界的，当且仅当它含于一开球中。

例 6.5 (a) E^1 中点集 1, 1/2, 1/3, … 是有界的，它位于区间 $0<x<2$ 中。

(b) x_1x_2 平面中有理点集是无界的。

(c) E 中有限点集显然是有界的。

3. 连 通 集

如图 6-7 所示，设 S 由 E^2 中两不相交闭盘构成。因为两个盘之间距离不为零，存在两个开集 O_1 和 O_2，它们的并包含 S，并且它们各自与 S 的交是非空的，且互不相交。一般地，E 中集合称为不连通的，若存在开集 O_1 和 O_2，使得(a) $S\subseteq O_1\cup O_2$ (O_1 和 O_2 覆盖 S)；(b) $O_1\cap S\neq\emptyset$，$O_2\cap S\neq\emptyset$ (O_1 和 O_2 每个与 S 有非空交) 和 (c) $(O_1\cap S)\cap(O_2\cap S)=O_1\cap O_2\cap S=\emptyset$. ($O_1$ 和 O_2 各自与 S 的交是不相交的)。若非空集 S 不是不连通的，就称为连通的。

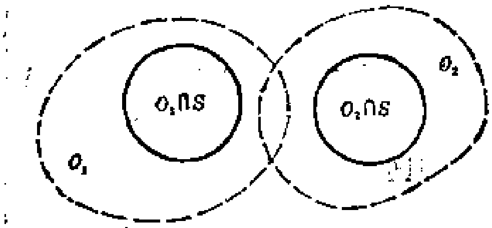


图 6-7

例 6.6 (a) 从上面的(b)和(c)得到一个不连通集至少有两个点。于是，由一个点构成的集合是连通的。另外，E 中由两个或多于两个点构成的有限集是不连通的。

(b) 在问题 6.14 中，我们证明了 E^1 中仅有的连通集是区间(我们把单个点 $a\leqslant x\leqslant a$ 也算在内)。

(c) E^3 中连通集的例子：(i)线段；(ii)开球；(iii)环面；(iv)环面和它的内部，称为实心环或闭环。

E 中开且连通的集合称为区域。

例 6.7 (a) 下面是区域的例子：

(i) E^3 中两同心球之间部分构成的开集。

(ii) E^2 中的半平面 $x_2>a$。

(iii) 环的内部，即开环。

(b) 下述集合不是区域：

(i) E^3 中实心环(连通但不开)。

(ii) E^2 中两不相交的开盘(开但不连通)。

E 中非空集 S 称为弧连通的，若 S 中任意两点可以用一完全包含在 S 中的连续弧连接起来。更精确地说 S 是弧连通的，若任给 S 中两点，比如说 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$，存在一定义在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中的连续函数 $\boldsymbol{X}(t)$ 使得(a)对于所有 t，$\boldsymbol{X}(t)$ 都在 S 中和 (b) $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}(1)=\boldsymbol{X}_2$.

例 6.8 (a) 由单点 $\boldsymbol{X}_1$ 构成的集是弧连通的，取 $\boldsymbol{X}(t)=$ 常向量 $=\boldsymbol{X}_1$ 就行了。

(b) 显然 E 本身是弧连通的，因为线性函数 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}_1+t(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，是连接任意 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 的线段。

(c) 可以证明 E^1 中一集合是弧连通的，当且仅当它是一区间。于是 E^1 中连通集和弧连通集是一回事。

若 E 中一集合 S 是弧连通的，则它是连通的。因为假设 S 弧连通而不连通，则存在开集 O_1 和 O_2，其并包含 S，它们各自与 S 的交不空，且这两个交集彼此并不相交，如图 6-8 所

示.

设 P 属于 $S\cap O_1$, Q 属于 $S\cap O_2$, 并设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 是 S 中从 P 到 Q 的连续弧. 现在考虑区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的实函数,

其定义为

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } \boldsymbol{X}(t) \text{ 在 } S\cap O_1 \text{ 中},\\ -1, & \text{当 } \boldsymbol{X}(t) \text{ 在 } S\cap O_2 \text{ 中}.\end{cases}$$

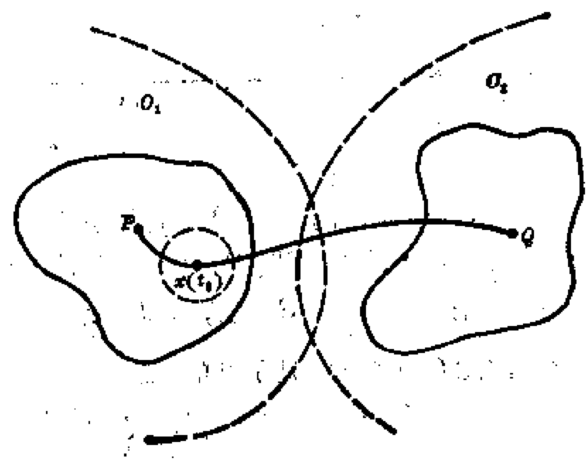


图 6-8

因为 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 S 中, 而 $S\subseteq O_1\cup O_2$, 由此得出 f 对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中所有 t 有定义. 它是单值的, 因为 $S\cap O_1$ 和 $S\cap O_2$ 是不相交的. 现在我们希望证明 $f(t)$ 对所有 t 是连续的. 假定 $t=t_0$, 并假设 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 在 $S\cap O_1$ 中, 如图所示, 则 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 在 O_1 中, 因为 O_1 是开的. 有一 $S_\varepsilon(\boldsymbol{X}(t_0))$ 也在 O_1 中, 因为 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 t_0 连续, 有一 $S_\delta(t_0)$, 使得对于 $S_\delta(t_0)$ 中的 t, $\boldsymbol{X}(t)$ 在 $S_\varepsilon(\boldsymbol{X}(t_0))$ 中, 所以 $\boldsymbol{X}(t)$ 在 $S\cap O_1$ 中, 于是对 $S_\delta(t_0)$ 中的 t 有 $f(t)=1$, 由此得出 $f(t)$ 在 t_0 连续. 若 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 在 $S\cap O_2$ 中, 有类似的论证, 于是 $f(t)$ 对所有的 $0\leqslant t\leqslant 1$ 连续. 但这是不可能的, 因为根据初等微积分的定理, 在 $t=0$ 为 1 而在 $t=1$ 为 -1 的连续函数必取 -1 到 1 之间的所有值, 而 $f(t)$ 并不是这样, 于是我们有

定理 6.4 若 E 中的集合 S 是弧连通的, 则它是连通的.

尽管上述定理的逆命题对 E^1 成立, 但一般地对 E 却不成立, 如问题 6-20 所证明的那样, 在 E^2 中存在不是弧连通的连通集. 但是, 若 S 在 E 中连通且开, 则它在 E 中是弧连通的, 即我们在问题 6.18 中证明

定理 6.5 区域是弧连通的.

4. 紧 致 集

E 中的集合 S 的一个*开覆盖*是一个其并包含 S 的开集族. *子覆盖*是开覆盖的一个有同样性质的子集族. *有限覆盖*是由有限个集合构成的开覆盖. 显然, 对于 E 中每一个集合存在一开覆盖, 就是仅由集合 E 本身构成的族.

E 中的集合 S 是*紧致的*, 若对于 S 的每一个开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 存在一个有限子覆盖 $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \cdots, O_{\alpha_n}\}$.

例 6.9 每个有限点集是紧致的. 因为, 设 $S=\{P_1, \cdots, P_n\}$ 是有限集, 并设 $\{O_\alpha\}$ 是 S 的任一开覆盖, 即 O_α 是开的, 且 $S\subseteq\bigcup\limits_\alpha O_\alpha$. 现在对 S 中每个 P_i, 在覆盖中取出一个包含 P_i 的 O_{α_i}. 显然, $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \cdots, O_{\alpha_n}\}$ 是 S 的一个有限子覆盖, 因为 $\{O_\alpha\}$ 是任意的, 故 S 是紧致的.

例 6.10 设 S 是图 6-9 中所示的 E^1 中的无限集 $\{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$, 这集合不是紧致的. 因为对于 S 存在一个没有有限子覆盖的开覆盖. 即设 $O_1=\left\{\frac{1}{2}<x<2\right\}$ 和设 O_n 表示开区间 $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n-1}$, 对于 $n\geqslant 2$. 显然 O_n 包含 $1/n$, 于是无限族 $\{O_n\}$, $n=1, \cdots$, 是 S 的一个开覆盖, 但是注意, 每个 O_n 仅包含 S 的一点 $1/n$, 于是没有一个有限子覆盖能够包含

整个 S.

现在假设 S 是一紧致集. 对于 S 中每个点 P 任取一邻域 $S(P)$, 所有这些邻域构成 S 的一个开覆盖, 因为 S 是紧致的, 存在一有限子覆盖 $S(P_1)$, $S(P_2)$, $\cdots$, $S(P_n)$, 而这种有限邻域集的并显然是有界集. 因为 S 包含在并中, S 是有界的, 于是紧致集是有界的。

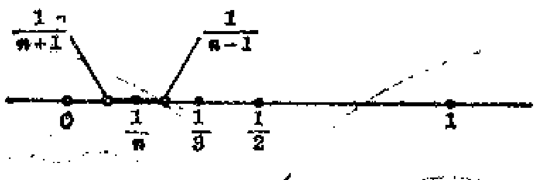


图 6-9

紧致集 S 也是闭的. 设 Q 是它的余集 S^c 中的任意一点, 对于 S 中每个 P 存在 $S(P)$ 和 $S^P(Q)$, 使得 $S(P)\cap S^P(Q)=\emptyset$, 显然族 $\{S(P)\}$ 是 S 的一个开覆盖, 且因为 S 是紧致的, 存在一有限子覆盖 $\{S(P_1), S(P_2), \cdots, S(P_n)\}$, 现设 $O=\bigcap S^{P_i}(Q)$ 是 Q 的对应的邻域的交, 注意 O 包含 Q, 且是开的, 而

$$O\cap(\bigcup_j S(P_j))=\bigcup_j(O\cap S(P_j))=\bigcup_j(\bigcap_i S^{P_i}(Q)\cap S(P_j)),$$

但 $S^{P_j}(Q)\cap S(P_j)=\emptyset$, 所以 $O\cap(\bigcup_j S(P_j))=\emptyset$, 因为 $\bigcup_j S(P_j)$ 覆盖 S, 由此得出 $O\cap S=\emptyset$. 于是 $O\subseteq S^c$. 但 O 是开的且包含 Q, 所以存在 $S(Q)\subseteq S^c$. 于是对 S^c 中任意 Q 存在 Q 的一个在 S^c 中的邻域. 由此得出 S^c 是开的, 所以 S 是闭的.

于是紧致集是闭的和有界的, 其逆命题在 E 中也真. 一般称为 Heine-Borel 定理. 其证明读者可参考高等微积分教科书. 所以我们有

定理 6.6 E 中一集合是紧致的当且仅当它是闭的和有界的.

5. 连续映射

设 E 和 F 是欧氏空间, S 是 E 的一个子集, 设 f 是 S 到 F 中的一个映射, 即对 S 中每点 P 给定 F 中一点 $f(P)$, 映射 f 在 S 中的点 P_0 是连续的, 如图 6-10 所示, 若对于 F 中每个邻域 $S(f(P_0))$, 存在 E 中一邻域 $S(P_0)$, 使得对于 $S(P_0)\cap S$ 中所有的 P, $f(P)$ 都在 $S(f(P_0))$ 中. 或等价地, f 在 P_0 是连续的, 若对每个 $S(f(P_0))$, 存在一 $S(P_0)$, 使得 $f(S(P_0)\cap S)\subseteq S(f(P_0))$. 映射 f 称为在 S 上连续或简称连续, 若它在 S 的每个点连续.

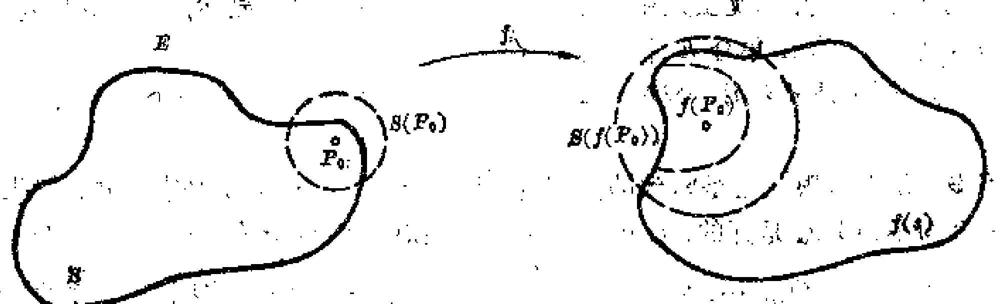


图 6-10

例 6.11 (a) 常值映射 $f(P)=Q_0$, 使 E 中集合 S 的每点 P 对应着 F 中一定点 Q_0, 它在 S 上连续. 因为, 设 P_0 是 S 中任意一点, 并设 $S(f(P_0))=S(Q_0)$ 是 $f(P_0)$ 的任意一个邻域, 对 S 中所有 P, 因而对任意 $S(P_0)$ 中所有 P, 有 $f(P)=Q_0$ 在 $S(Q_0)$ 中, 于是 f 在 P_0 是连续的, 因为 P_0 是 S 中任意一点, 故 f 在 S 上连续.

(b) 如图 6-11 所示, 设 S 是 E^3 中的球, L 是球的切面, 假设对于 S 上每一点 P, $f(P)$

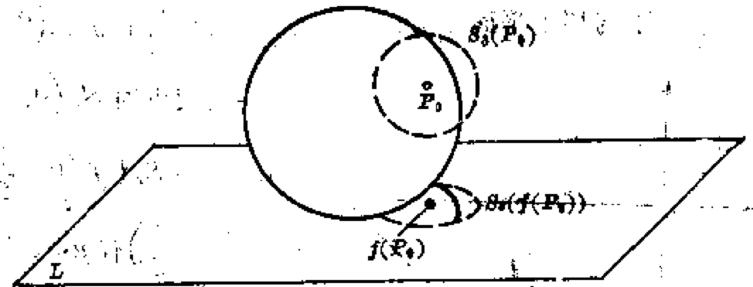


图 6-11

是 P 到 L 上的正射影. 这映射对 S 中所有 P_0 是连续的. 因为当给定 $S_\varepsilon(f(P_0))$时, 可取 $\delta=\varepsilon$, 则对 $S_\delta(P_0)\cap S$ 中的 P, 射影 $f(P)$ 在 $S_\varepsilon(f(P_0))$ 中.

(c) 极坐标方程

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$$

定义一个从 $r\theta$ 平面的半带 $r\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 到 xy 平面的映射 f, 这个映射在每个点 (r_0, θ_0)是连续的. 首先考虑 $r_0\neq 0$, 且设 $S_\varepsilon(f(r_0,\theta_0))=S_\varepsilon(x_0,y_0)$是 $f(r_0,\theta_0)$的任一邻域, 如图 6-12 所示, 取足够小的 $\Delta r>0$ 和 $\Delta\theta>0$, 使得带有极坐标(r,θ), 其中 $0<r_0-\Delta r<r<r_0+\Delta r$ 和 $\theta_0-\Delta\theta<\theta<\theta_0+\Delta\theta$ 的点(x,y)在 $S_\varepsilon(x_0,y_0)$中. 而对由 $r_0-\Delta r<r<r_0+\Delta r,\ \theta_0-\Delta\theta<\theta<\theta_0+\Delta\theta$ 给定的开矩形区域 R 中的每个(r,θ), 有 $f(r,\theta)$在 $S_\varepsilon(x_0,y_0)$中, 现在在 R 中选取任意 $S_\delta(r_0,\theta_0)$, 则对 $S_\delta(r_0,\theta_0)$ 中的(r,θ), 我们有 $f(r,\theta)$ 在 $S_\varepsilon(x_0,y_0)$中, 因为 $S_\varepsilon(x_0,y_0)$是任意的, 故 f 在(r_0,θ_0)连续. 对于 $r_0=0$ 的情形(记 $f(0,\theta_0)=(0,0)$), 取 $\delta=\varepsilon$, 则对 $S_\delta(0,\theta_0)$ 中的 (r,θ), 有 $0\leqslant r<\delta$ 或 $0\leqslant r<\varepsilon$, 所以 $f(r,\theta)=(x,y)$ 是在 $S_\varepsilon(0,0)$ 中, 于是 f 在 $0\leqslant r,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 上连续.

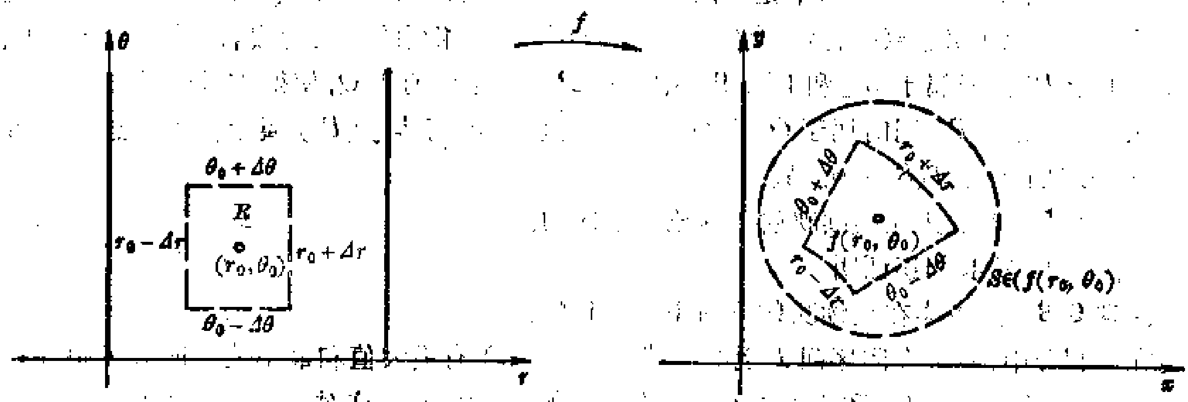


图 6-12

(d) 方程

$$x=u,\ y=v,\ z=\begin{cases}u^2+v^2, & \text{当 } u\geqslant 0,\\ 1, & \text{当 } u<0,\end{cases}$$

定义一个从 uv 平面到 E^3 的映射, 如图 6-13 所示. 象点的集合是由半平面$(u<0)$和半抛物面$(u\geqslant 0)$构成的曲面, 映射对 $u>0,\ u<0$ 以及 $(0,1)$和$(0,-1)$ 两点(这是平面和抛物面的交点)是连续的, 映射对 v 轴的其余点不连续.

例如考虑点$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 这时 $f\left(0,\dfrac{1}{2}\right)=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$是抛物面边界上的点, 取 ε 如此之

小以至 $S_\varepsilon\left(f\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\right)$不与那个平面相交，只要$\varepsilon<\frac{3}{4}$就行了．若 f 在$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 连续，将有$S\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$使得对 $S_\delta\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$中每个 $(u,\ v)$，$f(u,\ v)$ 在 $S_\varepsilon\left(f\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\right)$ 中．但是在每个 $S_\delta\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$有 $u<0$ 的 $(u,\ v)$，对于这些 $(u,\ v)$，$f(u,\ v)$ 在那个平面上，所以不在 $S_\varepsilon\left(f\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\right)$中，于是 f 在$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 不连续．

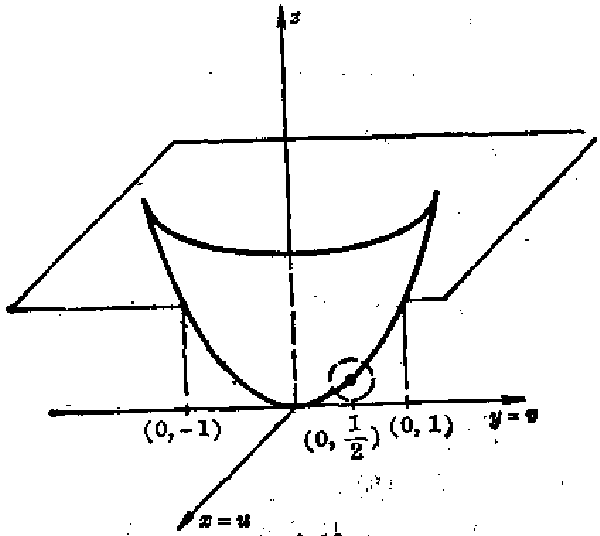


图 6-13

设 E 和 F 是欧氏空间，设 S 是 E 中的连通集，且 f 是 S 到 F 中的连续映射．我们将证明象集 $f(S)$ 在 F 中是连通集．因为若不然，则存在开集 O_1 和 O_2，使得 $f(S)\subseteq O_1\cup O_2, f(S)\cap O_1\neq\emptyset, f(S)\cap O_2=\emptyset$ 和 $f(S)\cap O_1\cap O_2=\emptyset$．

以 A_1 记 $f(S)\cap O_1$，A_2 记 $f(S)\cap O_2$，且设 P 是 S 中使得 $f(P)$ 在 A_1 的点，Q 是 S 中使得 $f(Q)$ 在 A_2 中的点．这种点是存在的，因为 A_1 和 A_2 是非空的．由于 A_1 在 O_1 中，而 O_1 是开的，存在含于 O_1 中的 $S(f(P))$，因为 f 是连续的，在 E 中存在 $S(P)$ 使得 $f(S(P)\cap S)$ 在 $S(f(P))$中，因而在 O_1 中．现在令 $W_1=\bigcup\limits_P S(P)$，其中 P 是 S 中所有使得 $f(P)$ 在 A_1 中的点．类似地，令 $W_2=\bigcup S(Q)$，这里 $f(Q)$ 属于 A_2．于是对所有 Q，$f(S(Q)\cap S)$ 在 O_2 中．显然 W_1 和 W_2 在E中是开的，因为它们是开集（邻域）的并．还有 $S\subseteq W_1\cup W_2$ 和 $S\cap W_1\neq\emptyset$，$S\cap W_2\neq\emptyset$，最后，$S\cap W_1$ 和 $S\cap W_2$ 是不相交的．因为假若 P^* 属于 $S\cap W_1\cap W_2$，由于 P^* 同时属于 W_1 和 W_2，W_1 中有点 P 和 W_2 中有点 Q，使得 P^* 同时属于 $S(P)$ 和 $S(Q)$．于是 $f(P^*)$ 同时属于 O_1 和 O_2，但 P^* 还属于 S，于是 $f(P^*)$ 属于 $f(S)$，这是不可能的，因为 $O_1\cap O_2\cap f(S)=\emptyset$．故有

定理 6.7 连通集在连续映射下的象是连通的．

在问题 6.24 我们还证明

定理 6.8 紧致集在连续映射下的象是紧致的．

在微积分中，定义在闭区间 I 上的连续实函数 $f(t)$ 有最大值和最小值．即在 I 中存在 t_1 和 t_2，使得 $f(t)\leqslant f(t_1)$ 和 $f(t)\geqslant f(t_2)$ 对 I 中所有 t 成立．这对定义在一般的紧致集上的连续实函数也同样成立．因为若 f 是定义在紧致集 C 上的连续实函数，或等价地，f 是 C 到 E^1 中的连续映射，由定理 6.8，E^1 中的象 $f(C)$ 也是紧致的．由于 $f(C)$ 紧致，故它是闭的和有界的．由于它有界，它有上确界 M 和下确界 m．剩下只要证明 M 和 m 属于 $f(C)$ 就行了．这时 C 中就有 P_1 和 P_2 使得 $f(P)\leqslant M=f(P_1)$ 和 $f(P)\geqslant m=f(P_2)$，对于 C 中所有 P 成立，于是 f 在 C 中取它的最大和最小值．而若 $M\notin f(C)$，则 $M\in[f(C)]^c$，因为 $f(C)$ 是闭的，$[f(C)]^c$ 是开的，这时在 $[f(C)]^c$ 中存在一开区间 $M-\varepsilon<M<M+\varepsilon$，特别是在 $M-\varepsilon<M<M+\varepsilon$ 中存在 M_1，使得对于 C 中所有 P，$f(P)\leqslant M_1<M$，但这是不可能的，因为 M 是 $f(C)$ 的最小上界．类似地可证明 $m\in f(C)$，于是得

定理 6.9 紧致集上的连续实函数有最大值和最小值.

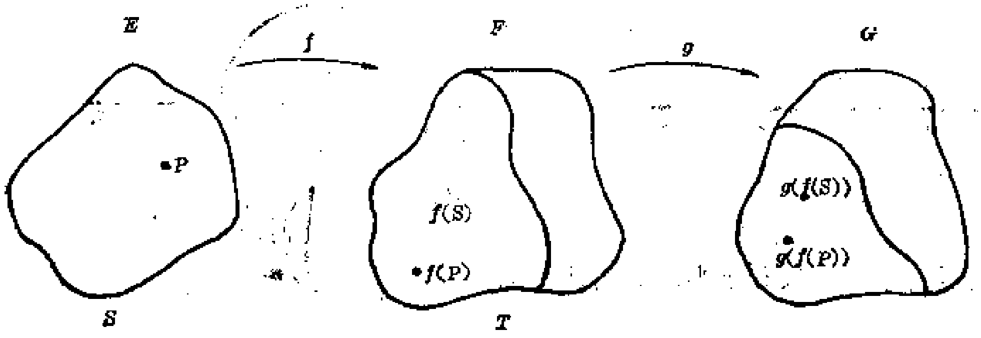


图 6-14

最后，假设 E, F 和 G 是欧氏空间, S 是 E 的一个子集, T 是 F 的一个子集, f 是 S 到 F 中使得 $f(S)\subseteq T$ 的映射, 且 g 是 T 到 G 中的一个映射, 则对 S 中所有 P, 有一 S 到 G 中的复合映射 $g\circ f$, 定义为 $(g\circ f)(P)=g(f(P))$, 如图 6-14 所示.

我们在问题 6.23 中证明若 f 和 g 是连续的, 则 $g\circ f$ 是连续的, 即

定理 6.10 连续映射与连续映射复合为连续映射.

6. 同 胚

设 f 是 E 中的集合 S 到 F 中的连续映射, 若 f 是一一的, 存在从 f 的象 $f(S)$ 返回到 S 上的逆映射 f^{-1}, 若 f^{-1} 在 $f(S)$ 上连续, 则 f 称为 S 到 F 中的一一双连续映射.

(E 中的)集合 S 到(F 中的)集合 T 上的一一双连续映射称为 S 到 T 上的拓扑映射或同胚. 显然(E 中的)S 到 F 中的一一双连续映射决定一个 S 到象 $f(S)$ 上的同胚. 还有若 f 是 S 到 T 上的同胚, 则 f^{-1} 是 T 到 S 上的同胚. 最后 E 中集合 S 称为拓扑等价或同胚于 F 中集合 T, 若存在一个 S 到 T 上的同胚.

在直观上可以认为同胚是使邻近点变为邻近点的映射. 于是两个图形是拓扑等价的, 若存在一弹性运动使其中一个与另一个重合.

例 6.12 (a) 方程

$$x_1=\cos t,\ x_2=\sin t,\ 0\leqslant t<2\pi$$

定义了区间 $0\leqslant t<2\pi$ 到 x_1x_2 平面中半径为 1, 中心在原点的圆上的一个连续和一一的映射 f. 但是这映射不是双连续的, 因为逆映射把圆映回区间上, 在 $(1, 0)$ 不连续, 如图 6-15 所示. $(1, 0)$ 的每个邻域包含被 f^{-1} 映射到 2π 附近的点(x_1 轴下面的那些点). 于是若我们考虑, 比如说 $f^{-1}(1, 0)=0$ 的 $\frac{1}{2}$ 邻域, 找不到一个 $(1, 0)$ 的邻域, 它的象能完全包含在

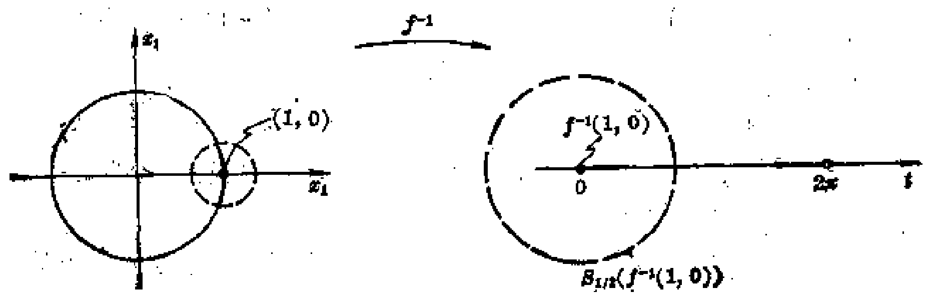


图 6-15

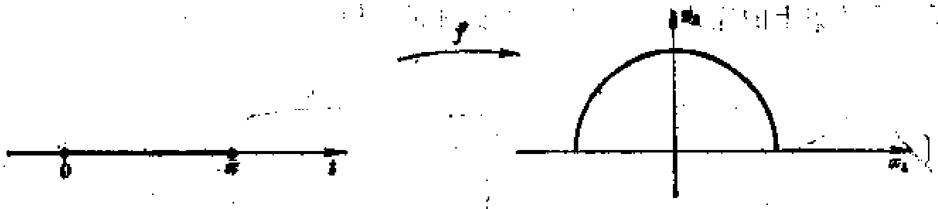


图 6-16

$S_{1/2}(f^{-1}(1,0))$中. 注意若映射 f 是限制在区间 $0\leqslant t\leqslant\pi$, 如图 6-16 所示, 则 f 是一个到半圆上的同胚, 于是线段和上半圆是拓扑等价的.

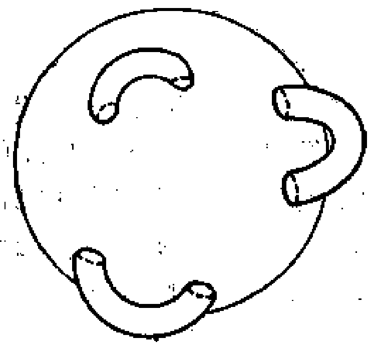


图 6-17

(b) E^3 中一类重要的双侧曲面称为有 n 个环柄的球面; 这些曲面用下述方法得到, 在球面中割 $2n$ 个洞, 并弯 n 个不同的管子使它们的末端与这些洞吻合. 带三个环柄的球面如图 6-17 所示. 注意, 这些曲面是 E^3 中闭的和有界(紧致)的点集, 可以证明每一个紧致双侧曲面(往后再给出曲面的定义)拓扑等价于带有若干个环柄的球面, 例如环面拓扑等价于带一个环柄的球面.

§6.2 问题及其解答

1. 开集, 闭集

6.1 确定下列集合是否(i)开集, (ii)闭集, (iii)有界集, 求(iv)它的极限点集和(v)它的闭包.

(a) E^1 中的整数 $\{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$;

(b) xy平面中所有使得 $xy\neq0$ 的 (x, y).

(c) E^1 中的集合

$$\left\{1+\frac{1}{2},\ -\left(1+\frac{1}{3}\right),\ \left(1+\frac{1}{4}\right),\ -\left(1+\frac{1}{5}\right),\ \cdots,\ (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \cdots\right\}.$$

(d) E^3 中的环面.

解: (a) 这集合是闭集, 因为它的余集是开集 $n-1<x<n$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 的并。这集合显然是无界的. 它没有极限点, 因为任给一实数 x_0, 可以找到 x_0 的一个去心邻域, 它不包含任一整数. 它的闭包是它自己.

(b) 这集合是除去 x 轴和 y 轴的 xy 平面. 它是开的, 因为这集合中任意一点 (x_0, y_0) 有一到 x 和 y 轴的最小非零距离 $d=\min\{|x_0|, |y_0|\}$, 因此它可以被包含在一个完全在这

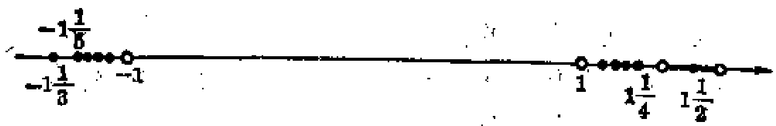


图 6-18

集合中的邻域内. 它是无界的. 集合中每一点都是集合的极限点, 而且 x 轴和 y 轴上的点也是极限点. 故极限点集是整个 xy 平面, 而且它的闭包也是整个 xy 平面.

(c) 这集合既不开也不闭. 如图 6-18 所示, 这个集合有一个点 $\left(1+\frac{1}{2}\right)$, 使得它的每个邻域含有不在这集合中的点, 所以这集合不开. 另一方面, 这集合的余集中的数 1 的每个邻域包含这集合的数(即不在余集中的点), 于是这余集不开, 故这集合不闭. 这集合是有界的, 因为它包含在区间 $-2<x<2$ 中, 它的极限点是数 1 和 -1, 这些数和这集合一起构成它的闭包.

(d) 环面是闭的, 因为它的余集中的每个点与环面有非零的距离, 所以它被包含在一个完全在余集内的邻域中, 于是余集是开的. 故曲面是闭的. 环面是有界的, 环面上每一个点是一个极限点, 因为环面上一点的每个去心邻域与环面有非空交. 因为闭集包含它的极限点, 没有别的极限点. 环面的闭包就是环面.

6.2 叙述"S 是 E 中的一个开集"的否命题的含义.

答: S 不是 E 中一开集, 若 S 中有一点 P 使得 P 的每个邻域包含有不在 S 中的点.

6.3 叙述"P 是 S 的一个极限点"的否命题的含义.

答: P 不是 S 的一个极限点, 若 P 有一个不含 S 的点的去心邻域, 或等价地, P 不是 S 的极限点, 若 P 有一个包含在 S 的余集中的去心邻域.

6.4 证明 E 中有限个闭集的并是闭的.

证: 集合的 De Morgan 定律指出并集的余集是余集的交, 即

$$\left(\bigcup_i S_i\right)^C=\bigcap_i (S_i^C).$$

于是, 若 $S_i(i=1, \cdots, n)$ 是有限个闭集, 则每个 S_i^C 是开的. 因为有限个开集的交是开的, 从 De Morgan 定律得到 $\bigcap_i S_i^C=\left(\bigcup_i S_i\right)^C$ 是开的. 所以 $\bigcup_i S_i$ 是闭的. 注意, 无限多个闭集的并未必是闭的, 如 E^1 中的闭区间 $-1+1/n\leqslant x\leqslant 1-1/n(n=1, 2, \cdots)$ 的并是开区间 $-1<x<1$.

6.5 证明闭集包含它的极限点.

证: 假设不然, 即假设 S 是闭的, P 是 S 的一个极限点, 但 P 不属于 S. 因为 S 是闭的, S^C 是开的, 因为 P 属于 S^C 和 S^C 是开的, 存在 P 的一包含在 S^C 中的邻域 $S(P)$, 即有一 $S(P)$, 它不包含 S 中的点, 但这是不可能的, 因为 P 是 S 的一个极限点, 它的每个去心邻域必须含有 S 的点. 命题得证.

6.6 若 P 是 S 的一个极限点, 证明 P 的每个邻域包含无限个 S 的点.

证: 假设与之相反. 即假设 P 是 S 的一个极限点且存在 P 的一个邻域其仅含 S 中有限个异于 P 的点, 比如说 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$, 注意至少有一个这样的点 Q, 因为 P 是 S 的一个极限点. 现在令 ε 是 P 和最近的 Q_i 的距离, 即令 $\varepsilon=\min\{d(P, Q_1), d(P, Q_2), \cdots, d(P, Q_n)\}$, 则 $S_\varepsilon(P)$ 不含 S 中异于 P 的点, 但这是不可能的, 因为 P 是 S 的一个极限点. 于是命题得证.

6.7 证明一个集合的闭包是闭集.

证: 据定理 6.3, 只要证明集 S 的闭包 $\hat{S}$ 包含它自己的全部极限点就行了. 为此假设 P 是 $\hat{S}$ 的一个极限点, 则 P 的每个邻域 $S(P)$ 至少包含 $\hat{S}$ 中一个点 Q, $Q\neq P$, 或者 Q 本身属于 S, 或者 Q 是 S 的一个极限点, 于是 Q 的每一个邻域包含 S 中一点 Q^*. 因为我们可以选取 $S(Q)$ 使得 $S(Q)$ 在 $S(P)$ 中且 $P\notin S(Q)$. 故可以保证 $Q^*\in S(P)$ 和 $Q^*\neq P$, 于是无论在那种情形中, $S(P)$ 都含有 S 的异于 P 的一点, 故 P 是 S 的一个极限点.

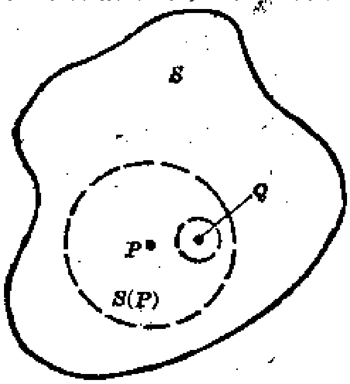


图 6-19

6.8 S 中一点 P 称为 S 的一个内点, 若存在 P 的一个完全包含在 S 中的球形邻域. S 的内点集合称为 S 的内部, 注意开集的每个点是这集合的一个内点; 于是开集等于它的内部. 证明一般地一个集合的内部是一个开集.

证: 假设 T 表示 S 的内部, 且设 P 是 T 中任意一点. 因为 P 是 S 一内点, 存在一包含在 S 中的邻域 $S(P)$, 如图 6-19 所示. 设 Q 是 $S(P)$ 中一点, 因为 $S(P)$ 是开的, 存在包含在 $S(P)$ 中因而在 S 中的 $S^*(Q)$. 由此得出 Q 也在 T 即 S 的内部中. 因为 Q 是 $S(P)$ 中任意一点, 故整个 $S(P)$ 在 T 中, 因为 P 是 T 中任意一点, 由此得出 T 是开的.

2. 连通集, 紧致集

6.9 确定下列集合是否(a)连通集; (b)紧致集.

(i) 如图 6-20 所示, 平面上两相交直线间开的无限楔形区域.

(ii) E^3 中使得 $x_1\neq 0$ 的点 (x_1, x_2, x_3) 的集合.

(iii) 实心环.

解: (i) 这楔形中任意两点可用一线段连接, 所以集合是弧连通的, 因而据定理 6.4 是连通的. 楔形不闭, 据定理 6.6, 因而不是紧致的.

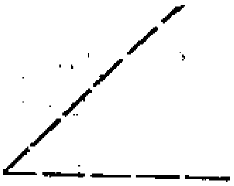
(ii) 这集合由两个半空间 $x_1<0$ 和 $x_1>0$ 组成. 它们是非空不交的开集, 所以这集合不连通. 这集合不闭, 故不是紧致的.

(iii) 实心环是弧连通的, 因而是连通的. 它是闭的和有界的, 因而是紧致的.

6.10 证明 E^2 中满足

$$x_2=\begin{cases}\sin 1/x_1, & 当\ 0<x_1\leqslant 1,\\ 0\quad, & 当\ x_1=0\end{cases}$$

的点 (x_1, x_2) 的集合是连通的.


图 6-20

证: 假设集 S 是不连通的, 则存在开集 O_1 和 O_2, 其并包含 S 且与 S 有非空不相交的交. 现假设原点 $(0, 0)$ 属于 $S\cap O_1$ 和有一点 $(b, \sin 1/b)$, $0<b\leqslant 1$, 在 $S\cap O_2$ 中, 如图 6-21 所示. 因为 O_1 是开的, 存在 $S(0, 0)$, 其包含在 O_1 中. 但原点的一个邻域包含 S 中一点 $(a, \sin 1/a)$, 这里 $0<a<b$, 现考虑 S 的点 (x_1, x_2), $a\leqslant x_1\leqslant b$, 构成的子集 S^*. 因 $S\subseteq O_1\cup O_2$, 显然 $S^*\subseteq O_1\cup O_2$, 还有 $S^*\cap O_1\neq\emptyset$ 和 $S^*\cap O_2\neq\emptyset$, 这由于 $(a, \sin 1/a)$ 在 O_1 中, 而 $(b, \sin 1/b)$ 在 O_2 中. 最后 $S^*\cap O_1$ 和 $S^*\cap O_2$ 是不相交的, 因为 $S\cap O_1$ 和 $S\cap O_2$ 是不相交的, 于是 S^* 也是不连通的, 但这引出矛盾, 因为 S^* 是连续曲线 $x_2=\sin 1/x_1$, $0<a\leqslant x_1\leqslant b$, 它是弧连通的, 所以是连通的, 于是 S 是连通的. 注意, 如问题 6-20 所证, S 不

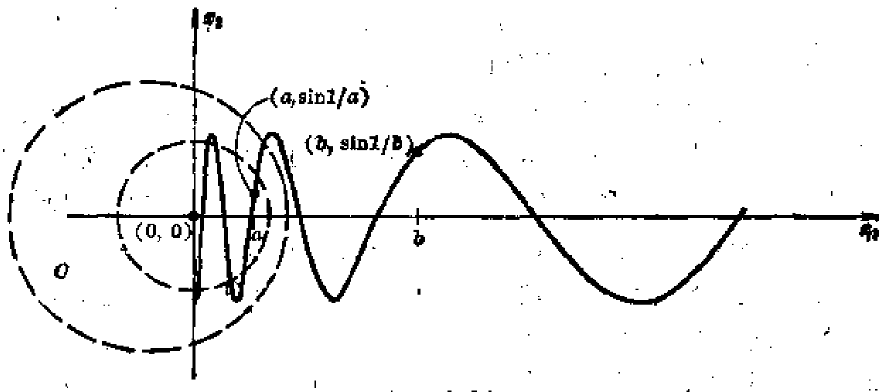


图 6-21

是弧连通的.

6.11 不用定理 6.6 而直接从定义证明 E^2 中的开盘不是紧致的.

证：我们给开盘构造一个不含有限子覆盖的开覆盖. 假设给定的盘半径为 r. 考虑半径为 $r-\dfrac{1}{n}$, $n=2, 3, \cdots$ 的无限同心开盘族 $\{O_n\}$. 显然 $\{O_n\}$ 覆盖 S. 事实上, $S=\bigcup\limits_n O_n$, 但 $\{O_n\}$ 的任意有限子集的并有一个比 r 小的最大半径 $r-1/N$, 所以不能覆盖整个 S.

6.12 证明连通集 S 的闭包 $\hat{S}$ 是连通的.

证：假设 $\hat{S}$ 是不连通的, 则有开集 O_1 和 O_2, 其并包含 $\hat{S}$ 且与 $\hat{S}$ 有非空不相交的交. 设 P 是 $\hat{S}\cap O_1$ 中一点, P 可能在也可能不在 S 中. 若不在, 则它是 S 的一个极限点, 这时因为 O_1 是开的, 在 O_1 中存在一 $S(P)$, 它包含 S 中一点 P^*. 进行同样的论证可以在 $\hat{S}\cap O_2$ 中找出 S 中的一点 Q^*. 这意味着 S 本身是不连通的, 因为 S 是 $\hat{S}$ 的一个子集, 显然 O_1 和 O_2 的并包含 S, 因为 P^* 在 $S\cap O_1$ 中, 而 Q^* 在 $S\cap O_2$ 中, 故 $S\cap O_1\neq\emptyset$ 和 $S\cap O_2\neq\emptyset$. 最后, 因为 $\hat{S}\cap O_1$ 和 $\hat{S}\cap O_2$ 是不相交的, 故 $S\cap O_1$ 和 $S\cap O_2$ 是不相交的. 但这是不可能的, 因为 S 是连通的. 所以 $\hat{S}$ 是连通的, 问题得证.

6.13 证明定理 6.5: 区域 (连通开集) 是弧连通的.

证：假设 D 是一区域但不是弧连通的, 并假设 P_0 和 Q_0 是 D 中不能连接的两点. 令 A 表示 D 中可与 P_0 连接的点的集合和 B 表示 D 中不能与 P_0 连接的点的集合, 显然 A 和 B 构成 D 的一个划分, 即 $D=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$, $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$. 若可以证明 A 和 B 都是开的, 这意味着 D 是不连通的, 就引出了矛盾. 为证明 A 是开的, 设 P^* 是 A 中任意一点和 $S(P^*)$ 是 P^* 的含于 D 中的一个邻域, 如图 6-22 所示. 这样的邻域存在, 因为 D 是开的. 但如图所示 $S(P^*)$ 中每个点 P 可以与 P_0 连接, 所以 $S(P^*)$ 中每个点可以与 P_0 连接, 于是 $S(P^*)$ 含于 A 中, 所以 A 是开的.



图 6-22

类似地设 Q^* 在 B 中和 $S(Q^*)$ 在 D 中. 因为 $S(Q^*)$ 每个点 Q 可以与 Q^* 连接, $S(Q^*)$

每个点不能与 P_0 连接，要不然 Q^* 就可与 P_0 连接了. 于是 B 也是开的. 问题得证.

6.14 证明 E^1 中仅有的连通集是区间.

证：区间无疑是弧连通的，所以是连通的. 反之，设 S 是 E^1 中一连通集，我们假定 S 是上有界的，且 b 是 S 的上确界，还假定 S 是下有界的，且 a 是 S 的下确界. 我们希望证明使得 $a<c<b$ 的任意 c 在 S 中，若不然，考虑开集 $O_1=\{x|x<c\}$ 和 $O_2=\{x|x>c\}$. 显然 $S\subseteq O_1\cup O_2$，且有 $S\cap O_2\neq\emptyset$，否则 c 就是 S 的一个小于 b 的上界了，这是不可能的. 类似地有 $S\cap O_1\neq 0$. 最后，$O_1\cap S$ 和 $O_2\cap S$ 是不相交的，这是因为 O_1 和 O_2 是不相交的. 但这是不可能的，因为 S 是连通的. 于是每个使得 $a<c<b$ 的 c 在 S 中，因为 S 中没有大于 b 的数也没有小于 a 的数，由此得出 S 是一个有限区间. S 不是上有界或不是下有界的情况留给读者作练习.

6.15 证明 S 是 E^2 中的连通集当且仅当 S 看作为 E^3 中一平面上的集合时是连通的.

证：假设 S 在 E^2 中连通而在 E^3 中不连通，则有 E^3 中的开集 O_1 和 O_2 使得 $S\subset O_1\cup O_2$, $O_1\cap S\neq\emptyset$, $O_2\cap S\neq\emptyset$, $(O_1\cap S)\cap(O_2\cap S)=\emptyset$. 现令 A 是 O_1 和 S 所在平面的交，B 是 O_2 和该平面的交. 注意，$S\subseteq A\cup B$, $A\cap S\neq\emptyset$, $B\cap S\neq\emptyset$ 和 $(A\cap S)\cap(B\cap S)=\emptyset$.

若可以证明 A 和 B 是该平面的开集，S 就在 E^2 中不连通了，这就引出矛盾. 为证明 A 是开的，设 P 是 A 中一点，则 P 在 O_1 中，设 $S^*(P)$ 是 P 在 $O_1(\subseteq E^3)$ 中的一个邻域. 则 $S^*(P)$ 与 A 所在平面的交是 A 中一邻域 $S(P)$，于是 A 是这平面中的开集. 类似地 B 是开的，这就证明了若 S 作为 E^2 的集合连通时，则它作为 E^3 的集合是连通的.

反之，假设 S 作为 E^3 的集合是连通的，而它在该平面上是不连通的，则存在该平面上的开集 A 和 B，使得 $S\subseteq A\cup B$, $S\cap A\neq\emptyset$, $S\cap B\neq\emptyset$ 和 $(S\cap A)\cap(S\cap B)=\emptyset$，因为 A 在平面上是开的，对于 A 中每一点 P，在平面上有一包含在 A 中的 $S(P)$，设 $S^*(P)$ 是 P 在 E^3 中的一个邻域，它与平面的交是 $S(P)$，并设 $O_1=\bigcup_P S^*(P)$. 类似地，对于 B 中点 Q，设 $O_2=\bigcup_Q S^*(Q)$. 由此得出 O_1 和 O_2 是 E^3 中的开集，它使得 $S\subseteq O_1\cup O_2$, $O_1\cap S=A\cap S\neq\emptyset$, $O_2\cap S=B\cap S\neq\emptyset$，和 $(O_1\cap S)\cap(O_2\cap S)=\emptyset$，但这是不可能的，因为 S 在 E^3 中是连通的. 命题得证.

3. 连续映射，同胚

6.16 设 f 是 E 中点集 S 到 x 轴的映射，若 f 在 S 中点 P_0 连续，且若 $f(P_0)>0$，证明存在一 $S_\delta(P_0)$ 使得对于 $S_\delta(P_0)\cap S$ 中的 P 有 $f(P)>0$.

证：如图 6-23 所示，令 $\varepsilon=\frac{1}{2}f(P_0)$，考虑 $S_\varepsilon(f(P_0))$，即区间 $\frac{1}{2}f(P_0)<x<\frac{3}{2}f(P_0)$. 注意 $\frac{1}{2}f(P_0)>0$，因为 f 在 P_0 连续，有一 $S_\delta(P_0)$ 使得 $f(P)$ 在 $S_\varepsilon(f(P_0))$ 中. 所以对 $S_\delta(P_0)\cap S$ 中所有 P 有 $f(P)>0$. 问题得证.

6.17 设 f 是(E 中)S 到 F 中的一一连续映射，并设 S 中的 P_0 是 S 的一个极限点. 证明 $f(P_0)$ 是象集 $f(S)$ 的一个极限点.

证：设 $S(f(P_0))$ 是如图 6-24 所示的 $f(P_0)$ 的任意邻域. 因为 f 在 S 上连续，存在 $S(P_0)$ 使得对于 $S(P_0)\cap S$ 中的 P, $f(P)$ 在 $S(f(P_0))$ 中. 因为 P_0 是 S 的一个极限点，在 $S(P_0)$ 中有 S 中一点 $Q\neq P_0$，所以 $f(Q)$ 是在 $S(f(P_0))$ 中. 而且 $f(Q)\neq f(P_0)$，因为 f 是

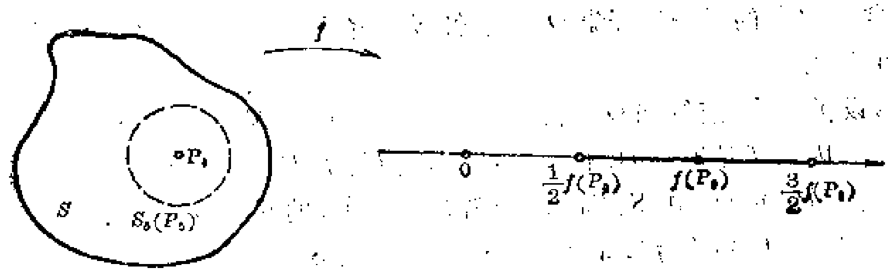


图 6-23

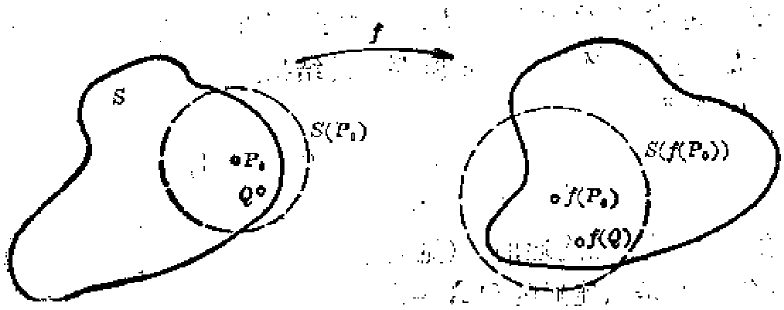


图 6-24

一一的．于是对于任意 $S(f(P_0))$，存在 $f(Q)\neq f(P_0)$ 使得 $f(Q)$ 在 $S(f(P_0))$ 中．由此得出 $f(P_0)$ 是 $f(S)$ 的一个极限点．

6.18 证明由方程

$$x=u+v,\ y=u-v$$

给定的 uv 平面到 xy 平面中的映射是一一的和连续的．

证：显然这是到 xy 平面上的一一映射，利用 x 和 y 的式子解出 u 和 v 可得逆映射 $u=\frac{1}{2}(x+y)$，$v=\frac{1}{2}(x-y)$．观察图 6-25，这映射把坐标线 $u=c=$常数变为平行直线族 $x+y=2c$ 和把坐标线 $v=k=$常数变为与前一族正交的直线族 $x-y=2k$，于是给定$(x_0,\ y_0)$在 xy 平面中的邻域 $S_\varepsilon(x_0,\ y_0)$，取 Δu 和 Δv 足够小使得边为 $x+y=2(u_0+\Delta u)$，$x+y=2(u_0-\Delta u)$，$x-y=2(v_0+\Delta v)$，$x-y=2(v_0-\Delta v)$ 的矩形包含在 $S_\varepsilon(x_0,\ y_0)$ 中．现在取 δ 使得 $S_\delta(u_0,\ v_0)$包含在矩形 $u_0-\Delta u<u<u_0+\Delta u$，$v_0-\Delta v<v<v_0+\Delta v$ 中，这时对于 $S_\delta(u_0,\ v_0)$中的$(u,\ v)$有$(x,\ y)$在 $S_\varepsilon(x_0,\ y_0)$中．因为$(u_0,\ v_0)$是任意的，由此得出映射在 uv 平面上连续．

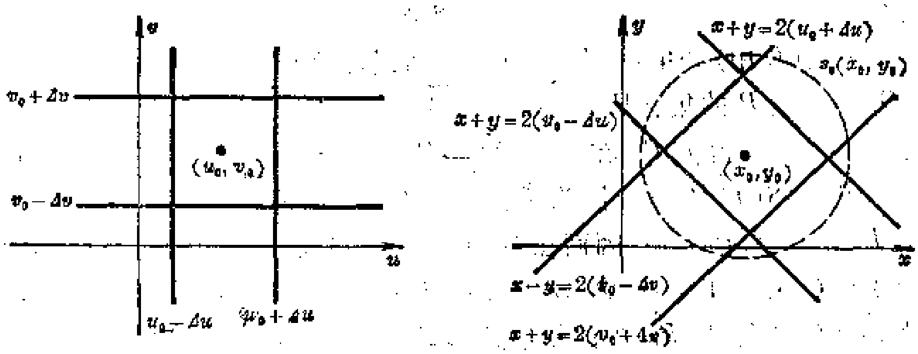


图 6-25

6.19 设 f 是(E 中)集合 S 到 F 中的映射．证明 f 在 S 中的点 P_0 连续当且仅当对

于 F 中包含 $f(P_0)$ 的每一个开集 O^*，存在 E 中包含 P_0 的开集 O 使得对于 $O\cap S$ 中所有 P，$f(P)$ 在 O^* 中.

证：假设 f 在 P_0 连续和 O^* 是包含 $f(P_0)$ 的开集. 因为 O^* 是开的，存在包含在 O^* 中的 $S(f(P_0))$，因为 f 是连续的，有一个 $S(P_0)$ 使得 $f(P)$ 在 $S(f(P_0))$ 中，所以对于 $S(P_0)\cap S$ 中的 P，$f(P)$ 在 O^* 中，$S(P_0)$ 本身就是包含 P_0 的开集，这部分证明已经完成. 为证明其逆，假设 $S(f(P_0))$ 是 $f(P_0)$ 的任一邻域，因为 $S(f(P_0))$ 是一个开集，按假设条件 E 中有一包含 P_0 的开集 O，使得对于 $O\cap S$ 中的 P，$f(P)$ 只在 $S(f(P_0))$ 中. 因为 O 是开的并包含 P_0，存在一包含在 O 中的 $S(P_0)$. 由此得出对于 $S(P_0)\cap S$ 中的 P，$f(P)$ 在 $S(f(P_0))$ 中，于是 f 在 P_0 连续. 这是所要求的结果.

6.20 证明 E^2 使得

$$x_2=\begin{cases}\sin 1/x_1, & 当\ 0<x_1\leqslant 1,\\ 0\ , & 当\ x_1=0\end{cases}$$

的点 $(x_1,\ x_2)$ 的集合 S 不是弧连通的. (见问题 6.10)

证：假设这集合 S 是弧连通的和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，是连接 $(0,\ 0)$ 和 $(1,\ \sin 1)$ 的连续弧. 我们希望首先证明 $\boldsymbol{X}(t)$ 通过 S 上每一点，或等价地，若用 R 表示映射 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ 到 S 上的象，则 $R=S$. 因为若不然，S 上有一点 $(b,\ \sin 1/b)$，$0<b<1$，不在 R 上. 如图 6-26 所示，得出 x_1x_2 平面上有开集 $x_1<b$ 和 $x_1>b$，其覆盖 R 且与 R 有非空不相交的交，这意味着 R 是不连通的. 这与定理 6.7 矛盾，因为 $[0,\ 1]$ 是连通的. 于是 $R=S$. 现在就可得出 S 是紧致的，因为它是紧致集 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的连续象(定理 6.8). 这样 S 就必须是闭的. 但事实并非这样，因为它并不包含它的所有极限点. 例如，$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 的每个去心邻域包含 S 的点. 所以 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 是 S 的极限点，但 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 不属于 S. 故 S 不是弧连通的. 命题证毕.

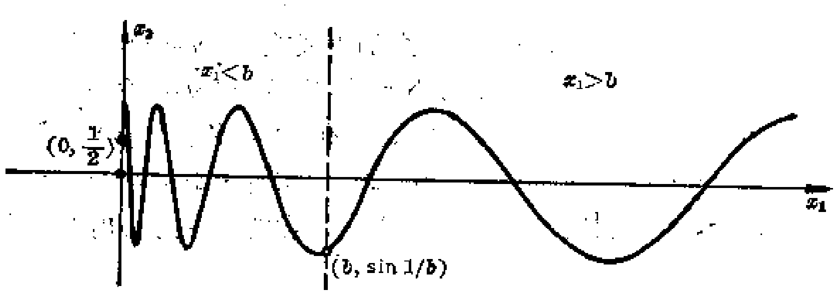


图 6-26

6.21 设 f 是 (E 中) 开集 O 到 F 中的连续映射，设 O^* 是 F 中任意开集，证明 O 中使得 $f(P)$ 在 O^* 中的点 P 的集合是 E 中的开集.

证：设 S 是 O 中使得 $f(P)$ 在 O^* 中的点 P 的集合. 设 P_0 在 S 中，因为 O^* 是开的，有一包含在 O^* 中的 $S(f(P_0))$. 因为 f 在 O 上连续，存在一 $S_\delta(P_0)$，使得对 $S_\delta(P_0)\cap O$ 中的 P 有 $f(P)$ 在 $S(f(P_0))$ 中，因而在 O^* 中. 现在若 $S_\delta(P_0)$ 包含在 O 中，则对 $S_\delta(P_0)$ 中所有 P，$f(P)$ 在 O^* 中，于是 $S_\delta(P_0)$ 在 S 中. 但是若 $S_\delta(P_0)$ 不包含在 O 中，因为 O 是开的，O 中存在某个包含在 $S_\delta(P_0)$ 中的较小的邻域 $S_\gamma(P_0)$，如图 6-27 所示，对于 $S_\gamma(P_0)$ 中所有 P，有 $f(P)$ 在 O^* 中，所以 $S_\gamma(P_0)$ 在 S 中，无论那种情形，对于 S 中任意的 P_0 都存在 $S(P_0)$ 在 S 中，所以 S 是开的，问题得证.

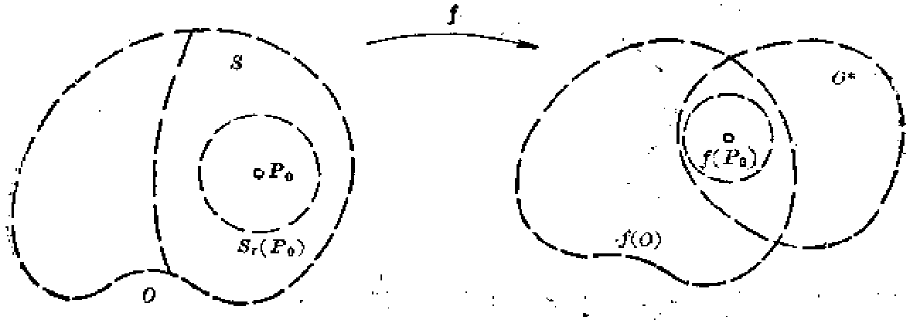


图 6-27

6.22 设 f 是(E)中集合 S 到 F 中的映射，其使得若 C 是 F 中任意闭集，对于 S 中使 $f(P)$ 在 C 中的 P 的集合是 E 中的闭集. 证明 f 在 S 上连续.

证: 注意因为 $f(S)$ 是在闭集 F 中，由此得出 S 本身必须是闭集. 现在设 P_0 在 S 中并假设 f 在 P_0 不连续，则存在一 $S(f(P_0))$ 使得每个 $S(P_0)$ 包含一个使得 $f(P)$ 不在 $S(f(P_0))$ 中的点 P，或因为 $f(P_0)$ 在 $S(f(P_0))$ 中，使得每个去心邻域 $S'(P_0)$ 包含一个使得 $f(P)$ 在 $[S(f(P_0))]^C$ 中的点 P. 现在设 S^* 是 S 中使得 $f(P)$ 在 $[S(f(P_0))]^C$ 中的点 P 的集合，我们注意 $[S(f(P_0))]^C$ 是闭的. 于是按假设条件 S^* 是闭的，而由上可知 P_0 是 S^* 的一个极限点，所以 P_0 在 S^* 中. 但这是不可能的，因为 $f(P_0)$ 在 $S(f(P_0))$ 中，证毕.

6.23 证明定理 6.10: 若 f 是(E 中) 集合 S 到 F 中的连续映射和 g 是 (F 中) 象集 $f(S)$ 到 G 中的连续映射，证明映射 $(g\circ f)(P)=g(f(P))$ 是 S 到 G 中的连续映射.

证: 设 $S((g\circ f)(P_0))=S(g(f(P_0)))$ 是 $(g\circ f)(P_0)$ 的任一邻域. 因为 g 在 $f(S)$ 上连续，存在 $S(f(P_0))$ 使得对于 $S(f(P_0))\cap f(S)$ 中的 Q，$g(Q)$ 在 $S(g(f(P_0)))$ 中. 因为 f 在 S 上连续，存在 $S(P_0)$ 使得对于 $S(P_0)\cap S$ 中的 P，$f(P)$ 在 $S(f(P_0))$ 中，所以对于 $S(P_0)\cap S$ 中的 P，有 $f(P)$ 在 $S(f(P_0))\cap f(S)$ 中，故 $g(f(P))$ 在 $S(g(f(P_0)))$ 中. 于是 $g\circ f$ 是在 P_0 连续的，问题得证.

6.24 证明定理 6.8: 若 f 是(E 中)紧致集 S 到 F 中的连续映射，则 f 的象集是紧致的.

证: 设 $\{O_\alpha^*\}$ 是 $f(S)$ 的任意开覆盖. 对于 S 中每个点 Q，令 O_Q^* 表示族 $\{O_\alpha^*\}$ 中包含 $f(Q)$ 的开集. 因为 f 在 S 上连续，从问题 6.19 得出存在一 E 中的开集 O_Q，使得对于 $O_Q\cap S$ 中的 P，有 $f(P)$ 在 O_Q^* 中，或等价地，$f(O_Q\cap S)$ 包含在 O_Q^* 中. 因为族 $\{O_Q\}$ 包含 S 中每个 Q，所以它是 S 的一个开覆盖. 因为 S 是紧致的，存在一有限子覆盖 $\{O_{Q_1}, O_{Q_2}, \cdots, O_{Q_n}\}$ 因为对于 $i=1, \cdots, n$，$f(O_{Q_i}\cap S)$ 包含在 $O_{Q_i}^*$ 中和 $\{O_{Q_i}\}$ 是 S 的一个覆盖，由此得出 $\{O_{Q_1}^*, O_{Q_2}^*, \cdots, O_{Q_n}^*\}$ 是 $f(S)$ 的一个有限子覆盖. 故 $f(S)$ 是紧致的.

6.25 若 f 是从(E 中)紧致集合 S 到 F 中的连续和一一的映射，证明 f 是 S 到其象集上的同胚.

证: 只要证明 f^{-1} 是从 f (在 F 中)的象集到 E 中的连续映射就行了. 设 C 是 E 中任意闭集和设 S^* 是 $f(S)$ 中使得 $f^{-1}(f(P))=P$ 在 C 中的点 $f(P)$ 的集合. 如图 6-28 所示，由此得出 $f^{-1}(S^*)=C\cap S$. 因为紧致集 S 是闭的和 C 是闭的，故 $f^{-1}(S^*)$ 是闭的. 因为紧致集的闭子集是紧致的(问题 6.39)，$f^{-1}(S^*)$ 是紧致的. 因为紧致集在连续映射下的象是紧致的，因此 $f(f^{-1}(S^*))=S^*$ 是紧致的. 因为紧致集是闭的，S^* 是闭的. 于是，给定 E 中

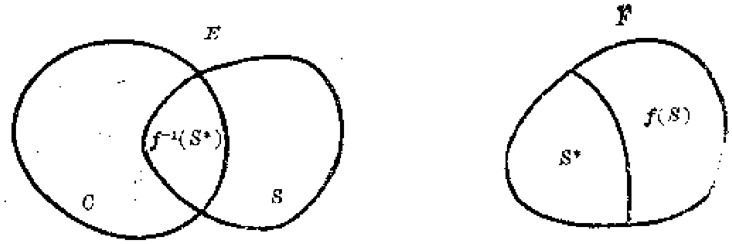


图 6-28

任意闭集 C 后，F 中使得 $f^{-1}(P)$ 在 C 中的点 P 的集合 S^* 是闭的．由问题 6.22 可得 f^{-1} 在象集 $f(S)$ 上连续．

§6.3 补 充 题

6.26 确定下列集合是否(i)开集，(ii)闭集，(iii)有界集，(iv)连通集，(v)紧致集．

(a) E^1 中两不相交有限闭区间．

(b) E^2 中两不相交开盘．

(c) E^2 中两不相交开盘的余集．

(d) E^3 中两不相交闭球．

(e) E^3 中两不相交闭球的余集．

(f) E^3 中环面．

(g) E^3 中环面的余集．

答案：(a) 闭，有界，不连通，紧致．

(b) 开，有界，不连通，不紧致．

(c) 闭，无界，连通，不紧致．

(d) 闭，有界，不连通，紧致．

(e) 开，无界，连通，不紧致．

(f) 闭，有界，连通，紧致．

(g) 开，无界，不连通，不紧致．

6.27 证明 E^n 中任意多个闭集的交是闭集．

6.28 证明 P 是 E^n 中集合 S 的极限点当且仅当每个包含 P 的开集含有 S 中异于 P 的一点．

6.29 若 P 是 E^n 中 S 的一个极限点，证明包含 P 的每个开集含有 S 中无限多个点．

6.30 证明 E^n 中有限个点构成的集合是有界的．

6.31 证明 E^n 中有限个球形邻域的并是有界的．

6.32 证明 E^n 中一个集合的极限点集是闭集．

6.33 若 T 是包含 E^n 中集 S 的闭集，证明 T 包含 S 的闭包 $\hat{S}$．

6.34 点 P 称为 S 的外点，若 P 是 S 的余集的内点．见问题 6.8，证明 S 的外点的集合，称为 S 的外部，是开集．

6.35 点 P 称为 S 的边界点，若 P 既不是 S 的内点也不是 S 的外点．证明 S 的边界点的集合，称为 S 的边界，是闭集．

6.36 证明 E 是连通的.

6.37 证明 S 是 E^2 中的紧致集当且仅当 S 作为 E^3 一平面的子集时是紧致的.

6.38 从定义(不用定理 6.6)直接证明 E 不是紧致的.

6.39 从定义(不用定理 6.6)直接证明 E 中紧致集的闭子集是紧致的.

6.40 证明 E 中紧致集 S 的每一个无限集 S^* 有在 S 中的一个极限点.

6.41 证明 $x=u,\ y=v,\ z=f(u,\ v)$ 当 $f(u,\ v)$ 在 S 上连续时确定一个从(E^2 中)集合 S 到 E^3 中的一一双连续映射.

6.42 证明 $x=au+bv+c,\ y=du+ev+f,\ ae-bd\neq 0$, 确定 uv 平面到 xy 平面上的一个一一双连续映射.

6.43 设 f 是(E 中)集合 S 到 F 中的映射. 写出"f 在 S 中的点 P_0 不连续"的定义.

答案: f 在 P_0 不连续, 若存在一邻域 $S(f(P_0))$ 使得对于每个 $S(P_0)$ 其中有一点 P, 使 $f(P)$ 在 $[S(f(P_0))]^C$ 中.

6.44 证明映射

$$x=u,\ y=v,\ z=\begin{cases} u^2+v^2, & \text{当 } u\geqslant 0, \\ 1\ , & \text{当 } u<0 \end{cases}$$

是(a)在$(-1,\ -1)$连续, (b)在$(1,\ 1)$连续, (c)在$(1,\ 0)$连续, (d)在$(0,\ 2)$不连续.

6.45 给出一个从正方形周界到圆的一一双连续映射, 证明正方形的周界拓扑等价于圆.

6.46 设 f 是(E 中)集 S 到 F 中保持点之间的距离不变的映射, 即对 S 中任意 P 和 Q, $d(P,\ Q)=d(f(P),\ f(Q))$. 证明 f 是 S 到它的象上的同胚.

6.47 设 f 是(E 中) 连通集 S 到 x 轴的连续映射. 若 $f(P)=a$ 和 $f(Q)=b$, $a<b$ 和 c 是区间 $a<x<b$ 中任意一个数, 证明 S 中存在 P_0 使得 $f(P_0)=c$.

6.48 若 f 是(E 中)紧致集 S 到 F 中的连续映射, 直接证明 (不用定理 6.6 和 6.8)象集 $f(S)$ 是 F 中一有界集.

6.49 设 f 是(E 中)闭集 C 到 F 中的连续映射. 设 C^* 是 F 中任意闭集. 证明 E 中使 $f(P)$ 在 C^* 中的点 P 的集合是 E 中的闭集.

6.50 设 f 是(E 中)集合 S 到 F 中的映射, 使得若 O 是 F 中任意开集, S 中使 $f(P)$ 在 O 中的点 P 的集合是开的, 证明 f 在 S 上连续.

6.51 证明拓扑等价性是欧氏空间中集合之间的一个等价关系.

第七章 以向量为变元的向量函数

§7.1 基本内容

1. 向量函数

设$\boldsymbol{f}$是(E中)向量集合V到F的映射，因为$\boldsymbol{f}$使V中每个向量$\boldsymbol{x}$有F中向量$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$与之对应，$\boldsymbol{f}$称为一个向量变元的向量值函数.

现假设E和F的维数分别是n和m，这里m和n是1, 2, 3中任意一个数. 若在E中取定一个基$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$，且$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$，记对应于$\boldsymbol{x}$的向量为$\boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_n)$. 这里$\boldsymbol{f}$对于一组实数给定一个向量，它称为$x_1, \cdots, x_n$的一个向量值函数. 若在$F$中取定一个基$(\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m)$，则对于每个$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{f}$是一个线性组合

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=f_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_1+\cdots+f_m(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_m.$$

这样$\boldsymbol{f}$就和m个$\boldsymbol{x}$的实值函数$f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})$联系起来了，它们是$\boldsymbol{f}$关于$(\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m)$的分量. 对于这两个基来说，$\boldsymbol{f}$就由$x_1, \cdots, x_n$的$m$个实值函数$f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)$，也就是$\boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_n)$的分量表示.

例 7.1 (a) 设S是E^3中半径为r，中心在原点的球面，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$是$S$在其上一点$\boldsymbol{x}$的外向单位法向量，如图7-1所示. 则$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/r$是$\boldsymbol{x}$的一个向量函数，它把($E^3$中)集合$|\boldsymbol{x}|=r$中的$\boldsymbol{x}$映射到$E^3$. 若$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$是$E^3$中一个基，且$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$，则$\boldsymbol{n}$由下式给定

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{x}}{r}=\frac{x_1}{r}\boldsymbol{e}_1+\frac{x_2}{r}\boldsymbol{e}_2+\frac{x_3}{r}\boldsymbol{e}_3, \quad |\boldsymbol{x}|=r.$$

$\boldsymbol{n}$的分量是(x_1, x_2, x_3)的实值函数

$$n_1=x_1/r, \quad n_2=x_2/r, \quad n_3=x_3/r.$$

(b) 设$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{g}_1+y_2\boldsymbol{g}_2+y_3\boldsymbol{g}_3$. 方程

$$\boldsymbol{y}=(x_1+x_2)\boldsymbol{g}_1+(x_1-x_2)\boldsymbol{g}_2+(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{g}_3$$

确定一个从E^2到E^3的映射，如图7-2所示. $\boldsymbol{y}$的分量是

$$y_1=x_1+x_2, \quad y_2=x_1-x_2, \quad y_3=x_1^2+x_2^2.$$

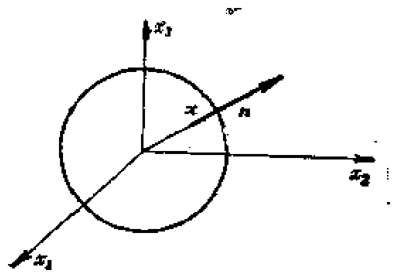


图 7-1

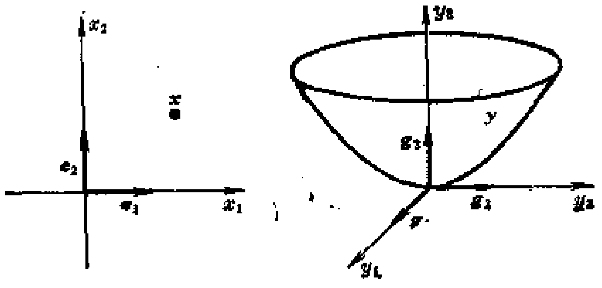


图 7-2

消去 x_1 和 x_2 就可得出映射的值域是椭圆抛物面

$$y_3=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2).$$

2. 线性函数

E 上到 F 的向量函数 $\boldsymbol{f}$ 称为线性的,若对于 E 中所有 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,

(i) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$;

(ii) $\boldsymbol{f}(k\boldsymbol{a})=k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, $k=$纯量.

若 $\boldsymbol{f}$ 是线性的,且 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$,则由以上条件,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{f}(x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{f}(x_1\boldsymbol{e}_1)+\cdots+\boldsymbol{f}(x_n\boldsymbol{e}_n)\\&=x_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+x_n\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n).\end{aligned}$$

若$(\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m)$是 F 中的一个基,且向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)$ 是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)&=a_{11}\boldsymbol{g}_1+a_{21}\boldsymbol{g}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{g}_m,\\\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)&=a_{12}\boldsymbol{g}_1+a_{22}\boldsymbol{g}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{g}_m,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n)&=a_{1n}\boldsymbol{g}_1+a_{2n}\boldsymbol{g}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{g}_m,\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})&=x_1(a_{11}\boldsymbol{g}_1+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{g}_m)+x_2(a_{12}\boldsymbol{g}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{g}_m)\\&\quad+\cdots+x_n(a_{1n}\boldsymbol{g}_1+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{g}_m)\\&=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)\boldsymbol{g}_1+(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)\boldsymbol{g}_2\\&\quad+\cdots+(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)\boldsymbol{g}_m.\end{aligned}$$

于是线性函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的分量是$(x_1, \cdots, x_n)$的实值线性齐次函数

$$\begin{aligned}f_1(\boldsymbol{x})&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\f_2(\boldsymbol{x})&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\f_m(\boldsymbol{x})&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n.\end{aligned}$$

注意,系数 a_{ij} 依赖于 E 和 F 的基.

上述命题的逆命题也成立. 在问题 7.5 中我们将证明,若向量函数 $\boldsymbol{f}$ 的分量是$(x_1, \cdots, x_n)$的线性齐次函数,则 $\boldsymbol{f}$ 是线性的.

系数矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots & \cdots\cdots\\a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{f}$ 关于基$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$和$(\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m)$的矩阵表示. 这个矩阵的秩,即它的最大非零子式的阶数,可以证明是不依赖于基的,称为 $\boldsymbol{f}$ 的秩.

注意,若 $\boldsymbol{f}$ 是线性的

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\boldsymbol{f}(\mathbf{0}-\mathbf{0})=\boldsymbol{f}(\mathbf{0})-\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

于是若 $\boldsymbol{f}$ 是 E 到 F 的线性映射,E 中的原点总是映射为 F 中的原点.

现在假设 $\boldsymbol{f}$ 是 E^3 到 E^3 的线性映射，在问题 7.3 中我们将证明，这映射是一一的和到上的，当且仅当基向量的象

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)&=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+a_{31}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)&=a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+a_{32}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)&=a_{13}\boldsymbol{e}_1+a_{23}\boldsymbol{e}_2+a_{33}\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

是线性无关的．而从定理 1.8，这些向量是线性无关的当且仅当

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,$$

即当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的矩阵表示的秩是 3．于是 E^3 到 E^3 的线性映射是一一的和到上的，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 3.

若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)$ 线性相关，但是，比如说，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 线性无关，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)$ 的所有线性组合落在一个通过原点而含有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 的平面上，请读者证明，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩是 2 时出现这种情形.

最后，若向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)$ 中任意两个都是线性相关的，但是，比如说，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{f}$ 把 E^3 映射到一条通过原点而含有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 的直线上．当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩是 1 时出现这种情形.

于是我们有

定理 7.1 设 $\boldsymbol{f}$ 是 E^3 到 E^3 中的线性映射，则

(i) $\boldsymbol{f}$ 是一一的和到上的，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 3.

(ii) $\boldsymbol{f}$ 映射 E^3 到 E^3 的一个平面上，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 2.

(iii) $\boldsymbol{f}$ 映射 E^3 到 E^3 的一直线上，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 1.

我们还将证明：

定理 7.2 设 $\boldsymbol{f}$ 是 E^2 到 E^3 的线性映射，则

(i) $\boldsymbol{f}$ 一对一地映射 E^2 到 E^3 的一个平面上，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 2.

(ii) $\boldsymbol{f}$ 映射 E^2 到 E^3 的一直线上，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 1.

例 7.2

(a) 方程

$$\begin{aligned}x_1&=2u-v,\\x_2&=u+v,\\x_3&=-u+v\end{aligned}$$

定义一个从 E^2 到 E^3 的线性映射，其矩阵表示是：

$$\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}=3\neq 0,$$

映射的秩是 2．消去 u 和 v 容易验证这映射把 E^2 变到平面 $2x_1-x_2+3x_3=0$ 上.

(b) 方程

$$\begin{aligned}y_1&=2x_1+x_2-2x_3,\\y_2&=x_1+x_2-x_3,\end{aligned}$$

$$y_3=-x_1+x_3$$

定义一个从 E^3 到 E^3 的线性映射. 因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

但

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

映射的秩是 2,这映射把 E^3 变到平面 $y_1-y_2+y_3=0$ 上.

3. 连续和极限

我们知道 E 中向量 $\boldsymbol{x}_0$ 的 ε–球形邻域 $S_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ 是由满足 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\varepsilon$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 构成的. 如图 7-3 所示,$S_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ 是由与 $\boldsymbol{x}_0$ 的距离小于 ε 的向量构成的. 我们说从(E 中的)V 到 F 的函数 $\boldsymbol{f}$ 在 V 中的 $\boldsymbol{x}_0$ 是连续的, 若对 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的每个球形邻域 $S(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$, 存在 $S(\boldsymbol{x}_0)$, 使得对于 $S(\boldsymbol{x}_0)\cap V$ 中的 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $S(f(\boldsymbol{x}_0))$ 中. 于是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续的充分必要条件是对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于 V 中使 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 的 $\boldsymbol{x}$, 有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon.$$

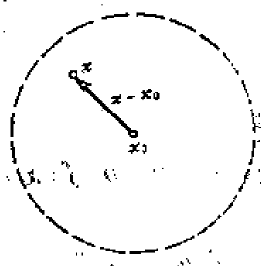


图 7-3

例 7.3 考虑函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|, & 当\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{0}, & 当\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \end{cases}$$

对于 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|=\left|\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}-\frac{\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right|\leqslant\left|\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}-\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}_0|}\right|+\left|\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}_0|}-\frac{\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}_0|}\right|$$

$$\leqslant|\boldsymbol{x}|\frac{||\boldsymbol{x}_0|-|\boldsymbol{x}||}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}_0|}+\frac{1}{|\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant\frac{2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}{|\boldsymbol{x}_0|}.$$

这里利用了三角形不等式

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

于是对于

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{x}_0|,\ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|<\varepsilon,$$

因而 $\boldsymbol{f}$ 对于所有 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 是连续的. 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 不连续. 因为

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(0)|=|\boldsymbol{x}|/|\boldsymbol{x}|=1,$$

当 $\varepsilon\leqslant1$ 时, 它就不可能小于 ε.

如同单变量向量函数的情形, 我们有

定理 7.3 函数 $\boldsymbol{f}=f_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+f_m\boldsymbol{g}_m$ 在 $\boldsymbol{x}$ 连续, 当且仅当每个分量 f_i, $i=1,\cdots,m$, 在 $\boldsymbol{x}$ 连续.

定理 7.4 若 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ 和 h 在 $\boldsymbol{x}$ 连续, 则 $|\boldsymbol{f}|$, $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$, $h\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 连续.

我们说一个从(E 中的)V 到 F 的函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 有极限 $\boldsymbol{L}$, 记为 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}$, 若对于每个 $S(\boldsymbol{L})$ 存在一去心邻域 $S'(\boldsymbol{x}_0)$, 使得对于 $S'(\boldsymbol{x}_0)\cap V$ 中的 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $S(\boldsymbol{L})$ 中. 于是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 有极限 $\boldsymbol{L}$, 当且仅当对于每个 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$, 使得对于 V 中使 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 的 $\boldsymbol{x}$,

有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|<\varepsilon$. 这里的$\boldsymbol{x}_0$不必是在$V$中的; 但是假定$\boldsymbol{x}_0$是$V$的一个极限向量, 即每个$S(\boldsymbol{x}_0)$包含$V$中一个异于$\boldsymbol{x}_0$的向量. 在问题7.10中我们将证明, 若$\boldsymbol{x}_0$是$V$的一个极限向量, 且$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$连续, 则$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$. 以及, 若$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{L}$, 则$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$连续.

最后, 象研究单变量向量函数那样, 我们引进 Landau 记号$\boldsymbol{o}$和$\boldsymbol{O}$. 即设一纯量函数$g(\boldsymbol{x})$, 它在$\boldsymbol{x}_0$的某个去心邻域异于零. 函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$是$g(\boldsymbol{x})$的"小$\boldsymbol{o}$", 记为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}(g(\boldsymbol{x}))$, 若当$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{o}$; 函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$是$g(\boldsymbol{x})$的"大$\boldsymbol{O}$", 记为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{O}(g(\boldsymbol{x}))$, 若$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$是有界的, 即若存在一纯量$M>0$, 使得在$\boldsymbol{x}_0$的某个邻域中有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x})|\leqslant M$.

例 7.4 设$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=x_1^2x_2\boldsymbol{e}_1+x_1(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_2$, 则$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}(|\boldsymbol{x}|^2)$. 因为引进极坐标时, $x_1=|\boldsymbol{x}|\cos\theta$, $x_2=|\boldsymbol{x}|\sin\theta$, 对于$|\boldsymbol{x}|<\varepsilon/2$, 有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{x}|^2|&=||\boldsymbol{x}|(\cos^2\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+|\boldsymbol{x}|(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2|\\&=|\boldsymbol{x}||(\cos^2\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2|\\&\leqslant 2|\boldsymbol{x}|<\varepsilon.\end{aligned}$$

于是当$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{x}|^2\to\boldsymbol{o}$. 所以$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}(|\boldsymbol{x}|^2)$. 因为

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{x}|^3|=|(\cos^2\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2|\leqslant 2.$$

即, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{x}|^3$在$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$有界, 于是还有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{O}(|\boldsymbol{x}|^3)$.

向量函数通常定义在一个开集上. 所谓V是开的, 若对V中每个$\boldsymbol{x}_0$, 存在一个包含在V中的向量邻域$S(\boldsymbol{x}_0)$.

4. 方向导数

设$\boldsymbol{f}$定义在(E中的)开集V上, $\boldsymbol{x}_0$在V中, 且$\boldsymbol{u}_0$是E中一非零向量. *$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$沿$\boldsymbol{u}_0$方向的方向导数*是向量

$$D_{\boldsymbol{u}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u}_0)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{h},$$

若上式右边的极限存在的话. 若我们把$\boldsymbol{f}$看作$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u}_0$中的$h$的函数, 即若我们引进函数$\boldsymbol{F}(h)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u}_0)$, 则

$$\begin{aligned}D_{\boldsymbol{u}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)&=\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u}_0)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{F}(h)-\boldsymbol{F}(0)}{h}=\boldsymbol{F}'(0).\end{aligned}$$

即$D_{\boldsymbol{u}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$是$\boldsymbol{F}(h)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u}_0)$在$h=0$的导数.

如图7-4所示, 设$\boldsymbol{f}$是E^3到E^3的映射, 由于$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u}_0$是过$\boldsymbol{x}_0$平行$\boldsymbol{u}_0$的直线和它的象$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}(h)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u}_0)$是曲面$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$上一曲线的参数表示, 因而方向导数$D_{\boldsymbol{u}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{F}'(0)$是在点$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$与曲线$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}(h)$相切的向量.

例 7.5 (a) 考虑函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=x_1\boldsymbol{g}_1+x_2\boldsymbol{g}_2+(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{g}_3.$$

这里

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(h)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{u})&=(x_1+hu_1)\boldsymbol{g}_1+(x_2+hu_2)\boldsymbol{g}_2\\&\quad+[(x_1+hu_1)^2+(x_2+hu_2)^2]\boldsymbol{g}_3,\end{aligned}$$

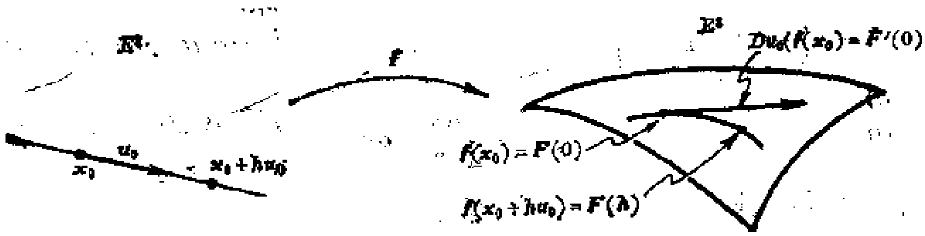


图 7-4

$$F'(h)=u_1g_1+u_2g_2+[2u_1(x_1+hu_1)+2u_2(x_2+hu_2)]g_3$$

和
$$F'(0)=u_1g_1+u_2g_2+(2u_1x_1+2u_2x_2)g_3.$$

于是在每个 $x=x_1e_1+x_2e_2$ 沿任意方向 $u=u_1e_1+u_2e_2$ 有 f 的导数存在，且

$$D_uf(x)=u_1g_1+u_2g_2+2(u_1x_1+u_2x_2)g_3.$$

(b) 一个函数可以在一个方向有导数，而在另一个方向没有导数．考虑 E^2 上的实函数

$$f(x)=f(x_1,\ x_2)=\begin{cases}x_1+x_2, & 当\ x_1=0\ 或\ x_2=0,\\ 1, & 其余情况.\end{cases}$$

在 $x=0$ 沿 $u=e_1$ 方向，

$$F(h)=f(hu)=f(h,\ 0)=h,\ F'(h)=1.$$

于是 $D_{e_1}f(0)=F'(0)=1$．在 $x=0$ 沿 $u=e_2$ 方向，

$$F(h)=f(hu)=f(0,\ h)=h,\ F'(h)=1.$$

所以 $D_{e_2}f(0)=1$，但是沿任意别的方向，即对于 $x=0$ 和 $u=u_1e_1+u_2e_2$，这里 $u_1\neq0$ 和 $u_2\neq0$，有

$$F(h)=f(hu)=f(hu_1,\ hu_2)=\begin{cases}0, & 当\ h=0,\\ 1, & 其余情况.\end{cases}$$

它在 $h=0$ 没有导数，于是 f 在 $x=0$ 仅沿 $u=e_1$ 和 $u=e_2$ 的方向时有导数．

在 E 中取定一个基 $(e_1,\ \cdots,\ e_n)$．f 在 x 沿一个基向量 e_k 的方向的导数，$D_{e_k}f(x)$ 称为 f 关于 x 的第 k 个分量的偏导数．设

$$f(x)=f_1(x_1,\ \cdots,\ x_n)g_1+\cdots+f_m(x_1,\ \cdots,\ x_n)g_m$$

则

$$\begin{aligned}D_{e_k}f(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+he_k)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x_1,\ \cdots,\ x_k+h,\ \cdots,\ x_n)-f(x_1,\ \cdots,\ x_n)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f_1(x_1,\ \cdots,\ x_k+h,\ \cdots,\ x_n)-f_1(x_1,\ \cdots,x_n)}{h}g_1\\&\quad+\cdots+\lim_{h\to0}\frac{f_m(x_1,\ \cdots,\ x_k+h,\ \cdots,\ x_n)-f_m(x_1,\ \cdots,\ x_n)}{h}g_m\\&=\frac{\partial f_1}{\partial x_k}g_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_k}g_2+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial x_k}g_m.\end{aligned}$$

由此可知向量 $D_{e_k}f(x)$ 的分量是 f 的分量在 x 的偏导 $\partial f_i/\partial x_k$．偏导数 $D_{e_k}f$ 也记为 D_kf 或 $\partial f/\partial x_k$.

例 7.6　设 $f(u,\ v)=ue^vg_1+(u^2+v^2)g_2+uvg_3$，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}(ue^{v})\boldsymbol{g}_1+\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)\boldsymbol{g}_2+\frac{\partial}{\partial u}(uv)\boldsymbol{g}_3=e^{v}\boldsymbol{g}_1+2u\boldsymbol{g}_2+v\boldsymbol{g}_3$$

和

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}(ue^{v})\boldsymbol{g}_1+\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)\boldsymbol{g}_2+\frac{\partial}{\partial v}(uv)\boldsymbol{g}_3=ue^{v}\boldsymbol{g}_1+2v\boldsymbol{g}_2+u\boldsymbol{g}_3.$$

5. 可 微 函 数

若一个单变量函数在一点有导数，则它在这点连续，但是对于以向量为变元的函数情况就不一样．如问题 7.14 将证明的，$\boldsymbol{f}$ 可能在 $\boldsymbol{x}_0$ 的每一个方向有方向导数，而在 $\boldsymbol{x}_0$ 不连续．原因是函数在一点的方向导数仅与该函数沿这点所在的一条直线上的变化有关，而不涉及到它在这点的一个完整的邻域上的变化．

若一个单变量函数在一点有导数，它在这点的一个邻域有一线性逼近函数．我们利用这种性质对以向量为变元的函数定义可微性．

一个从(E 中的)开集 $\boldsymbol{V}$ 到 F 的函数 $\boldsymbol{f}$ 称为在 $\boldsymbol{v}$ 中的 $\boldsymbol{x}_0$ 是可微的，若存在一个把 E 中的 $\boldsymbol{v}$ 映射到 F 的线性函数 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{v})$，使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}),$$

这里当 $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{o}$ 时，$(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v})/|\boldsymbol{v}|)\to\boldsymbol{0}$.

现在假定 $\boldsymbol{f}$ 在 x_0 可微．则对任意非零向量 $\boldsymbol{u}$ 和足够小的纯量 h,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(h\boldsymbol{u})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ h\boldsymbol{u}).$$

因为 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}$ 是线性的，$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(h\boldsymbol{u})=h\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{u})$．于是，除以 h

$$\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{h}=\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{u})+\frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ h\boldsymbol{u})}{h}.$$

在问题 7.12 中我们将证明当 $h\to0$ 时，$(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ h\boldsymbol{u})/h)\to\boldsymbol{0}$. 由此得出在 $\boldsymbol{x}_0$ 沿每个方向 $\boldsymbol{u}$ 存在 $\boldsymbol{f}$ 的导数为：

$$\begin{aligned}D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)&=\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{u})+\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ h\boldsymbol{u})}{h}=\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{u}).\end{aligned}$$

于是

定理 7.5 若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 沿每个方向有导数．

在问题 7.19 中我们还将证明

定理 7.6 若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续．

注：由 $D_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{v})$ 得出 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}$ 是唯一的，$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}$ 由它在一个基的取值唯一决定，这些值是偏导数

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{e}_i)=D_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0).$$

线性函数 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的微分并记为 $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$．其在 $\boldsymbol{v}$ 的值记为 $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})$ 用以代替 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{v})$．若 $\boldsymbol{f}$ 在开集 V 的每一点 $\boldsymbol{x}$ 可微，则 $\boldsymbol{f}$ 称为可微函数．可微函数 $\boldsymbol{f}$ 的微分是函数 $d\boldsymbol{f}$，它在点 $\boldsymbol{x}$ 的值是 $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

现在假定 $\boldsymbol{f}$ 是从(E 中的)V 到 F 中的一个可微函数．在每个 $\boldsymbol{x}$，$d\boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{v}$ 是线性的，于是

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})=d\boldsymbol{f}(v_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+v_n\boldsymbol{e}_n)=v_1d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+v_nd\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n).$$

由上已知 $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{e}_i)=D_{e_i}\boldsymbol{f}=\partial\boldsymbol{f}/\partial x_i$，于是

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})=v_1\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_n}, \tag{7.2}$$

由于当 $\boldsymbol{f}=f_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+f_m\boldsymbol{g}_m$ 时，

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_j}=\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_1+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_m,\quad j=1,\ \cdots,\ n.$$

于是方程(7.2)变为

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})&=v_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\boldsymbol{g}_1+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\boldsymbol{g}_m\right)+\cdots+v_n\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\boldsymbol{g}_1+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\boldsymbol{g}_m\right)\\&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}v_1+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}v_n\right)\boldsymbol{g}_1+\cdots+\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1}v_1+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial x_n}v_n\right)\boldsymbol{g}_m.\end{aligned}$$

$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$的分量是微分

$$df_1(\boldsymbol{v})=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}v_1+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}v_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$df_m(\boldsymbol{v})=\frac{\partial f_m}{\partial x_1}v_1+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial x_n}v_n.$$

$d\boldsymbol{f}$ 作为一个线性函数时的矩阵表示是 $m\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}\cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

上述矩阵称为 $\boldsymbol{f}$ 关于基$(\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n)$和$(\boldsymbol{g}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{g}_m)$的Jacobi矩阵．若 $m=n$，$\boldsymbol{f}$ 的Jacobi矩阵的行列式，简称为$\boldsymbol{f}$ 的Jacobi，并记为 $J(\boldsymbol{f})$或 $\dfrac{\partial(f_1,\ \cdots,\ f_n)}{\partial(x_1,\ \cdots,\ x_n)}$，即

$$J(\boldsymbol{f})=\frac{\partial(f_1,\ \cdots,\ f_n)}{\partial(x_1,\ \cdots x_n)}=\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right).$$

容易验证，坐标函数 $x_1(\boldsymbol{x})=x_1,\ \cdots,\ x_n(\boldsymbol{x})=x_n$ 是从 E 到 E^1 的可微函数，而且它们的微分 $dx_1,\ \cdots,\ dx_n$，是 E 到 E^1 的线性函数，对于 E 中任意向量 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+v_n\boldsymbol{e}_n$，有 $dx_i(\boldsymbol{v})=v_i,\ i=1,\ \cdots,\ n$，所以从方程(7.2)

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})=v_1\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_n}=dx_1(\boldsymbol{v})\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_1}+\cdots+dx_n(\boldsymbol{v})\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_n}.$$

由此得公式

$$d\boldsymbol{f}=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_n}dx_n. \tag{7.4}$$

实际上我们可以用稍微不同的方法解释公式(7.4)．dx_i 不作为 E 上坐标函数的微分，而解释为 E 中一个典型向量 $d\boldsymbol{x}$ 的分量，于是 $d\boldsymbol{f}$ 作为 $d\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{f}$ 的微分作用下的象，则(7.4)是利用 E 中典型向量 $d\boldsymbol{x}$ 的分量 dx_i 表示象 $d\boldsymbol{f}$．

例 7.7 考虑从 E^3 到 E^3 的函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(2x_1-x_2)\boldsymbol{e}_1+x_1x_3\boldsymbol{e}_2+(x_2^2-x_3^2)\boldsymbol{e}_3.$$

$\boldsymbol{f}$ 的微分是

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3$$
$$=(2e_1+x_3e_2)dx_1+(-e_1+2x_2e_3)dx_2+(x_1e_2-2x_2e_3)dx_3.$$

f 在 x 的 Jacobi 矩阵是

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ x_3 & 0 & x_1\\ 0 & 2x_2 & -2x_3\end{pmatrix}.$$

f 在 x 的 Jacobi 是

$$J(f)(x)=\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=-2(2x_1x_2+x_3^2).$$

前面讲过若 f 是 E^2 到 E^3 的映射，则方向导数 $D_{dx}f(x_0)=df(x_0)$ 是曲面 $y=f(x)$ 上通过 $y_0=f(x_0)$ 的曲线的切向量．特别地，若 df 作为 dx 的线性函数在 x_0 的秩是 2，即 Jacobi 矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j)$ 在 x_0 的秩是 2，从定理 7.2(i) 得出 $df(x_0)$ 是 E^2 中向量 dx 到一个平面的一一映射，如图 7-5 所示．这个通过 y_0 平行于向量 $df(x_0)$ 的平面称为 $y=f(x)$ 在 y_0 的切平面，切平面的方程是 $y=y_0+df(x_0)$．

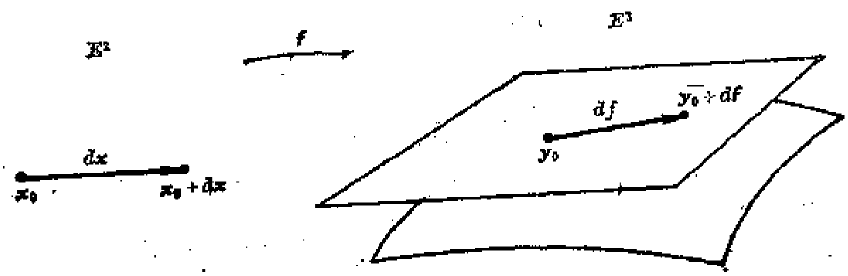


图 7-5

例 7.8 考虑 E^2 到 E^3 的映射

$$y=(u-v)g_1+(u+v)g_2+(u^2+v^2)g_3.$$

微分

$$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv=(g_1+g_2+2ug_3)du+(-g_1+g_2+2vg_3)dv$$
$$=(du-dv)g_1+(du+dv)g_2+(2udu+2vdv)g_3.$$

在 $u=1$，$v=-1$，有 $y_0=2g_1+2g_3$，且

$$dy_0=(du-dv)g_1+(du+dv)g_2+(2du-2dv)g_3.$$

所以在 y_0 的切平面是

$$y=y_0+dy_0=(2+du-dv)g_1+(du+dv)g_2+(2+2du-2dv)g_3,$$

或 $y_1=2+du-dv,\quad y_2=du+dv,\quad y_3=2+2du-2dv,$

或消去 du 和 dv，得 $2y_1-y_3=2$．

与单变量函数的导数的情况一样，我们有

定理 7.7 设 f 和 g 是从（E 中的）开集 V 到 F 的向量函数；h 是 V 上的纯量函数．若 f，g 和 h 在 x 可微，则 $f+g$，hf，$f\cdot g$ 和 $f\times g$ 在 x 可微，且

(i) $d(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})=d\boldsymbol{f}+d\boldsymbol{g}$,

(ii) $dh\boldsymbol{f}=hd\boldsymbol{f}+(dh)\boldsymbol{f}$,

(iii) $d(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{g}+(d\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}$,

(iv) $d(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}\times d\boldsymbol{g}+(d\boldsymbol{f})\times\boldsymbol{g}$.

最后,若 $\boldsymbol{f}$ 对 V 中每个 $\boldsymbol{x}$ 可微,则 $d\boldsymbol{f}$ 是两个向量变元 $\boldsymbol{x}$ 和 $d\boldsymbol{x}$ 的函数. 若 $d\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 和 $d\boldsymbol{x}$ 连续,则 $\boldsymbol{f}$ 称为在 V 中连续可微.

若 $\boldsymbol{f}$ 在 V 中连续可微, 则 $\partial\boldsymbol{f}/\partial x_i$ 在 V 中连续, 故所有偏导数 $\partial f_i/\partial x_j$ 在 V 中连续. 其逆也真. 即

定理 7.8 从(E 中的)开集 V 到 F 的向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在 V 中连续可微, 当且仅当关于 E 和 F 中的基,所有偏导数 $\partial f_i/\partial x_j$, $i=1, \cdots, m$; $j=1, \cdots, n$, 在 V 中连续.

6. 复合函数,链法则

设 E、F 和 G 是欧氏空间,$\boldsymbol{f}$ 是从(E 中的)集合 V 到 F 的函数,$\boldsymbol{g}$ 是从(F 中的)集合 U 到 G 中的函数. 对于 V 中使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 U 中的所有 $\boldsymbol{x}$,从 E 中 $\boldsymbol{x}$ 到 G 的复合函数 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ 定义为 $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$.

例 7.9 (a) $\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1-x_2)\boldsymbol{g}_1+(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{g}_2+(x_1x_2)\boldsymbol{g}_3$

把(E^2 中的)$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$ 变到 E^3 中,而

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=(y_1+y_2+y_3)\boldsymbol{g}_1+y_1y_2\boldsymbol{g}_2+(y_2^2-y_3^2)\boldsymbol{g}_3$$

把 E^3 中的 $\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{g}_1+y_2\boldsymbol{g}_2+y_3\boldsymbol{g}_3$ 变到 E^3 中. 若令

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1-x_2)\boldsymbol{g}_1+(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{g}_2+x_1x_2\boldsymbol{g}_3,$$

则有 $\qquad y_1=x_1-x_2, \quad y_2=x_1^2+x_2^2, \quad y_3=x_1x_2.$

显然,把(E^2 中的)$\boldsymbol{x}$ 变到 E^3 中的复合函数 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=&[(x_1-x_2)+(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2]\boldsymbol{g}_1+(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{g}_2\\&+[(x_1^2+x_2^2)^2-(x_1x_2)^2]\boldsymbol{g}_3.\end{aligned}$$

(b) 方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)=(t^2+1)\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2 \quad 或 \quad x_1=t^2+1,\ x_2=t$$

定义 E^1 到 E^2 的映射,表示 E^2 中一曲线. 方程

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=x_1\boldsymbol{g}_1+x_2\boldsymbol{g}_2+(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{g}_3$$

定义 E^2 到 E^3 的映射,表示 E^3 中一曲面. 复合映射

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(t))&=(t^2+1)\boldsymbol{g}_1+t\boldsymbol{g}_2+[(t^2+1)^2+t^2]\boldsymbol{g}_3\\&=(t^2+1)\boldsymbol{g}_1+t\boldsymbol{g}_2+(t^4+3t^2+1)\boldsymbol{g}_3\end{aligned}$$

是 E^1 到 E^3 的映射,表示 E^3 中曲面 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 上一曲线,如图 7-6 所示.

若 $\boldsymbol{f}$ 是从 E 到 F 的线性函数,$\boldsymbol{g}$ 是从 F 到 G 的线性函数,则复合函数 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ 是从 E 到 G 的线性函数,若设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是 E 中的向量,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))=\boldsymbol{g}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})]=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))\\&=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{h}(k\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(k\boldsymbol{a}))=\boldsymbol{f}(k\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))=k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))=k\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}).$$

可见 $\boldsymbol{h}$ 在 E 上是线性的. 另外假设在 E, F 和 G 中取定基, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 的分量由下述线性方程给定:

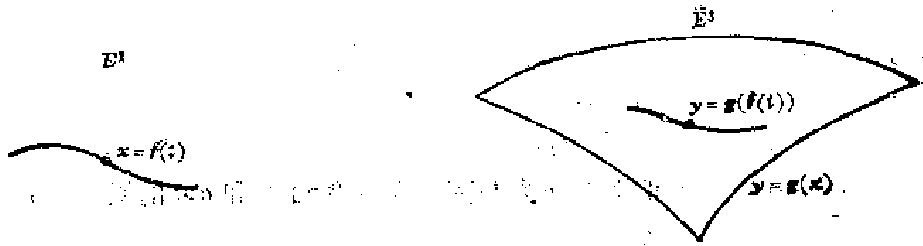


图 7-6

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n,$$

和

$$z_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1m}y_m,$$
$$z_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2m}y_m,$$
$$\cdots\cdots$$
$$z_r=b_{r1}y_1+b_{r2}y_2+\cdots+b_{rm}y_m.$$

或简写为

$$y_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j,\ k=1,\ \cdots,\ m,$$
$$z_i=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}y_k,\ i=1,\ \cdots,\ r.$$

因而得 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 的分量为

$$z_i=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{kj}\right)x_j,\ i=1,\ \cdots,\ r.$$

若 (a_{ij}) 和 (b_{ij}) 分别是 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的矩阵表示，可以看出复合函数的矩阵表示 $(C_{ij})=\left(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{kj}\right)$ 是两个矩阵的积 $(C_{ij})=(b_{ij})(a_{ij})$.

例 7.10 方程

$$y_1=2x_1+x_2,\quad y_2=-x_1+2x_2,\quad y_3=x_1-x_2,$$

和

$$z_1=y_1-y_2+y_3,\quad z_2=2y_1+y_2-y_3,$$

分别定义从 E^2 到 E^3 的和再从 E^3 回到 E^2 的线性映射. 复合映射是从 E^2 到 E^2 的线性映射.

$$z_1=(2x_1+x_2)-(-x_1+2x_2)+(x_1-x_2)=4x_1-2x_2,$$
$$z_2=2(2x_1+x_2)+(-x_1+2x_2)-(x_1-x_2)=2x_1+5x_2$$

注意 $\boldsymbol{z}$ 作为 $\boldsymbol{x}$ 的函数时的矩阵表示是积

$$\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 连续，$\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 连续，则 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 连续. 即

定理 7.9 两个连续函数的复合函数是连续函数.

对于可微函数也有同样的结论，下述重要定理叙述了这个结论并同时给出链法则，即确定复合函数的导数的法则.

定理7.10 若$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}$可微，微分为$\boldsymbol{L}_x(\boldsymbol{y})$，$\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可微，微分为$\boldsymbol{M}_y(\boldsymbol{u})$．则$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}$可微，且微分等于上述微分的复合

$$\boldsymbol{H}_x(\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{L})_x(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{M}_{f(x)}(\boldsymbol{L}_x(\boldsymbol{v})).$$

前面讲过$\boldsymbol{f}$的微分的矩阵表示是Jacobi矩阵$(\partial f_i/\partial x_j)$，$i=1,\cdots,m$；$j=1,\cdots,n$，$\boldsymbol{g}$的微分的矩阵表示是$(\partial g_i/\partial y_j)$，$i=1,\cdots,r$；$j=1,\cdots,m$．因此$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$的微分的矩阵表示是积

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)=\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)=\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right).$$

于是得公式

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}=\frac{\partial g_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial g_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial g_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\quad \begin{array}{l} i=1,\cdots,r,\\ j=1,\cdots,n.\end{array}\tag{7.5}$$

这是计算复合函数的分量的偏导数的链法则．若$\boldsymbol{h}=h_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+h_r\boldsymbol{e}_r$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_j}&=\frac{\partial h_1}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\frac{\partial h_r}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_r\\&=\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial g_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e}_1+\cdots+\left(\frac{\partial g_r}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial g_r}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e}_r\\&=\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\frac{\partial g_r}{\partial y_1}\boldsymbol{e}_r\right)\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\cdots+\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_m}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\frac{\partial g_r}{\partial y_m}\boldsymbol{e}_r\right)\frac{\partial y_m}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_j}=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j},\tag{7.6}$$

这就是复合向量函数的偏导数的链法则．

例7.11． (a) 设

$$\boldsymbol{y}=(x_1+x_2)\boldsymbol{e}_1+(x_1-x_2)\boldsymbol{e}_2+(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_3,\ x_1=t^2+1,\ x_2=\sin t,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}&=\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2x_1\boldsymbol{e}_3)(2t)+(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2x_2\boldsymbol{e}_3)\cos t\\&=(2t+\cos t)\boldsymbol{e}_1+(2t-\cos t)\boldsymbol{e}_2+(4t^3+4t+2\sin t\cos t)\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

(b) 设$\boldsymbol{y}=u(\cos v)\boldsymbol{e}_1+u(\sin v)\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3$，$u=\theta+\phi$，$v=\theta\phi$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \theta}&=\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \theta}\\&=(\cos v)\boldsymbol{e}_1+(\sin v)\boldsymbol{e}_2+[-u(\sin v)\boldsymbol{e}_1+u(\cos v)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3]\phi\\&=[\cos(\theta\phi)-\phi(\theta+\phi)\sin(\theta\phi)]\boldsymbol{e}_1+[\sin(\theta\phi)+\phi(\theta+\phi)\cos(\theta\phi)]\boldsymbol{e}_2+\phi\boldsymbol{e}_3,\\\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \phi}&=\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \phi}+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \phi}\\&=(\cos v)\boldsymbol{e}_1+(\sin v)\boldsymbol{e}_2+[-u(\sin v)\boldsymbol{e}_1+u(\cos v)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3]\theta\\&=[\cos(\theta\phi)-\theta(\theta+\phi)\sin(\theta\phi)]\boldsymbol{e}_1+[\sin(\theta\phi)+\theta(\theta+\phi)\cos(\theta\phi)]\boldsymbol{e}_2+\theta\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

7．C^m类函数，泰勒公式

假设$\boldsymbol{f}$在E中一开集V的每一点$\boldsymbol{x}$，沿一固定方向$\boldsymbol{u}$有导数，则$D_u\boldsymbol{f}$本身是V中$\boldsymbol{x}$的函数，我们可以考虑它在$\boldsymbol{x}$沿方向$\boldsymbol{v}$的导数，即$D_v(D_u\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$，若这导数存在就称为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}$的二阶方向导数，记为$D^2_{vu}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$．

若$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$是 E 中的基，我们知道：

$$D_{e_i}\boldsymbol{f}=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}=\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\boldsymbol{g}_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\boldsymbol{g}_2+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\boldsymbol{g}_m,$$

所以 $$D^2_{e_je_i}\boldsymbol{f}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j\partial x_i}\boldsymbol{g}_1+\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_j\partial x_i}\boldsymbol{g}_2+\cdots+\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j\partial x_i}\boldsymbol{g}_m,$$

即，沿基方向的二阶导数的分量是分量的二阶偏导数.

高阶导数可同样定义. 例如，$D_{\boldsymbol{w}}(D^2_{\boldsymbol{vu}}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$是在 $\boldsymbol{x}$ 的三阶方向导数，记为 $D^3_{\boldsymbol{wvu}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 这里沿基方向的导数还是偏导数.

$$D^3_{e_ke_je_i}\boldsymbol{f}=\frac{\partial^3 \boldsymbol{f}}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}\boldsymbol{g}_1+\cdots+\frac{\partial^3 f_m}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}\boldsymbol{g}_m.$$

若 $\boldsymbol{f}$ 在 V 中连续，我们说 $\boldsymbol{f}$ 在 V 中属于 C^0 类. 若关于 E 中一个基，导数 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}$, $\cdots$, $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}$ 在 V 中全部连续，则 $\boldsymbol{f}$ 称为在 V 中的 C^1 类函数. 一般地若所有 m 阶导数 $\frac{\partial^m \boldsymbol{f}}{\partial x_{i1}\cdots\partial x_{im}}$ 在 V 中存在且连续，则 $\boldsymbol{f}$ 是 V 中 C^m 类函数.

注意，由定理 7.6 和 7.8 可得 C^1 类函数含于 C^0 类中，C^2 类函数含于 C^1 类中，一般地，C^m 类函数含于 C^{m-1} 类中.

例 7.12 实函数 $f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|^{8/3}$ 对于 E 中所有 $\boldsymbol{x}$ 属于 C^2，但不属于 C^3. 因为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\frac{8}{3}|\boldsymbol{x}|^{5/3}\frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{x}|=\frac{8}{3}|\boldsymbol{x}|^{5/3}|\boldsymbol{x}|^{-1}x_i=\frac{8}{3}|\boldsymbol{x}|^{2/3}x_i$$

$$=\frac{8}{3}|\boldsymbol{x}|^{5/3}\cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i),$$

这里我们利用了 $x_i=|\boldsymbol{x}|\cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$. 类似地，

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{8}{3}|\boldsymbol{x}|^{2/3}\delta_{ij}+\frac{16}{9}|\boldsymbol{x}|^{2/3}\cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j)\cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i).$$

但是三阶导数中有一项为：

$$\frac{64}{27}|\boldsymbol{x}|^{-1/3}\cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)\cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j)\cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i),$$

它在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 无界.

注意，可能会有 $\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1\partial x_2}\neq\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_2\partial x_1}$. 但是若 $\boldsymbol{f}$ 属于 C^2 类的话，这种情况就不会发生. 一般地，若 $\boldsymbol{f}$ 是 C^m 类的，则在任意的第 m 阶偏导数中要紧的仅仅是关于每个变量微分的次数而不是它们的先后次序. 其证明请读者参考高等微积分教程.

现假设 $\boldsymbol{f}$ 在 V 中是 C^2 类的，由定理 7.8，$\boldsymbol{f}$ 在 V 中可微；从方程(7.2)得

$$D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}u_1+\cdots+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}u_n.$$

但 $D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}$ 在 V 中也是可微的，所以

$$D^2_{\boldsymbol{vu}}\boldsymbol{f}=D_{\boldsymbol{v}}(D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f})=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}\right)v_1+\cdots+\left(\frac{\partial}{\partial x_n}D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}\right)v_n$$

$$=\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1\partial x_1}u_1+\cdots+\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_1\partial x_n}u_n\right]v_1+\cdots+\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_n\partial x_1}u_1+\cdots+\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_n\partial x_n}u_n\right]v_n,$$

或

$$D^2_{vu}f=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}v_iu_j. \tag{7.7}$$

对于高阶导数有类似的公式，例如

$$D^3_{wvu}f=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}w_iv_ju_k.$$

于是我们有

定理 7.11 若 f 在 V 中属于 C^m 类，则所有第 m 阶方向导数在 V 中连续，它与微分的次序无关，并由下式给定

$$D^m_{u_1\cdots u_m}f=\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}(u_1)_{i_1}(u_2)_{i_2}\cdots(u_m)_{i_m}.$$

例 7.13

假设
$$f(x)=x_1x_2g_1+(x_1^3+x_2^3)g_2+x_1^3x_2g_3,$$

则
$$D_uf(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}u_2=(x_2g_1+3x_1^2g_2+3x_1^2x_2g_3)u_1$$
$$+(x_1g_1+3x_2^2g_2+x_1^3g_3)u_2,$$

$$D^2_{u^2}f(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}u_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}u_1u_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}u_2u_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}u_2^2$$
$$=(6x_1g_2+6x_1x_2g_3)u_1^2+2(g_1+3x_1^2g_3)u_1u_2+6x_2g_2u_2^2,$$

$$D^2_{uv}f(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}u_1v_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}u_1v_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}u_2v_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}u_2v_2$$
$$=(6x_1g_2+6x_1x_2g_3)u_1v_1+(g_1+3x_1^2g_3)(u_1v_2+v_1u_2)+6x_2g_2u_2v_2,$$

$$D^3_{u^2v}f(x)=\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_1\partial x_1}u_1u_1v_1+\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_1\partial x_2}u_1u_1v_2+\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_1}u_1u_2v_1+\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\partial x_1\partial x_1}u_2u_1v_1$$
$$+\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_2}u_1u_2v_2+\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\partial x_1\partial x_2}u_2u_1v_2+\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\partial x_2\partial x_1}u_2u_2v_1$$
$$+\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\partial x_2\partial x_2}u_2u_2v_2$$
$$=\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}u_1^2v_1+\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}(u_1^2v_2+2u_1u_2v_1)+\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2^2}(2u_1u_2v_2+u_2^2v_1)$$
$$+\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}u_2^2v_2$$
$$=(6g_2+6x_2g_3)u_1^2v_1+6x_1g_3(u_1^2v_2+2u_1u_2v_1)+6g_2u_2^2v_2.$$

定理 7.12 Taylor 公式　若 f 在 x_0 的一个邻域中是 C^m 类的，则对于与 x_0 足够接近的 x

$$f(x)=f(x_0)+D_{(x-x_0)}f(x_0)+\cdots+\frac{1}{m!}D^m_{(x-x_0)^m}f(x_0)+R_m(x,x_0),$$

这里当 $x\to x_0$ 时，$R_m(x,\ x_0)/|x-x_0|^m\to 0$.

例 7.14 设

$$f(x_1,\ x_2)=(x_1^2+x_2^3)e_1+x_1^3x_2e_2,$$

则
$$D_vf(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}v_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}v_2=(2x_1e_1+3x_1^2x_2e_2)v_1+(3x_2^2e_1+x_1^3e_2)v_2,$$

$$D^2_{v^2}f(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}v_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}v_1v_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}v_2^2$$
$$=(2e_1+6x_1x_2e_2)v_1^2+6x_1^2e_2v_1v_2+6x_2e_1v_2^2.$$

在 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, 我们有

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=(x_1-1)\boldsymbol{e}_1+(x_2+1)\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=-\boldsymbol{e}_2,$$

$$D_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)(x_1-1)+(3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)(x_2+1),$$

$$D^2_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=(2\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2)(x_1-1)^2+6\boldsymbol{e}_2(x_1-1)(x_2+1)-6\boldsymbol{e}_1(x_2+1)^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+D_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}D^2_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{o}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)\\&=-\boldsymbol{e}_2+(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)(x_1-1)+(3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)(x_2+1)+(\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)(x_1-1)^2\\&\quad+3\boldsymbol{e}_2(x_1-1)(x_2+1)-3\boldsymbol{e}_1(x_2+1)^2+\boldsymbol{o}((x_1-1)^2+(x_2+1)^2).\end{aligned}$$

这个结果也可以用直接将 $\boldsymbol{f}$ 展开为 (x_1-1) 和 (x_2+1) 的幂的方法得到. 我们有

$$\begin{aligned}x_1^2&=[(x_1-1)+1]^2=(x_1-1)^2+2(x_1-1)+1,\\x_2^3&=[(x_2+1)-1]^3=(x_2+1)^3-3(x_2+1)^2+3(x_2+1)-1,\\x_1^3x_2&=[(x_1-1)+1]^3[(x_2+1)-1]\\&=[(x_1-1)^3+3(x_1-1)^2+3(x_1-1)+1][(x_2+1)-1].\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})&=(x_1^2+x_2^3)\boldsymbol{e}_1+x_1^3x_2\boldsymbol{e}_2=\{(x_1-1)^2+2(x_1-1)+1-3(x_2+1)\\&\quad+3(x_2+1)-1\}\boldsymbol{e}_1+\{3(x_1-1)(x_2+1)+(x_2+1)-3(x_1-1)^2\\&\quad-3(x_1-1)-1\}\boldsymbol{e}_2+\{(x_2+1)^3\boldsymbol{e}_1+[(x_1-1)^3(x_2+1)\\&\quad+3(x_1-1)^2(x_2+1)-(x_1-1)^3]\boldsymbol{e}_2\}.\end{aligned}$$

注意, 最后一项确实是 $\boldsymbol{o}((x_1-1)^2+(x_2+1)^2)$, 这个结果与第一个结果相符. 当 $\boldsymbol{f}$ 的分量是多项式时, 可用第二种方法得出 Jaylor 展式, 但对一般的情形仍须使用定理 7.12 的公式.

8. 反函数定理

设 $\boldsymbol{f}$ 是从 E^3 中的开集 V 中的 $\boldsymbol{x}$ 到 E^3 的函数. 一般地说, 这样的函数不一定是一一的. 但是, 假设在 V 中一点 $\boldsymbol{x}_0$, Jacobi $J(\boldsymbol{f})=\det(\partial f_i/\partial x_j)\neq 0$. 这里 $(\partial f_i/\partial x_j)$ 是微分 $d\boldsymbol{f}$ 作为一个线性函数时的矩阵表示. 因为在 $\boldsymbol{x}_0$, $\det(\partial f_i/\partial x_j)\neq 0$, $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的秩是 3. 所以由定理 7.1(i) 知道, $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 是一一的. 由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ 所逼近, 于是我们可以期望至少在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域中 $\boldsymbol{f}$ 是一一的, 这个结果是下述重要定理的一部份, 它称为*反函数定理*.

定理 7.13 设 $\boldsymbol{f}$ 是从(E 中的)一个开集 V 的 $\boldsymbol{x}$ 到 E 的 C^m 类函数($m\geqslant 1$). 若在 V 中的点 $\boldsymbol{x}_0$, Jacobi$J(\boldsymbol{f})=\det(\partial f_i/\partial x_j)\neq 0$, 则存在一个包含在 V 中的邻域 $S(\boldsymbol{x}_0)$ 使得

(i) $\boldsymbol{f}$ 限制在 $S(\boldsymbol{x}_0)$ 时是一一的.

(ii) $S(\boldsymbol{x}_0)$ 的象 $\boldsymbol{f}(S(\boldsymbol{x}_0))$ 是开的.

(iii) $\boldsymbol{f}$ 的逆 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 在 $\boldsymbol{f}(S(\boldsymbol{x}_0))$ 上是 C^m 类的(见图 7-7).

其证明请读者参考高等微积分教科书.

例 7.15 方程

$$y_1=x_1\cos x_2,\quad y_2=x_1\sin x_2\quad (x_1>0)$$

定义 3 从 x_1x_2 平面的右半平面到除去原点的 y_1y_2 平面上的一个映射, 如图7-8(a)所示. 对

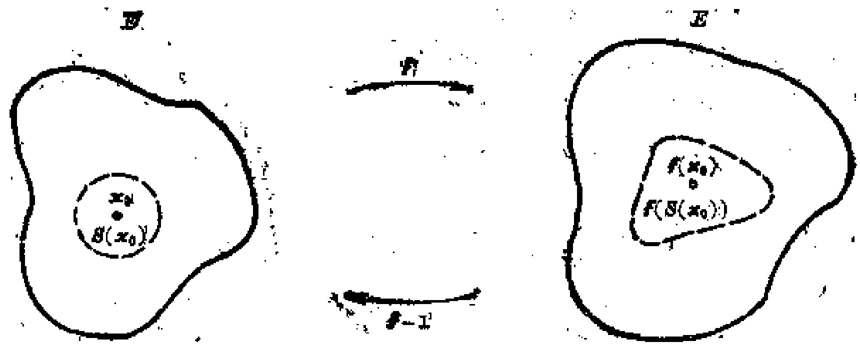


图 7-7

于 $x_1>0$

$$J(f)=\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)=\begin{vmatrix}\cos x_2 & -x_1\sin x_2\\ \sin x_2 & x_1\cos x_2\end{vmatrix}=x_1\neq 0.$$

所以对于右半平面的任意点(x_1, x_2)，有一$S(x_1, x_2)$．在其中，映射是到平面y_1y_2的一个开集的一一的和到上的映射．逆映射为

$$x_1=(y_1^2+y_2^2)^{1/2},\quad x_2=\arctan(y_2/y_1).$$

这里必须取反正切的适当的分支．注意右半平面的映射本身不是一一的，尽管在每一点$\det(\partial y_i/\partial x_j)\neq 0$，因为仅仅半带$0\leqslant x_2<\pi$就覆盖了除去原点的整个$y_1y_2$平面，如图 7-8(b)所示．故反函数定理给我们提供的是一个局部的反函数，而一般地不是一个整体的反函数．

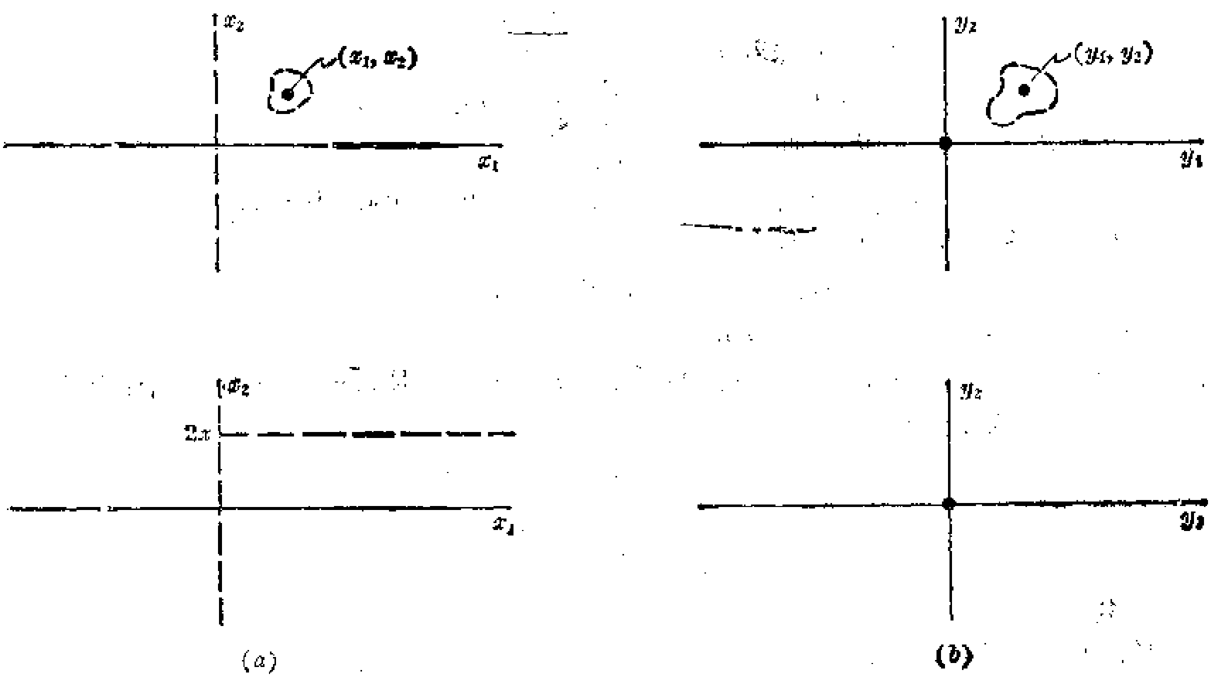


图 7-8

§7.2 问题及其解答

I. 向量函数，线性函数

7.1 证明

$$\boldsymbol{y}=(\sin x_1\cos x_2)\boldsymbol{g}_1+(\sin x_1\sin x_2)\boldsymbol{g}_2+(\cos x_1)\boldsymbol{g}_3$$

定义一个从 E^2 中的矩形区域 $0\leqslant x_1\leqslant\pi$, $0\leqslant x_2<2\pi$ 到 E^3 的半径为 1 中心在原点的球上的映射. 这映射是一一的吗?

证: $|\boldsymbol{y}|^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\sin^2x_1\cos^2x_2+\sin^2x_1\sin^2x_2+\cos^2x_1$

$=\sin^2x_1+\cos^2x_1=1$,

于是映射是到球中的. 为证明这映射是到上的, 对于满足 $|\boldsymbol{y}|^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 的固定的 $\boldsymbol{y}$, 令

$$x_1=\arccos y_3 \text{ 和 } x_2=\begin{cases}\arccos\dfrac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}, & \text{当 } y_2>0;\\ 2\pi-\arccos\dfrac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}, & \text{当 } y_2<0;\\ 0, & \text{当 } y_2=y_1=0;\\ 0, & \text{当 } y_2=0 \text{ 和 } y_1>0;\\ \pi, & \text{当 } y_2=0 \text{ 和 } y_1<0.\end{cases}$$

在每一种情形中 $\cos x_1=y_3$. 若 $y_2\neq0$, 则

$$\sin x_1\cos x_2=\sqrt{1-y_3^2}\,\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}=y_1.$$

若 $y_2>0$, 则
$$\sin x_1\sin x_2=\sqrt{1-y_3^2}\,\frac{|y_2|}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}=|y_2|=y_2.$$

若 $y_2<0$, 则
$$\sin x_1\sin x_2=\sqrt{1-y_3^2}\,\frac{-|y_2|}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}=-|y_2|=y_2.$$

若 $y_1=y_2=0$, 则 $|y_3|=1$. 这意味着 $x_1=0$ 或 π, 因而

$$\sin x_1\cos x_2=0=y_1,\qquad \sin x_1\sin x_2=0=y_2.$$

若 $y_2=0$ 和 $y_1>0$, 则 $x_2=0$, 因而

$$\sin x_1\cos x_2=\sin x_1=\sqrt{1-y_3^2}=y_1,\ \ \sin x_1\sin x_2=0=y_2.$$

若 $y_2=0$ 和 $y_1<0$, 则 $x_2=\pi$, 因而

$$\sin x_1\cos x_2=-\sin x_1=-\sqrt{1-y_3^2}=-|y_1|=y_1.$$
$$\sin x_1\sin x_2=0=y_2.$$

于是 $\sin x_1\cos x_2=y_1$, $\sin x_1\sin x_2=y_2$ 和 $\cos x_1=y_3$ 在每一种情形成立, 映射是到球上的.

7.2 确定线性映射

$$y_1=2x_1+x_2,$$
$$y_2=-4x_1-2x_2$$
$$y_3=-2x_1-x_2$$

的秩和象.

解: 映射的矩阵表示是

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

因为 $\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=0$ 和 $\begin{vmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=0$, 矩阵的秩是 1. 由前两个方程我们得到 $2y_1+y_2=0$, 由后两个方程我们得到 $y_2-2y_3=0$. 于是映射的象是平面 $2y_1+y_2=0$

和 $y_2-2y_3=0$ 的交线.

7.3 证明从 E^3 到 E^3 的线性函数是一一的和到上的，当且仅当基的象是线性无关的.

证：假设 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 是基，$\boldsymbol{f}$ 是从 E^3 到 E^3 的线性函数，且使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)$ 线性无关，则 $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3))$ 也是基，且每个 $\boldsymbol{b}$ 可写成

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+b_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)+b_3\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3).$$

现在定义 $\boldsymbol{a}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$. 则

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)=b_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+b_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)+b_3\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{b}.$$

所以 $\boldsymbol{f}$ 是到上的. 为了证明 $\boldsymbol{f}$ 是一一的，假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}')=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})&=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}((a_1'-a_1)\boldsymbol{e}_1+(a_2'-a_2)\boldsymbol{e}_2+(a_3'-a_3)\boldsymbol{e}_3)\\&=(a_1'-a_1)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+(a_2'-a_2)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)+(a_3'-a_3)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3).\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)$ 是无关的，因此 $a_1'-a_1=0$, $a_2'-a_2=0$, $a_3'-a_3=0$. 于是 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f}$ 是一一的. 反之，若 $\boldsymbol{f}$ 是一一的，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)$ 是无关的，否则，存在 b_1, b_2, b_3 不全为 0，因而 $\boldsymbol{a}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3\neq\boldsymbol{0}$，使得

$$\boldsymbol{0}=b_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+b_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)+b_3\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{f}(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

但是对于每个线性函数有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，这与 $\boldsymbol{f}$ 是一一的相矛盾，于是命题得证.

7.4 证明定理 7.2(i)：E^2 到 E^3 中的线性映射 $\boldsymbol{f}$ 是到 E^3 中一平面的一一的和到上的映射，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 2.

证：假设 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ 是 E^2 中一个基，向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 与 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 在 E^3 中线性无关. 因为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)=x_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+x_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2),$$

E^2 中每个 $\boldsymbol{x}$ 映射到 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 生成的平面上，如图 7-9 所示，而这平面中每个 $\boldsymbol{b}$ 可以唯一地写成 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 的线性组合. 因此，如上一问题那样，$\boldsymbol{f}$ 把 E^2 一对一地映射到 E^3 的一个平面上. 反过来，若 $\boldsymbol{f}$ 是到一个平面上的一一映射，则如上一个问题那样 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 是线性无关的. 我们把它留给读者证明. 于是映射是一一地到一平面上的，当且仅当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 是线性无关的.

剩下要证明 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 是无关的，当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 2. 假设

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)=a_{11}\boldsymbol{g}_1+a_{21}\boldsymbol{g}_2+a_{31}\boldsymbol{g}_3,\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)=a_{12}\boldsymbol{g}_1+a_{22}\boldsymbol{g}_2+a_{32}\boldsymbol{g}_3.$$

我们知道 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 是线性无关的，当且仅当

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\times\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)=&(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})\boldsymbol{g}_1+(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})\boldsymbol{g}_2\\&+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\boldsymbol{g}_3\neq\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

但是上面这个向量的分量是 $\boldsymbol{f}$ 的矩阵表示

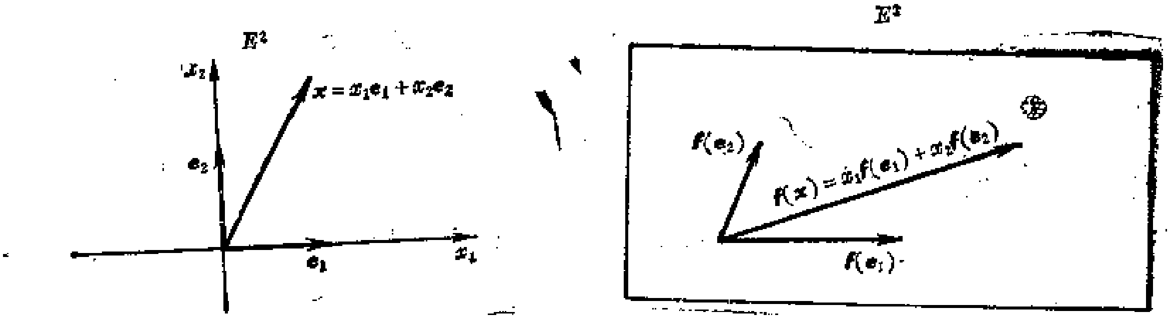


图 7-9

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

的三个 2×2 行列式. 于是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)$ 是线性无关的, 当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的矩阵表示的三个 2×2 子式至少有一个异于 0, 即当且仅当 $\boldsymbol{f}$ 的秩等于 2, 定理得证.

7.5 若向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的分量是 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的线性齐次函数, 证明 $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数.

证: 给定

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right]\boldsymbol{g}_i,$$

则对所有 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+u_n\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+v_n\boldsymbol{e}_n$, 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})&=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(u_j+v_j)\right]\boldsymbol{g}_i=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j\right]\boldsymbol{g}_i+\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j\right]\boldsymbol{g}_i\\&=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

和

$$\boldsymbol{f}(k\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}ku_j\right]\boldsymbol{g}_i=k\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j\right]\boldsymbol{g}_i=k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}).$$

故 $\boldsymbol{f}$ 是线性的, 得证.

2. 连续和极限

7.6 求 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to 0}[(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_1-x_1x_2\boldsymbol{e}_2]$.

解: 因为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_1-x_1x_2\boldsymbol{e}_2$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 连续,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to 0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}),$$

所以

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to 0}[(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_1-x_1x_2\boldsymbol{e}_2]=\boldsymbol{0}.$$

7.7 证明实值函数

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}x_1x_2^2/(x_1^2+x_2^2), & 当\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\\ 0, & 当\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 连续.

证: 我们记

$$x_1=|\boldsymbol{x}|\cos\angle(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1),\quad x_2=|\boldsymbol{x}|\cos\angle(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2)$$

则对于 $|\boldsymbol{x}|<\delta=\varepsilon$,

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})|&=\frac{\big||\boldsymbol{x}|^3\cos\angle(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1)\cos^2\angle(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2)\big|}{|\boldsymbol{x}|^2}\\&\leqslant|\boldsymbol{x}|\,|\cos\angle(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1)|\,|\cos^2\angle(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2)|\\&\leqslant|\boldsymbol{x}|<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{0}$ 连续.

7.8 证明实值函数

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}x_1x_2^2/(x_1^2+x_2^4), & 当\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\\ 0, & 当\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不连续.

证：我们考虑 $\mathbf{0}$ 附近形为 $\boldsymbol{x}=h^2\boldsymbol{e}_1+h\boldsymbol{e}_2$ 的向量，$h\neq 0$. 则 $x_1=h^2$ 和 $x_2=h$，而

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})|=\frac{h^4}{(h^4+h^4)}-0=\frac{1}{2},$$

对于 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，其不小于 ε.

7.9 函数 $\boldsymbol{f}$ 称为在 $\boldsymbol{x}_0$ 有界，若存在纯量 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得对于 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\leqslant M$. 证明若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 有界.

证：因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，任取 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon.$$

因此，利用不等式

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|,$$

当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\leqslant|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|+\varepsilon=M.$$

命题得证.

7.10 若 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，证明 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

证：因为 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，给定 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使得对于去心邻域 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 中的 $\boldsymbol{x}$，有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$. 但在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，所以对于整个邻域 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 中的 $\boldsymbol{x}$，有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$，即 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

7.11 证明 $\boldsymbol{f}=f_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+f_m\boldsymbol{g}_m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，当且仅当每个 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

证：假设 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，则对于 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$，而对于 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，又有

$$\begin{aligned}|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|&=|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|\,|\cos\angle(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\ \boldsymbol{g}_i)|\\&\leqslant|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续. 反过来，假设每个 f_i，$i=1,\ \cdots,\ m$，在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，则对于

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_i,\ i=1,\ \cdots,\ m,\ |f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon/m.$$

因此对于 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta=\min(\delta_1,\cdots,\delta_m)$，我们有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|&=|(f_1(\boldsymbol{x})-f_1(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{g}_1+\cdots+(f_m(\boldsymbol{x})-f_m(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{g}_m|\\&\leqslant|f_1(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|+\cdots+|f_m(\boldsymbol{x})-f_m(\boldsymbol{x}_0)|<m\varepsilon/m=\varepsilon.\end{aligned}$$

命题得证.

7.12 若 $\lim\limits_{\boldsymbol{v}\to\mathbf{0}}\dfrac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|}=\mathbf{0}$，证明 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\boldsymbol{R}(h\boldsymbol{u}_0)}{h}=\mathbf{0}(\boldsymbol{u}_0\neq\mathbf{0})$.

证：因为当 $\boldsymbol{v}\to\mathbf{0}$，$(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v})/|\boldsymbol{v}|)\to\mathbf{0}$，给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 $0<|\boldsymbol{v}|<\delta$，有 $|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v})/|\boldsymbol{v}||=|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v})|/|\boldsymbol{v}|<\varepsilon/|\boldsymbol{u}_0|$. 然而对于 $0<|h\boldsymbol{u}_0|<\delta$ 或 $0<|h|<\delta/|\boldsymbol{u}_0|$，

$$|\boldsymbol{R}(h\boldsymbol{u}_0)/h|=(|\boldsymbol{R}(h\boldsymbol{u}_0)|/|h\boldsymbol{u}_0|)|\boldsymbol{u}_0|<(\varepsilon/|\boldsymbol{u}_0|)|\boldsymbol{u}_0|=\varepsilon.$$

于是当 $h\to 0$，$(\boldsymbol{R}(h\boldsymbol{u}_0)/h)\to\mathbf{0}$.

7.13 若 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，证明 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

证：考虑

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|\\&\leqslant|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|\\&=|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续，由此 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 亦有界，对每个 $\varepsilon>0$，存在 δ_1、δ_2、δ_3 和 $M>0$，使得

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\leqslant M,\quad \text{当 } |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1;$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\frac{\varepsilon}{2|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|},\quad \text{当 } |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2;$$

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad \text{当 } |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_3.$$

则对

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3),$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|<M\frac{\varepsilon}{2M}+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|\frac{\varepsilon}{2|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|}=\varepsilon.$$

于是 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

3. 方向导数，可微函数

7.14 证明实值函数

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases} x_1x_2^2/(x_1^2+x_2^4), & \text{当 } \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 沿每一方向有导数. 注意 f 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不连续，如问题 7.8 所证.

证：设 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2$ 是非零向量，其中 $u_1\neq 0$，

$$D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{0})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{0}+h\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{0})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u_1u_2^2}{(u_1^2+h^2u_2^4)}=\frac{u_2^2}{u_1}.$$

对于 $u_1=0$，即对于 $\boldsymbol{u}=u_2\boldsymbol{e}_2$，有

$$D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{0})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{0}+h\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{0})}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

于是 f 在 $\boldsymbol{0}$ 沿每一个方向有导数. 注意 $D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{0})$ 作为 $\boldsymbol{u}$ 的函数不是线性的. 这与 $\boldsymbol{f}$ 是可微的情况不同，$D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}=d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 沿 $\boldsymbol{u}$ 是线性的.

7.15 求

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1\sin x_2)\boldsymbol{e}_1+(x_2\sin x_1)\boldsymbol{e}_2$$

在 $\boldsymbol{x}_0=(\pi/2)\boldsymbol{e}_1+(\pi/4)\boldsymbol{e}_2$ 沿 $\boldsymbol{u}_0=(1/\sqrt{5})\boldsymbol{e}_1+(2/\sqrt{5})\boldsymbol{e}_2$ 方向的导数.

解：因为 $\boldsymbol{f}$ 的偏导数是连续的，由定理 7.8 得出 $\boldsymbol{f}$ 是可微的. 于是我们可以利用方程 (7.2)，得到

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})&=d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u})=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_2}u_2\\ &=[(\sin x_2)\boldsymbol{e}_1+(x_2\cos x_1)\boldsymbol{e}_2]u_1+[(x_1\cos x_2)\boldsymbol{e}_1+(\sin x_1)\boldsymbol{e}_2]u_2.\end{aligned}$$

所以

$$D_{\boldsymbol{u}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\right)\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1+\pi}{\sqrt{10}}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e}_2.$$

7.16 对于下面 E^2 上到 E^3 的每个函数确定 (i) $\boldsymbol{f}$ 在其上连续可微的集合 V，(ii) $\boldsymbol{f}$ 在 V 上的微分，(iii) $d\boldsymbol{f}$ 在 V 上的秩.

(a) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1\cos x_2)\boldsymbol{g}_1+(x_1\sin x_2)\boldsymbol{g}_2+x_2\boldsymbol{g}_3$;

(b) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=|x_1+x_2|\boldsymbol{g}_1+|x_1-x_2|\boldsymbol{g}_2+\boldsymbol{g}_3$.

解：(a) (i) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1\cos x_2)\boldsymbol{g}_1+(x_1\sin x_2)\boldsymbol{g}_2+x_2\boldsymbol{g}_3$ 对所有 $\boldsymbol{x}$ 有连续导数，所以 $\boldsymbol{f}$ 在整个 E^2 上连续可微.

(ii) $\boldsymbol{f}$ 的微分是

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{f} &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}dx_2 \\
&= [(\cos x_2)\boldsymbol{g}_1 + (\sin x_2)\boldsymbol{g}_2]dx_1 + [(-x_1\sin x_2)\boldsymbol{g}_1 + (x_1\cos x_2)\boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_3]dx_2.
\end{aligned}
$$

(iii) 微分的矩阵是

$$
\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_x = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1\sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1\cos x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

因为

$$
\left[\begin{vmatrix} \cos x_2 & -x_1\sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1\cos x_2 \end{vmatrix}\right]^2 + \left[\begin{vmatrix} \cos x_2 & -x_1\sin x_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]^2 + \left[\begin{vmatrix} \sin x_2 & x_1\cos x_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]^2
$$

$$
= x_1^2 + \cos^2 x_2 + \sin^2 x_2 = x_1^2 + 1 > 0,
$$

因此，对于 E^2 中所有的 $\boldsymbol{x}$，$d\boldsymbol{f}$ 的秩都是 2.

(b) (i) 倘若 $x_1+x_2\neq 0$ 和 $x_1-x_2\neq 0$，函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |x_1+x_2|\boldsymbol{g}_1 + |x_1-x_2|\boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_3 \text{ 有连续的导数.}$$

即 $\boldsymbol{f}$ 在下述四个开集中是连续可微的.

$$
\begin{aligned}
A &= \{x_1+x_2>0 \text{ 和 } x_1-x_2>0\}, \\
B &= \{x_1+x_2<0 \text{ 和 } x_1-x_2>0\}, \\
C &= \{x_1+x_2<0 \text{ 和 } x_1-x_2<0\}, \\
D &= \{x_1+x_2>0 \text{ 和 } x_1-x_2<0\}.
\end{aligned}
$$

如图 7-10 所示.

(ii) 对于 A 中的 $\boldsymbol{x}$，$|x_1+x_2| = x_1+x_2$，$|x_1-x_2| = x_1-x_2$，微分是

$$d\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)dx_1 + (\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2)dx_2;$$

对于 B 中的 $\boldsymbol{x}$，

$$|x_1+x_2| = -x_1-x_2,\quad |x_1-x_2| = x_1-x_2,$$

微分是 $$d\boldsymbol{f} = (-\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)dx_1 - (\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)dx_2;$$

对于 C 中的 $\boldsymbol{x}$，

$$|x_1+x_2| = -x_1-x_2,\quad |x_1-x_2| = -x_1+x_2,$$

微分是 $$d\boldsymbol{f} = -(\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)dx_1 + (-\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)dx_2;$$

对于 D 中的 $\boldsymbol{x}$，

$$|x_1+x_2| = x_1+x_2,\quad |x_1-x_2| = -x_1+x_2,$$

微分是 $$d\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2)dx_1 + (\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2)dx_2.$$

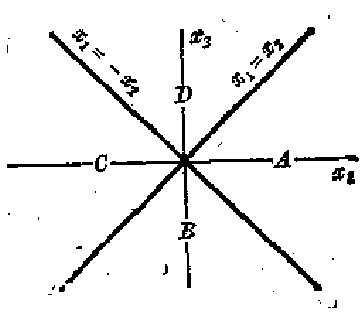


图 7-10

(iii) $d\boldsymbol{f}$ 的矩阵表示是：

$$
\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}
\underset{B}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}
\underset{C}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}
\underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.
$$

在每一个集合上，$d\boldsymbol{f}$ 的秩等于 2.

7.17 设 $\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{g}_1 + f_2\boldsymbol{g}_2 + f_3\boldsymbol{g}_3$ 是从 E^2 到 E^3 的向量函数，它在 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ 可微.

证明 $d\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的秩等于 2，当且仅当

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}\neq\boldsymbol{0}.$$

证：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\boldsymbol{g}_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\boldsymbol{g}_2+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\boldsymbol{g}_3\right)\times\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\boldsymbol{g}_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\boldsymbol{g}_2+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\boldsymbol{g}_3\right)\\&=\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{g}_1+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{g}_2\\&\quad+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{g}_3.\end{aligned}$$

考察 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}$ 的分量，不计符号时，正好是矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

的三个 2×2 子式．因此 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}\neq\boldsymbol{0}$，当且仅当有一个 2×2 子式不为零，即当且仅当 $d\boldsymbol{f}$ 的秩等于 2.

7.18 证明若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，则存在 $M\geqslant 0$，使得对于所有 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$，

$$\frac{|d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{v}|}\leqslant M.$$

证：从方程(7.2)，

$$\begin{aligned}\frac{|d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{v}|}&=\left|v_1\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)+\cdots+v_n\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right|\Big/|\boldsymbol{v}|\\&\leqslant\left|\cos\angle(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_1)\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)+\cdots+\cos\angle(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{e}_n)\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right|\\&\leqslant\left|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\right|+\cdots+\left|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right|\leqslant M.\end{aligned}$$

问题得证.

7.19 证明若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

证：因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}).$$

令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),$$

当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ 时，
$$(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|)\to\boldsymbol{0}.$$

因此，对于 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0$，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|&=|d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)|\\&\leqslant\frac{|d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|+\frac{|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\\&\leqslant(M_1+M_2)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|.\end{aligned}$$

这里我们利用了上一问题的结果，且因为，当 $x\to x_0$ 时，$(R(x_0,\ x-x_0)/|x-x_0|)\to 0$，$R(x_0,\ x-x_0)/|x-x_0|$ 在 x_0 的一去心邻域也是有界的，因此对于

$$0<|x-x_0|<\varepsilon/(M_1+M_2),\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续。

7.20 证明定理 7.7(iii)：若 f 和 g 在 x 可微，则 $f\cdot g$ 在 x 可微，且

$$d(f\cdot g)=f\cdot dg+(df)\cdot g.$$

证：考虑 v 的函数

$$\begin{aligned}R(x,\ v)&=f(x+v)\cdot g(x+v)-f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot dg(x)(v)\\&\quad -df(x)(v)\cdot g(x)\\&=f(x+v)\cdot[g(x+v)-g(x)-dg(x)(v)]\\&\quad +[f(x+v)-f(x)-df(x)(v)]\cdot g(x)\\&\quad +[f(x+v)-f(x)]\cdot dg(x)(v).\end{aligned}$$

因为 f 和 g 是可微的，

$$f(x+v)=f(x)+df(x)(v)+R_1(x,\ v),$$
$$g(x+v)=g(x)+dg(x)(v)+R_2(x,\ v),$$

这里

$$\lim_{v\to 0}\frac{|R_1(x,\ v)|}{|v|}=\lim_{v\to 0}\frac{|R_2(x,\ v)|}{|v|}=0.$$

于是代入上式，有

$$\begin{aligned}\frac{|R(x,\ v)|}{|v|}&=|f(x+v)\cdot R_2(x,\ v)+g(x)\cdot R_1(x,\ v)\\&\quad +[f(x+v)-f(x)]\cdot dg(x)(v)|/|v|\\&\leqslant |f(x+v)|\frac{|R_2(x,v)|}{|v|}+|g(x)|\frac{|R_1(x,\ v)|}{|v|}\\&\quad +|f(x+v)-f(x)|\frac{|dg(x)(v)|}{|v|}.\end{aligned}$$

因为 f 在 x 连续，$f(x+v)$ 关于 v 在 0 的一个邻域中是有界的，且据问题 7.18，$|dg(x)(v)/|v||$，当 $v\neq 0$ 时，是有界的。还有，如上所述

$$\lim_{v\to 0}\frac{|R_1(x,\ v)|}{|v|}=0 \quad 和 \quad \lim_{v\to 0}\frac{|R_2(x,\ v)|}{|v|}=0.$$

又因为 f 在 x 连续，故

$$\lim_{v\to 0}|f(x+v)-f(x)|=0.$$

于是 $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{|R(x,\ v)|}{|v|}=0$。故

$$\begin{aligned}f(x+v)\cdot g(x+v)&=f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot dg(x)(v)\\&\quad +df(x)(v)\cdot g(x)+R(x,\ v),\end{aligned}$$

这里 $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{R(x,\ v)}{|v|}=0$，因此 $f\cdot g$ 在 x 可微且

$$d(f\cdot g)=f\cdot dg+(df)\cdot g.$$

定理得证。

7.21 **中值定理** 设 f 是 E 中一开集上的 $\boldsymbol{x}$ 的实值函数，并设 f 在直线 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 的每一点可微，如图 7-11 所示．证明存在 t_0，$0<t_0<1$，使得

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}_0)=f(\boldsymbol{x}_0)+D_{\boldsymbol{v}_0}f(\boldsymbol{x}_0+t_0\boldsymbol{v}_0).$$

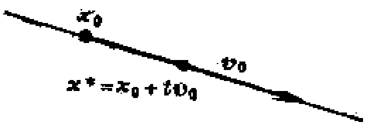


图 7-11

证：我们想证明函数

$$F(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0)$$

在每个 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 处有导数，然后应用单实变函数的中值定理．因为 f 沿 $\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0$ 可微，

$$df(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0)(\boldsymbol{v})=D_{\boldsymbol{v}_0}f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0),$$

它关于 $\boldsymbol{v}$ 是线性的．于是

$$\begin{aligned}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}&=\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0)-f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0)}{h}\\&=\frac{D_{h\boldsymbol{v}_0}f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v}_0)+R(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0,\ h\boldsymbol{v}_0)}{h}\\&=D_{\boldsymbol{v}_0}f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0)+\frac{R(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0,\ h\boldsymbol{v}_0)}{h},\end{aligned}$$

这里 $\lim\limits_{h\boldsymbol{v}_0\to 0}\dfrac{R(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0,\ h\boldsymbol{v}_0)}{|h\boldsymbol{v}_0|}=0$，所以由问题 7.12，

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0,\ h\boldsymbol{v}_0)}{h}=0.$$

因此，在每个 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 处 $F'(t)$ 存在，并为

$$F'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=D_{\boldsymbol{v}_0}f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}_0).$$

由单实变量的实值函数的中值定理得出，存在 t_0，$0<t_0<1$，使得 $F(1)=F(0)+F'(t_0)$ 或

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}_0)=f(\boldsymbol{x}_0)+D_{\boldsymbol{v}_0}f(\boldsymbol{x}_0+t_0\boldsymbol{v}_0).$$

4. 复合函数，链法则

7.22 设

$$\boldsymbol{y}=(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_1+x_1x_2^2\boldsymbol{e}_2,\qquad \boldsymbol{x}=(u_1\cos u_2)\boldsymbol{e}_1+(u_1\sin u_2)\boldsymbol{e}_2.$$

求：(a) 作为 $\boldsymbol{u}$ 的函数的偏导数 $\partial y_1/\partial u_1$，$\partial y_2/\partial u_1$，$\partial y_1/\partial u_2$ 和 $\partial y_2/\partial u_2$

(b) 作为 $\boldsymbol{u}$ 的函数的微分 $d\boldsymbol{y}$．

解： (a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial u_1}&=\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}+\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1}=2x_1\cos u_2+2x_2\sin u_2\\&=2u_1\cos^2 u_2+2u_1\sin^2 u_2=2u_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_2}{\partial u_1}&=\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}+\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1}=x_2^2\cos u_2+2x_1x_2\sin u_2\\&=u_1^2\sin^2 u_2\cos u_2+2u_1^2\cos u_2\sin^2 u_2\\&=3u_1^2\cos u_2\sin^2 u_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial u_2}&=\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}+\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2}=-2x_1u_1\sin u_2+2x_2u_1\cos u_2\\&=-2u_1^2\cos u_2\sin u_2+2u_1^2\cos u_2\sin u_2=0;\end{aligned}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial u_2}=\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}+\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2}=-x_2^2u_1\sin u_2+2x_1x_2u_1\cos u_2$$
$$=-u_1^3\sin^3 u_2+2u_1^3\cos^2 u_2\sin u_2$$
$$=u_1^3(\sin u_2)(2\cos^2 u_2-\sin^2 u_2).$$

另一种方法:

$$\boldsymbol{y}=(u_1^2\cos^2 u_2+u_1^2\sin^2 u_2)\boldsymbol{e}_1+(u_1^3\cos u_2\sin^2 u_2)\boldsymbol{e}_2$$
$$=u_1^2\boldsymbol{e}_1+(u_1^3\cos u_2\sin^2 u_2)\boldsymbol{e}_2,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u_1}=2u_1,\quad \frac{\partial y_2}{\partial u_1}=3u_1^2\cos u_2\sin^2 u_2,\quad \frac{\partial y_1}{\partial u_2}=0,$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial u_2}=u_1^3(2\cos^2 u_2\sin u_2-\sin^3 u_2)=u_1^3(\sin u_2)(2\cos^2 u_2-\sin^2 u_2).$$

(b)
$$d\boldsymbol{y}=\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u_2}du_2$$
$$=\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_2\right)du_1+\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2\right)du_2$$
$$=(2u_1\boldsymbol{e}_1+(3u_1^2\cos u_2\sin^2 u_2)\boldsymbol{e}_2)du_1$$
$$+u_1^3\sin u_2(2\cos^2 u_2-\sin^2 u_2)\boldsymbol{e}_2\,du_2.$$

7.23 若 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 是从 E 到 E 的可微映射, 证明复合映射 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 矩阵是 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵与 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的Jacobi 矩阵的乘积, 即

$$\frac{\partial(w_1\cdots w_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}=\frac{\partial(w_1\cdots w_n)}{\partial(y_1\cdots y_n)}\cdot\frac{\partial(y_1\cdots y_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}.$$

证: 我们知道矩阵的积的行列式是行列式的积, 即若

$$(c_{ij})=(a_{ij})(b_{ij}),\quad 则\quad \det(c_{ij})=\det(a_{ij})\det(b_{ij}).$$

因为复合函数 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵是

$$\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)=\left(\frac{\partial w_i}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right),$$

因此
$$\det\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)=\det\left(\frac{\partial w_i}{\partial y_j}\right)\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right).$$

问题得证.

7.24 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是从 E^2 到 E^3 的 C^1 类映射, 其使得 $d\boldsymbol{f}$ 的秩在所有 $\boldsymbol{x}$ 等于 2, 并设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 是 E^2 中的 C^1 类正则曲线. 证明 (a) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 是 E^3 中的 C^1 类正则曲线;

(b)
$$\left|\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right|^2=\left|\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_1}\right|^2\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+2\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_2}\right)\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}+\left|\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_2}\right|^2\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2.$$

证: (a) 由定理 7.10, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 属于 C^1 类, 且

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}=D_{dx/dt}\boldsymbol{f}.$$

剩下要证明 $d\boldsymbol{y}/dt\neq\boldsymbol{0}$, 因为 $d\boldsymbol{f}$ 的秩等于 2, 由定理 7.2(i), 在每个 t, $\boldsymbol{v}$ 的线性函数 $D_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f}$ 是一一的, 所以由 $d\boldsymbol{x}/dt\neq 0$, 有 $d\boldsymbol{y}/dt=D_{dx/dt}\boldsymbol{f}\neq 0$.

(b) 由以上所述

$$\left|\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right|^2=\left(\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right)=\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2.$$

问题得证.

7.25 证明定理 7.10: 若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微及 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 可微,则复合函数 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微,且其微分 $\boldsymbol{H}_x=\boldsymbol{M}_{f(x)}\circ\boldsymbol{L}_x$,其中 $\boldsymbol{L}_x$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的微分和 $\boldsymbol{M}_{f(x)}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 在 $f(\boldsymbol{x})$ 的微分.

证: 要求证明的是

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{M}_{f(x)}\circ\boldsymbol{L}_x)(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}(x,\ \boldsymbol{v}),$$

其中 $\lim\limits_{v\to0}\frac{\boldsymbol{R}(x,\ \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|}=\boldsymbol{0}$,或等价地

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{M}_{f(x)}(\boldsymbol{L}_x(\boldsymbol{v}))+R(x,\ \boldsymbol{v}),$$

其中 $\lim\limits_{v\to0}\frac{R(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|}=\boldsymbol{0}$. 现在,因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{L}_x(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v}),$$

其中 $\lim\limits_{v\to0}\frac{\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|}=\boldsymbol{0}$,还因为 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 可微,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{M}_{f(x)}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u}),$$

其中 $\lim\limits_{u\to0}\frac{\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{u}|}=\boldsymbol{0}$. 现在设

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(x+\boldsymbol{v})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}_x(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v}),$$

代入上式并利用 $\boldsymbol{M}$ 是线性的,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}))&=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(x))+\boldsymbol{M}_{f(x)}(\boldsymbol{L}_x(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}_1(x,\ \boldsymbol{v}))+\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})\\&=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{M}_{f(x)}(\boldsymbol{L}_x(\boldsymbol{v}))+\boldsymbol{M}_{f(x)}(\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v}))+\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u}).\end{aligned}$$

于是剩下的只要证明

$$\lim_{v\to0}\frac{|\boldsymbol{M}_{f(x)}(\boldsymbol{R}_1(x,\ \boldsymbol{v}))+\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(x),\ \boldsymbol{u})|}{|\boldsymbol{v}|}=0.$$

由问题 7.18,存在常数 K 使得

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{M}_{f(x)}(\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u}))|\\&\leqslant|K|\boldsymbol{R}_1(x,\ \boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})|\\&\leqslant K|\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})|+K|\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})|.\end{aligned}$$

但因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微, $\lim\limits_{v\to0}\frac{|\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{v}|}=0$. 另一方面, 当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$, 在其它情形

$$\frac{|\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{|\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})|}{|\boldsymbol{u}|}\frac{|\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

由问题 7.18 和 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微, 有 $\lim\limits_{v\to0}\frac{|\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{v}|}=0$, 得

$$\frac{|\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{|\boldsymbol{L}_x(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{v}|},$$

对 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{0}$ 的某一邻域中, 是有界的. 因为当 $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{0}$, 且 $\frac{|\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{v}|}$ 有界, 以及由于 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 可微, 有 $\lim\limits_{u\to0}\frac{|\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})|}{|\boldsymbol{u}|}=0$,

$$\lim_{v\to0}\frac{|\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})|}{|\boldsymbol{v}|}=\lim_{u\to0}\frac{|\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u})|}{|\boldsymbol{v}|}=0.$$

综合以上所述，可得

$$\lim_{v\to 0}\frac{M_{f(x)}(R_1(x,\ v))+R_2(f(x),\ u)}{|v|}=0.$$

定理得证。

5. C^m 类函数，反函数定理

7.26 求

$$f(x)=(x_1^2+x_2^2)g_1+x_1e^{x_2}g_2+x_2e^{x_1}g_3$$

在点 $x_0=e_1-e_2$ 的下列导数：(a) $\partial^2 f/\partial x_1\partial x_2$，(b) $\partial^3 f/\partial x_1^2\partial x_2$，(c) 沿方向 $u_0=(e_1+e_2)$ 和 $v_0=(e_1-2e_2)$ 的 $D^2_{v_0u_0}f$.

解：(a)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]=\frac{\partial}{\partial x_1}\ [2x_2g_1+x_1e^{x_2}g_2+e^{x_1}g_3]$$

$$=e^{x_2}g_2+e^{x_1}g_3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_0)=e^{-1}g_2+eg_3.$$

(b) $$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)=e^{x_1}g_3;\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}(x_0)=eg_3.$$

(c) $$D^2_{vu}f(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\ u_1v_1+\frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_2}(u_1v_2+u_2v_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\ u_2v_2$$

$$=(2g_1+x_2e^{x_1}g_3)u_1v_1+(e^{x_2}g_2+e^{x_1}g_3)(u_1v_2+u_2v_1)$$

$$+(2g_1+x_1e^{x_2}g_2)u_2v_2.$$

$$D^2_{v_0u_0}f(x_0)=(2g_1-eg_3)+(e^{-1}g_2+eg_3)(-1)+(2g_1+e^{-1}g_2)(-2)$$

$$=-(2g_1+3e^{-1}g_2+2eg_3).$$

7.27 设 $w=g(y_1,\ y_2),\ y_1=y_1(x_1,\ x_2),\ y_2=y_2(x_1,\ x_2).$

证明

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y_1\partial y_2}\left[\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right]$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial y_1}\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial y_2}\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\partial x_2}.$$

证：

$$\frac{\partial w}{\partial x_2}=\frac{\partial w}{\partial y_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial y_2}\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2}.$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial y_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial y_2}\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial y_1}\right)\right]\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial y_1}\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\partial x_2}+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial y_2}\right)\right]\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial y_2}\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$=\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial y_2\partial y_1}\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right]\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial y_1}\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y_1\partial y_2}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right]\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial y_2}\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\partial x_2}.$$

问题得证.

7.28 证明函数

$$f(x)=(e^{x_1}\cos x_2)e_1+(e^{x_1}\sin x_2)e_2$$

在 E^2 上满足反函数定理的条件，但在 E^2 上不是一一的.

证. 显然$\boldsymbol{f}$是E^2上的C^1类函数,而且对于所有$\boldsymbol{x}$,

$$J(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\begin{vmatrix} e^{x_1}\cos x_2 & -e^{x_1}\sin x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 & e^{x_1}\cos x_2 \end{vmatrix}=e^{2x_1}\neq 0.$$

因为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+2\pi\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,这函数在$E^2$上不是一一的.

7.29 假设映射$y_1=f_1(x_1, x_2)$, $y_2=f_2(x_1, x_2)$满足反函数定理条件,并假设其逆映射为$x_1=F_1(y_1, y_2)$, $x_2=F_2(y_1, y_2)$,若$J=\partial(f_1f_2)/\partial(x_1, x_2)$,证明

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}=\frac{1}{J}\frac{\partial f_2}{\partial x_2},\quad \frac{\partial F_2}{\partial y_1}=-\frac{1}{J}\frac{\partial f_2}{\partial x_1},\quad \frac{\partial F_1}{\partial y_2}=-\frac{1}{J}\frac{\partial f_1}{\partial x_2},\quad \frac{\partial F_2}{\partial y_2}=\frac{1}{J}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}.$$

证: 由链法则

(i) $1=\dfrac{\partial y_1}{\partial y_1}=\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}$;

(ii) $0=\dfrac{\partial y_1}{\partial y_2}=\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}$;

(iii) $0=\dfrac{\partial y_2}{\partial y_1}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}$;

(iv) $1=\dfrac{\partial y_2}{\partial y_2}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}$.

由第一和第三个方程解出$\partial F_1/\partial y_1$和$\partial F_2/\partial y_1$,得:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}=\frac{1}{J}\frac{\partial f_2}{\partial x_2},\quad \frac{\partial F_2}{\partial y_2}=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & 1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

类似地求出$\partial F_1/\partial y_2$和$\partial F_2/\partial y_2$. 问题证毕.

§7.3 补 充 题

7.30 证明$\boldsymbol{y}=\cos x_1\boldsymbol{g}_1+\sin x_1\boldsymbol{g}_2+x_2\boldsymbol{g}_3$把带形$0\leqslant x_1<2\pi$, $-\infty<x_2<\infty$,一一地映射到以y_3轴为轴、半径为1的圆柱面上.

7.31 证明

$$\boldsymbol{y}=\sinh x_1\sin x_2\boldsymbol{g}_1+\sinh x_1\cos x_2\boldsymbol{g}_2+\sinh x_1\boldsymbol{g}_3$$

把半带形$x_1\geqslant 0$, $0<x_2<2\pi$映射到以y_3轴为轴的圆锥上.

7.32 证明线性映射

$$y_1=2x_1+x_2-x_3,\quad y_2=x_1-x_2-2x_3,\quad y_3=3x_1+3x_2$$

的秩等于2,并确定它把E^3映射到哪个平面上?

7.33 证明定理7.1(ii): E^3到E^3的线性映射把E^3映射到E^3中一平面上当且仅当$\boldsymbol{f}$的秩等于2.

7.34 证明定理7.2(ii): E^2到E^3的线性映射把E^2映射到E^3中一直线上,当且仅当$\boldsymbol{f}$的秩等于1.

7.35 证明 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}x_1\sin 1/x_2+x_2\sin 1/x_1, & \text{当 } x_1x_2\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x_1x_2=0\end{cases}$ 在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 连续.

7.36 若 $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数,证明存在 $M>0$,使得对于所有 $\boldsymbol{x}$,有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|<M|\boldsymbol{x}|$.

7.37 若 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 连续,证明 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 连续.

7.38 若 $\boldsymbol{f}$ 在一紧致集 V 上连续,证明存在 $M\geqslant 0$,使得对 V 中的 $\boldsymbol{x}$, $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\leqslant M$.

7.39 证明 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}$, 当且仅当 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f_i(\boldsymbol{x})=L_i$, $i=1, \cdots, m$. 这里

$$\boldsymbol{f}=f_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+f_m\boldsymbol{g}_m \quad \text{和} \quad \boldsymbol{L}=L_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+L_m\boldsymbol{g}_m.$$

7.40 若 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}$ 和 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{M}$, 证明 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}$.

7.41 若 $\boldsymbol{f}$ 是 E 上一线性函数,证明 $\boldsymbol{f}$ 在 E 上连续.

7.42 求 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=x_1x_2\boldsymbol{e}_1+(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_2$ 在 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 沿 $\boldsymbol{u}_0=(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$ 方向的导数.
答: 0.

7.43 确定(a)使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1^2+x_2^2)^{-1}\boldsymbol{e}_1+(x_1^2-x_2^2)^{-1}\boldsymbol{e}_2$ 连续可微的点 (x_1, x_2) 的集合. (b) $\boldsymbol{f}$ 的 Jacobi. 答: (a) $x_1\neq\pm x_2$, (b) $-8x_1x_2(x_1^2+x_2^2)^{-2}(x_1^2-x_2^2)^{-2}$.

7.44 确定使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1\sin x_2\cos x_3)\boldsymbol{e}_1+(x_1\sin x_2\sin x_3)\boldsymbol{e}_2+(x_1\cos x_2)\boldsymbol{e}_3$$

的秩等于 3 的点 (x_1, x_2, x_3) 的集合. 答: $x_1^2\sin x_2\neq 0$.

7.45 求 E^3 中曲面

$$\boldsymbol{y}=(x_1^2+x_2^2)\boldsymbol{e}_1-x_1x_2^2\boldsymbol{e}_2+x_2x_1^2\boldsymbol{e}_3$$

在对应于 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 的点的切面方程.
答: $y_1=2+2v_1+2v_2$, $y_2=-1-v_1-2v_2$, $y_3=1+2v_1+v_2$.

7.46 证明 E^3 上的函数 $\boldsymbol{f}$ 的 Jacobi 是混合积

$$J(\boldsymbol{f})=\left[\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_1}\ \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_2}\ \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_3}\right].$$

7.47 若 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微,证明:

(a) $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微,且 $d(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})=d\boldsymbol{f}+d\boldsymbol{g}$.

(b) $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微,且 $d(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(d\boldsymbol{f})\times\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}\times d\boldsymbol{g}$.

7.48 设:

$$\begin{cases}W_1=y_1+y_2+y_3,\\ W_2=y_1y_2,\\ W_3=y_1y_3\end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases}y_1=x_1x_2x_3,\\ y_2=e^{x_2},\\ y_3=e^{x_1},\end{cases} \quad \text{确定 } \frac{\partial(W_1W_2W_3)}{\partial(x_1x_2x_3)}.$$

答: $x_1x_2^2x_3^2e^{x_2+x_1}(x_1x_2x_3-e^{x_1}-e^{x_2})$.

7.49 求 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1+x_2)^2\boldsymbol{e}_1+x_1\sin x_2\boldsymbol{e}_2$, 在 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{e}_1+\pi\boldsymbol{e}_2$ 的下列导数:

(a) $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{f}}{\partial x_1\partial x_2}$; (b) $\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_1\partial x_2^2}$; (c) $D_{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{u}_0}\boldsymbol{f}$; $\boldsymbol{u}_0=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)$ 和 $\boldsymbol{v}_0=(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$.

答: (a) $2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, (b) $\mathbf{0}$, (c) $-\boldsymbol{e}_2$.

7.50 若 $\boldsymbol{W}=(y_1+y_2)\boldsymbol{e}_1+e^{y_1+y_2}\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{y}=x_1x_2^2\boldsymbol{e}_1+x_1^2x_2\boldsymbol{e}_2$, 利用链法则求 $\partial^2 w/\partial x_1\partial x_2$.
答: $(2x_2+2x_1)\boldsymbol{e}_1+e^{y_1+y_2}[(x_1^2+2x_1x_2)(x_2^2+2x_1x_2)+(2x_2+2x_1)]\boldsymbol{e}_2$.

7.51 证明 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1^2-x_2^2)\boldsymbol{e}_1+x_1x_2\boldsymbol{e}_2$ 对除 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 以外的所有 $\boldsymbol{x}$ 满足反函数定理的条件,但在这个集合上它不是一一的.

7.52 证明函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{x_1}{1+x_1+x_2+x_3}\boldsymbol{g}_1+\frac{x_2}{1+x_1+x_2+x_3}\boldsymbol{g}_2+\frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}\boldsymbol{g}_3$$

对 E^3 中所有使 $1+x_1+x_2+x_3\neq 0$ 的 $\boldsymbol{x}$ 满足反函数定理的条件. 证明 $\boldsymbol{f}$ 在上面限定的地方是一一的, 并求 $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x})$ 的显式.

答: $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x})=\dfrac{x_1}{1-x_1-x_2-x_3}\boldsymbol{g}_1+\dfrac{x_2}{1-x_1-x_2-x_3}\boldsymbol{g}_2+\dfrac{x_3}{1-x_1-x_2-x_3}\boldsymbol{g}_3$.

7.53 若 $\boldsymbol{f}$ 在 E 中一开集 V 上满足反函数定理的条件, 证明 $J(\boldsymbol{f}^{-1})J(\boldsymbol{f})=1$, 这里 $\boldsymbol{f}$ 是一一的.

7.54 求 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(x_1\sin x_2)\boldsymbol{e}_1+(x_2\cos x_1)\boldsymbol{e}_2$ 关于 $\boldsymbol{x}_0=\pi\boldsymbol{e}_2$ 的展式的前三项.

答: $\pi\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2(x_2-\pi)-\dfrac{1}{2}\pi\boldsymbol{e}_2x_1^2-\boldsymbol{e}_1x_1(x_2-\pi)$.

第八章 曲面概念

§8.1 基本内容

1. 正则参数表示

直观上我们认为曲面是空间中一个点集，它在自己的每个点的一个邻域范围内类似于平面的一个部分。如果曲面是平面一点集到 E^3 中的足够正则的映射的象，那么情况就正是这样。因为要应用微积分的方法，我们假定映射至少是 C^1 类的。还有，为了保证曲面在每一点有切平面，我们假定映射的 Jacobi 矩阵的秩在每一点都是 2，于是我们作如下定义：

E^3 中点集 S 的 $C^m(m\geqslant 1)$ 类正则参数表示是 uv 平面中一开集 U 到 S 上的映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(u, v)$，且

(i) $\boldsymbol{f}$ 在 U 中是 C^m 类的；

(ii) 若 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 是 E^3 中一个基，

$$\boldsymbol{f}(u, v)=f_1(u, v)\boldsymbol{e}_1+f_2(u, v)\boldsymbol{e}_2+f_3(u, v)\boldsymbol{e}_3,$$

则对 U 中所有 (u, v)，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v}\end{pmatrix}=2.$$

我们知道，若 $\boldsymbol{f}$ 的 m 与 m 以下各阶偏导数在 U 中连续，则 $\boldsymbol{f}$ 在 U 中是 C^m 类的。我们还知道矩阵的秩是它的最大非零子式的阶数。故上面的矩阵的秩是 2 当且仅当它至少有一个 2×2 子式异于 0。

和曲线的情况一样，称变量 u 和 v 为参数。参数表示记为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，它的偏导数为

$$\boldsymbol{x}_u=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u},\quad \boldsymbol{x}_v=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v},\quad \boldsymbol{x}_{uu}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^2},\quad \boldsymbol{x}_{uv}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial v\,\partial u},\ \text{等等}.$$

注意，严格地说，参数表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是映射。但有时把映射和它的象（E^3 中的点集）等同起来。于是当 P 是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 的象上一点时，我们说 P 是参数表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 上一点，或者当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 的象是 S 的一个子集时，我们说参数表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 包含在 E^3 的一点集 S 中。

现在假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是定义在 U 上的 S 的正则参数表示，如图 8-1 所示。注意 U 中坐标直线 $v=v_0$ 的象是 S 上的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v_0)$，其中 u 是参数。这曲线称为 u 参数曲线 $v=v_0$，类似地，坐标直线 $u=u_0$ 的象是 S 上的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u_0, v)$，称为 v 参数曲线 $u=u_0$。于是参数表示用两族曲线覆盖了 S。它们分别是 $v=$常数和 $u=$常数的坐标直线的象。

我们知道，$\boldsymbol{x}_u(u_0, v_0)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在 (u_0, v_0) 沿 u 轴方向的导数。所以 $\boldsymbol{x}_u(u_0, v_0)$ 是与 u 参数

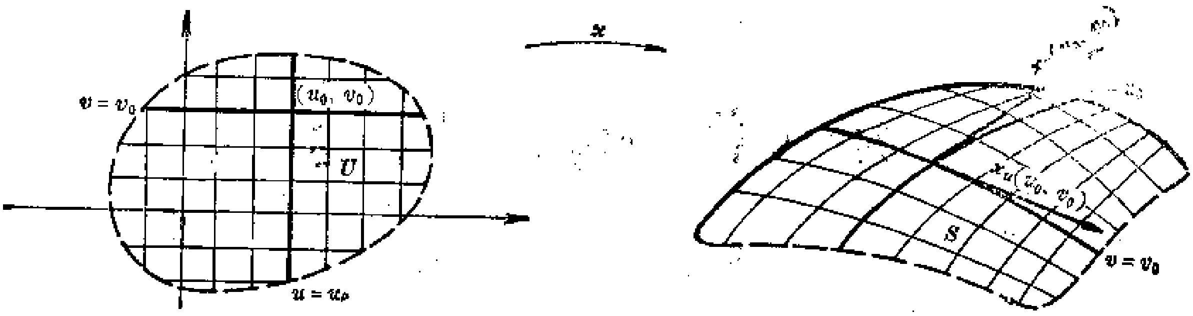


图 8-1

曲线在 $\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ 相切而指向 u 增加方向的向量. 类似地, $\boldsymbol{x}_v(u_0, v_0)$ 是与 v 参数曲线在 $\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ 相切而指向 v 增加方向的向量.

最后我们注意向量积

$$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_1}{\partial v} \\ \boldsymbol{e}_2 & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} \\ \boldsymbol{e}_3 & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}-\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}-\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$$+\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}-\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\boldsymbol{e}_3$$

的三个分量与 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 矩阵的 2×2 子式至多相差一个符号. 所以 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 矩阵的秩是 2, 当且仅当 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq\mathbf{0}$. 于是开集 U 到 S 上的映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 S 的 C^m 类正则参数表示, 当且仅当

(i) $\boldsymbol{x}$ 在 U 上属于 $C^m(m\geqslant1)$ 类;

(ii) $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq0$, 对于 U 中所有 (u, v).

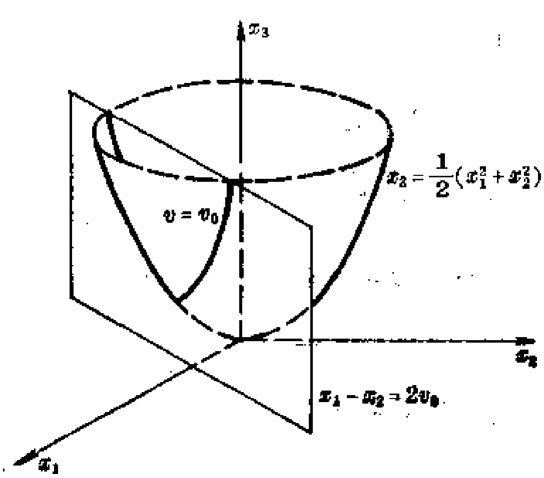


图 8-2

例 8.1 (a) 方程

$$\boldsymbol{x}=(u+v)\boldsymbol{e}_1+(u-v)\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$$

定义一个从 uv 平面到椭圆抛物面

$$x_3=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

上的映射, 如图 8-2 所示. 显然, $\boldsymbol{x}$ 有所有各阶连续偏导数, 而且对于所有 (u, v),

$$|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|=\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & 1 & 1 \\ \boldsymbol{e}_2 & 1 & -1 \\ \boldsymbol{e}_3 & 2u & 2v \end{vmatrix}\right|=[4+8(u^2+v^2)]^{\frac{1}{2}}\neq0.$$

于是 $\boldsymbol{x}$ 是这抛物面的 C^∞ 类正则参数表示. 从 $\boldsymbol{x}$ 的分量 $x_1=u+v_0$, $x_2=u-v_0$ 消去 u, 求得 u 参数曲线 $v=v_0$ 是抛物面与垂直平面 $x_1-x_2=2v_0$ 的交. 类似地, v 参数曲线 $u=u_0$ 是抛物面与垂直平面 $x_1+x_2=2u_0$ 的交.

(b) 我们知道(见问题 7.1)

$$\boldsymbol{x}=(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2+(\cos\phi)\boldsymbol{e}_3.$$

定义一个从 $\theta\phi$ 平面到单位球面 $|\boldsymbol{x}|=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 上的映射,而且 $\boldsymbol{x}$ 有所有各阶偏导数。但是注意这映射沿坐标直线 $\phi=\pm\pi n$, $n=0, 1, \cdots$, 不是正则的,这里

$$|\boldsymbol{x}_\theta\times\boldsymbol{x}_\phi|=\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi\\ \boldsymbol{e}_2 & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi\\ \boldsymbol{e}_3 & 0 & -\sin\phi\end{vmatrix}\right|$$
$$=|(-\cos\theta\sin^2\phi)\boldsymbol{e}_1-(\sin\theta\sin^2\phi)\boldsymbol{e}_2-(\sin\phi\cos\phi)\boldsymbol{e}_3|$$
$$=|\sin\phi|=0.$$

若映射限制在无限带形 $-\infty<\theta<\infty$, $0<\phi<\pi$, 它将是一个在南北两极有两个小孔的球的一个 C^∞ 类正则参数表示,如图 8-3 所示.

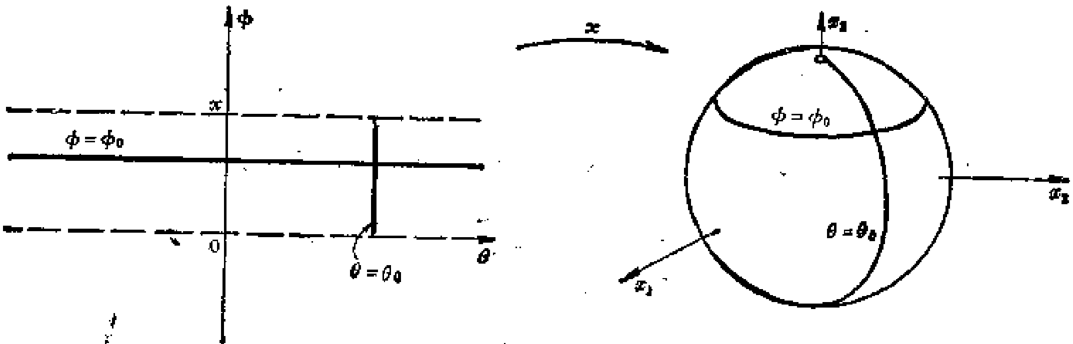


图 8-3

θ 参数曲线族 $\phi=\phi_0$ 称为纬线. 它们是球面与水平面族 $x_3=\cos\phi_0$ 的交线. ϕ 参数曲线族 $\theta=\theta_0$ 称为经线. 它们是球面与通过 x_3 轴的平面族 $x_1\sin\theta_0-x_2\cos\theta_0=0$ 的交线.

注意,经线和纬线相交成直角,因为

$$\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\phi=((-\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2)\cdot((\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_2-(\sin\phi)\boldsymbol{e}_3)$$
$$=0.$$

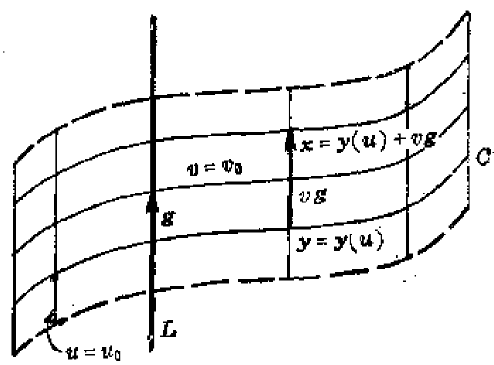


图 8-4

(c) 柱面是由一直线 L 沿一曲线 C 平行移动生成的曲面. 如图 8-4 所示,若 C 由 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(u)$ 给定, $\boldsymbol{g}$ 是沿 L 方向的单位向量,则柱面表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(u)+v\boldsymbol{g}$. 显然,若 $\boldsymbol{y}$ 是 C^m 类的和对于所有 uv 有 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}\neq 0$, $\boldsymbol{x}$ 就是 C^m 类正则参数表示. u 参数曲线是 C 沿 $\boldsymbol{g}$ 方向平移所得曲线. v 参数曲线是 L 一样的直线,称为柱面的母线.

2. 坐标曲面片

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是定义在 U 上的 S 的 C^m 类正则参数表示(如图 8-5). 并设 $\theta=\theta(u, v)$, $\phi=\phi(u, v)$ 是 U 到 $\theta\phi$ 平面的 C^m 类映射,它在每一点 (u, v) 有 Jacobi $\partial(\theta\phi)/\partial(u, v)\neq 0$. 一般来说,这样的映射 $\theta=\theta(u, v)$, $\phi=\phi(u, v)$ 不是一一的. 但是由反函数定理,它至少局部地是这样的. 即对 V 中每个 (u_0, v_0), 存在一包含 (u_0, v_0) 的开集 w, 使得 $\theta=\theta(u, v)$,

$\phi(u, v)$把 w 一一地映射到开集 w^* 上，并且使得反函数 $u=u(\theta, \phi)$，$v=v(\theta, \phi)$ 在 w^* 上是 C^m 类的．现在考虑 w^* 到 S 的复合映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)=\boldsymbol{x}(u(\theta, \phi), v(\theta, \phi))$．由链法则可得 $\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$是 C^m 类的．而且

$$\boldsymbol{x}_\theta^* \times \boldsymbol{x}_\phi^* = (\boldsymbol{x}_u u_\theta + \boldsymbol{x}_v v_\theta) \times (\boldsymbol{x}_u u_\phi \times \boldsymbol{x}_v v_\phi)$$
$$= (\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v)(u_\theta v_\phi - v_\theta u_\phi) = (\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v)\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \neq \mathbf{0}.$$

这是因为 $\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \neq \mathbf{0}$ 和 Jacobi $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} = \left[\dfrac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)}\right]^{-1} \neq 0$．于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$是 C^m 类正则参数表示，但是，注意这仅仅是 S 的一个部分表示．由于要求太严格了，我们不能考虑在整个 U 上都是一一的参数变换 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\theta, \phi)$，$v=v(\theta, \phi)$．我们只好用曲面的部分表示的集来定义曲面，以代替整个曲面的单一表示．即，我们定义：

S 中一个 $C^m(m\geqslant 1)$类坐标曲面片是开集 U 到 S 的映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，它使得

（i）$\boldsymbol{x}$ 在 U 上是 C^m 类的；

（ii）$\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \neq \mathbf{0}$，对于 v 中所有(u, v)；

（iii）$\boldsymbol{x}$ 在 U 上是一一的和双方连续的．

于是坐标曲面片是 S 的部分正则参数表示，它是一一的和双方连续的．

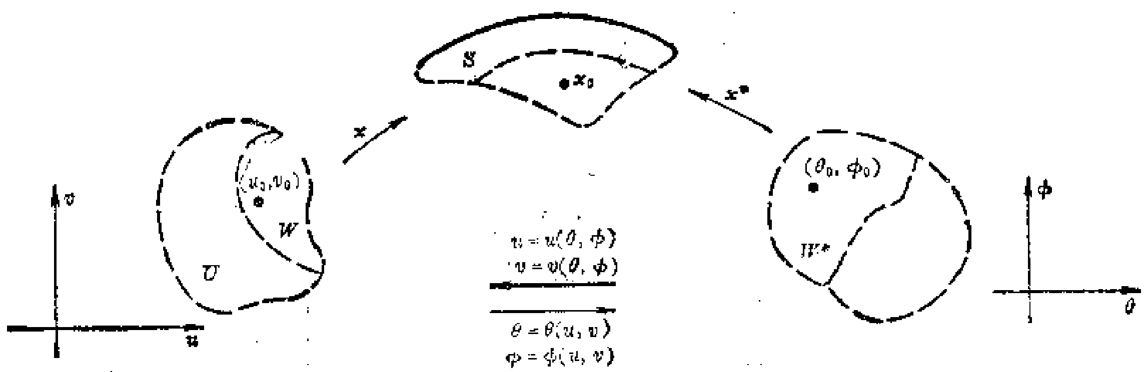


图 8-5

例 8.2 (a)

$$\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+\sqrt{1-(u^2+v^2)}\,\boldsymbol{e}_3, \qquad u^2+v^2<1$$

定义了单位圆盘 $u^2+v^2<1$ 到单位球面 $|\boldsymbol{x}|=1$ 的上半球面上的映射．显然 $\boldsymbol{x}$ 是 C^∞ 类的，而且对于所有(u, v)，

$$|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v| = \left|\frac{u}{[1-(u^2+v^2)]^{1/2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{v}{[1-(u^2+v^2)]^{1/2}}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\right|$$
$$= [1+(u^2+v^2)]^{-1/2} \neq 0.$$

于是 $\boldsymbol{x}$ 是上半球面的 C^∞ 类正则参数表示．映射也是一一的；因为 $\boldsymbol{x}(u, v)=\boldsymbol{x}(u', v')$意味着$(u, v)=(u', v')$，而这是由于 $x_1=u$ 和 $x_2=v$．映射也是双方连续的．因为 $\boldsymbol{x}$ 是连续的，且逆映射(即射影 $u=x_1$，$v=x_2$)是连续的．于是映射是球面上的 C^∞ 类坐标曲面片．

（b）考虑由一铅垂线沿 x_1x_2 平面上曲线 $r=\sin 2\theta(0<\theta<3\pi/4)$移动所生成的柱面，如图 8-6 所示．注意，因为我们除去了端点 $\theta=0$，柱面不与自己相交．容易验证，

$$\boldsymbol{x}=(\sin 2\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin 2\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3$$

$(0<\theta<3\pi/4,\ -\infty<u<\infty)$是柱面的 C^∞ 类正则参数表示，且是一一的．但是，逆映射不

连续. 因为 x_3 轴(即在 $\theta=\pi/2$)上的点的任意一个邻域包含柱面在边界($\theta=0$)附近的点. 于是这表示不是柱面的坐标曲面片. $\boldsymbol{x}$ 限制在 (a) $0<\theta<\pi/2$, $-\infty<u<\infty$ 和(b) $\pi/4<\theta<3\pi/4$, $-\infty<u<\infty$ 时定义两块坐标曲面片, 它们覆盖柱面.

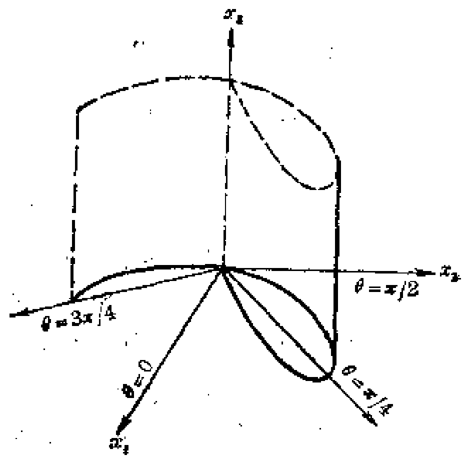


图 8-6

在问题 8.7 中我们将证明, 若 $f(u, v)$ 是 C^m 类函数, 则形如 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u, v)\boldsymbol{e}_3$

或 $\qquad x=u\boldsymbol{e}_1+f(u, v)\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3$

或 $\qquad \boldsymbol{x}=f(u, v)\boldsymbol{e}_1+u\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3$

的函数确定 C^m 类坐标曲面片. 这种坐标曲面片称为 Monge 片, 它在曲面研究中经常使用. 事实上, 可以证明若一集合 S 可用一个 C^m 类正则参数表示来表示, 则对 S 中每个点 P_0, 存在一个 S 中包含 P_0 的 C^m 类 Monge 片. 假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是定义在 U 上的 S 的 C^m 类正则参数表示, 并且 (u_0, v_0) 是 U 中映射到 P_0 的点, 如图 8-7 所示. 因为 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 是正则的, $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 矩阵至少有一个 2×2 子式在 (u_0, v_0) 不为 0, 不失一般性我们可以假定在 (u_0, v_0)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

现在考虑 U 到 x_1x_2 平面中, 由 $\boldsymbol{x}$ 的前两个分量定义的映射 $x_1=x_1(u, v)$, $x_2=x_2(u, v)$. 显然这个映射在 U 上是 C^m 类的, 因为 $\boldsymbol{x}$ 在 U 上是 C^m 类的, 而且它的 Jacobi 在 (u_0, v_0) 的某个邻域中异于零, 因为它是连续的且在 (u_0, v_0) 异于零. 由反函数定理, U 中存在一包含 (u_0, v_0) 的开集 W, 在其中映射是一一的且有一个反函数 $u=u(x_1, x_2)$, $v=v(x_1, x_2)$, 它在 x_1x_2 平面中的一个开集 W^* 上是 C^m 类的. 这样 W^* 到 S 中的复合映射

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=x_1(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\boldsymbol{e}_1+x_2(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\boldsymbol{e}_2\\&\quad+x_3(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\boldsymbol{e}_3\\&=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

是 S 中定义在 W^* 上的 C^m 类 Monge 片, 其中 W^* 的象包含 P_0. 于是有

定理 8.1 若 E^3 中集合 S 有一 C^m 类正则参数表示, 则对 S 中每个点 P 存在 S 中一

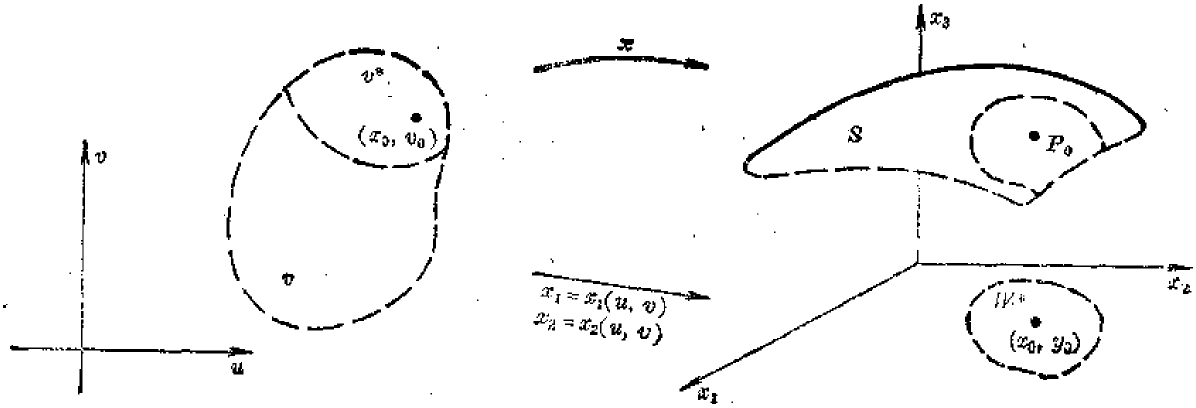


图 8-7

包含 P 的 Monge 片.

3. 简单曲面的定义

设 S 是 E^3 中一点集, 它有一个满足下列条件的 $C^m(m\geqslant 1)$类坐标曲面片集 B:

(i) B 覆盖 S, 即对于 S 中每个点, 在 B 中有一包含 P 的坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$.

(ii) B 中每个坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是 E^3 中一开集 O 与 S 的交, 如图 8-8 所示.

S 和 S 中全部 C^m 类坐标曲面片合称 E^3 中的 C^m 类简单曲面.

S 上满足上述条件(i)和(ii)的坐标曲面片集合 B 称为 S 的一个基或一个坐标曲面片表示. 于是, 若对于 E^3 中一点集 S 可以找到一 C^m 类基, 则 S 与 S 上所有 C^m 类坐标曲面片的集合, 合起来就是一个 C^m 类简单曲面.

注意通常把点集 S 本身叫做曲面. 但是, 严格地说来, 曲面由 S 和 S 上所有某类坐标曲面片一起构成.

因为对于 $j\leqslant m$, C^m 类函数也是 C^j 类的, C^m 类基也是 C^j 类基. 于是一个 C^m 类简单曲面总可以用附加上所有 C^j 类坐标曲面片的办法扩张为一 C^j 类简单曲面.

例 8.3 (a) 球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 的上半球面(不包括赤道)是 C^∞ 类简单曲面, 因为我们可以取 C^∞ 类 Monge 片

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\,\boldsymbol{e}_3,\quad x_1^2+x_2^2<1$$

为一个基, 它覆盖了上半球面, 且是上半球面与开集 E^3 自己的交.

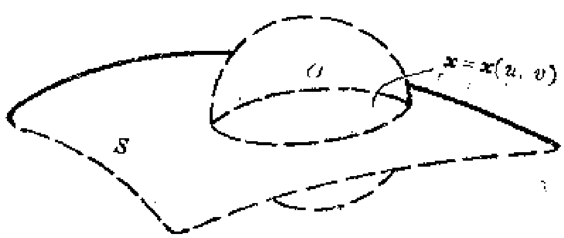


图 8-8

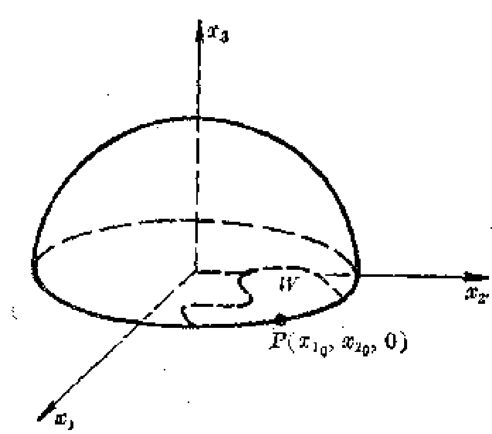


图 8-9

(b) 简单曲面没有边界. 例如 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 的包括赤道的上半球面不是简单曲面. 反之, 设 $P(x_{1_0}, x_{2_0}, 0)$是赤道上一点和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是上半球面上包含 P 的曲面片. 因为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是包含 P 的正则表示, 由前一定理, 存在形如

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\,\boldsymbol{e}_3$$

的包含 P 的 Monge 片, 它定义在 x_1x_2 平面的一个开集 W 上, 这里对于 W 中的(x_1, x_2), $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$, 如图 8-9 所示. 但 W 中点$(x_{1_0}, x_{2_0}, 0)$的每个邻域包含不在 W 中的点, 这是不可能的, 因为 W 是开的.

(c) 但是整个球面是 C^∞ 类简单曲面. 我们可以取六个 Monge 片

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2\pm\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1\pm\sqrt{1-x_1^2-x_3^2}\,\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{x}=\pm\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\,\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

作为一个基，这些半球面显然覆盖球面，并且每一个是球面和 E^3 中一个适当的开半空间的交。例如，曲面片

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\,\boldsymbol{e}_3$$

是球面和半空间 $x_3>0$ 的交。

(d) 简单曲面不可能自己与自己相交。例如考虑如图 8-10 所示的柱面，假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是包含交线上一点 P 的曲面片，因为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是平面中一开集的一一的和双连续的映射，它只能在交叉面的一片上。另一方面 E^3 中包含 P 的每个开集必定含有同时在两片交叉面上的点。于是不可能有曲面片包含 P 而又是 E^3 中一开集与柱面的交。

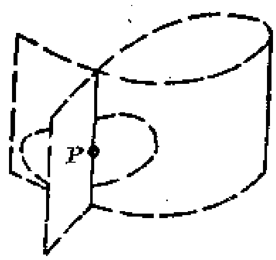


图 8-10

设 P 是 C^m 类简单曲面 S 上一点，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 S 上定义在一开集 U 上包含 P 的任意坐标曲面片，如图 8-11 所示。注意若 U 不连通，这曲面片在 E^3 中就不是连通集。但是，设 (u, v) 是 U 中映射到 P 的点和设 $S(u, v)$ 是 (u, v) 的包含在 U 中的球形邻域。因为 U 是开的，$S(u, v)$ 存在。$\boldsymbol{x}$ 限制在 $S(u, v)$ 时，是 S 上包含 P 的 C^m 类连通曲面片。即有

定理 8.2 对于 C^m 类简单曲面 S 上每一点 P，存在一个 S 上包含 P 的 C^m 类连通曲面片。

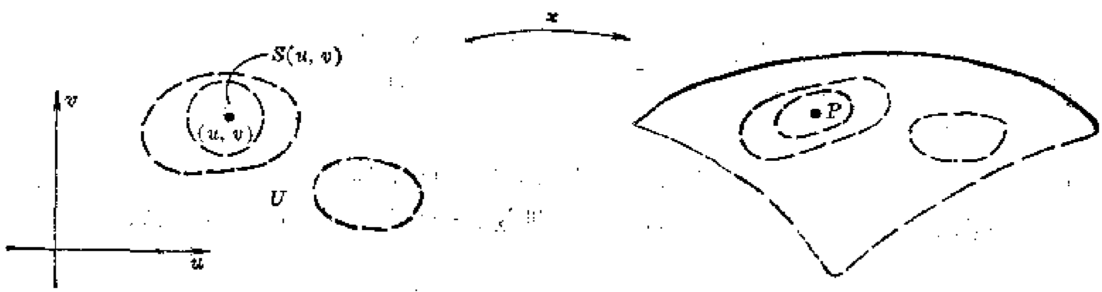


图 8-11

现在假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$ 是 C^m 类简单曲面 S 上的两个有非空交 G 的曲面片。设 W 是 uv 平面中被 $\boldsymbol{x}$ 映射到 G 上的集合和 W^* 是 $\theta\phi$ 平面中被 $\boldsymbol{x}^*$ 映射到 G 上的集合，如图 8-12 所示。因为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}^*$ 是一一的，存在 W 到 W^* 上的一一的参数变换 $\theta=\theta(u, v)$，$\phi=\phi(u, v)$，使得对于 W 中所有 (u, u) 有 $\boldsymbol{x}(u, v)=\boldsymbol{x}^*(\theta(u, v), \phi(u, v))$。在问题 8.14 中，我们将证明 W 是开的，$\theta=\theta(u, v)$，$\phi=\phi(u, v)$ 是 C^m 类的，且对于所有 (u, v)，Jacobi $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v)\neq 0$。

uv 平面中一开集 W 到 $\theta\phi$ 平面的 $C^m(m\geqslant 1)$ 类映射 $\theta=\theta(u, v)$，$\phi=\phi(u, v)$ 称为一个**允许参数变换**，若它是一对一的，且对 W 中所有 (u, v)，Jacobi $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v)\neq 0$。注意直接从反函数定理可得，若 $\theta=\theta(u, v)$，$\phi=\phi(u, v)$ 是以 W^* 为象的允许参数变换，则 W^* 是开的，反函数 $u=u(\theta, \phi)$，$v=v(\theta, \phi)$ 在 W^* 是 C^m 类的，且对 W^* 中所有 (θ, ϕ) 有

$$\text{Jacobi}\,\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}=\left|\frac{\partial(\theta\phi)}{\partial(uv)}\right|^{-1}\neq 0.$$

即，允许参数变换的逆变换是允许参数变换。由上所述我们有

定理 8.3 在 C^m 类简单曲面的两个坐标曲面片的交上，参数是用 C^m 类允许坐标变

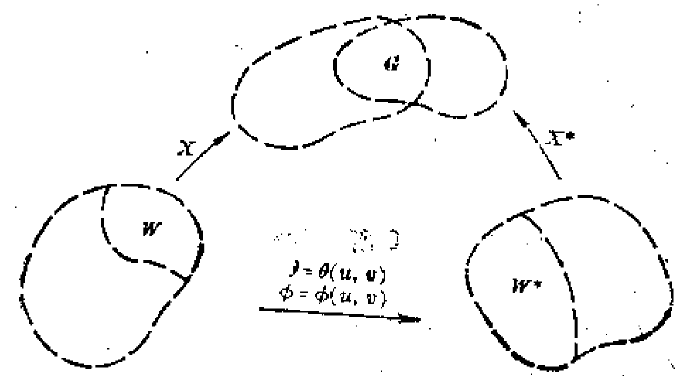


图 8-12

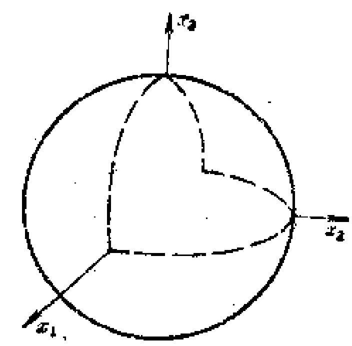


图 8-13

换相联系的.

例8.4 方程

$$\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+\sqrt{1-u^2-v^2}\,\boldsymbol{e}_3,\quad u^2+v^2<1$$

和
$$\boldsymbol{x}=(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2+(\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,\quad 0<\theta<\pi,\ 0<\phi<\pi$$

在球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 上定义了 C^∞ 类坐标曲面片. 它们的交如图 8-13 所示, 是半个上半球面, 在这个交上我们有参数变换 $u=\cos\theta\sin\phi$ 和 $v=\sin\theta\sin\phi$, $0<\theta<\pi$, $0<\phi<\pi/2$, 这个映射是一一的, C^∞ 类的, 且因为 $0<\phi<\frac{\pi}{2}$,

$$\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi)=\sin\phi\cos\phi\neq 0,$$

逆变换是
$$\phi=\arccos\sqrt{1-u^2-v^2};\quad \theta=\arccos u/(u^2+v^2),$$

其中 $u^2+v^2<1$ 和 $v>0$.

利用曲面的给定的基所确定的性质可能依赖也可能不依赖于具体的基的选择. 若它不依赖于基, 我们说这性质是曲面的**性质**. 具体地说, 一个局部性质是曲面的性质, 当且仅当它与允许参数变换无关.

4. 切面和法线

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 C^m 类简单曲面上的曲面片, $u=u(t)$, $v=v(t)$ 是参数平面中的 C^m 类正则曲线 C. 现在考虑 C 在曲面上的象 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(u(t), v(t))$. 显然 $\boldsymbol{y}(t)$ 是 C^m 类函数, 因为它是 C^m 类函数的复合函数. 而且对于所有 t, 切向量 $d\boldsymbol{y}/dt\neq\boldsymbol{0}$. 否则, 因为对于所有 (u, v), $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq 0$, 故 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 线性无关. 于是对于某个 t, 若

$$d\boldsymbol{y}/dt=\boldsymbol{x}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{dt}=\boldsymbol{0},$$

则有 $du/dt=0$ 和 $dv/dt=0$. 但这是不可能的, 因为 C 是正则的. 于是参数平面上的每一 C^m 类正则曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 映射到曲面的 C^m 类正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(u(t), v(t))$ 上.

假设现在我们从曲面上的 C^m 类正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$ 入手. 由于可能找不到包含整个曲线的单个的坐标曲面片, 让我们考虑曲线包含在坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 中的任意连通部分. 因为 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 是一一的, 在参数平面中存在唯一的曲线 C, $u=u(t)$, $v=v(t)$, 使得 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(u(t), v(t))$. 可以证明 C 也是正则的且是 C^m 类的. 于是局部地曲面上的每条

C^m 类正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$ 是曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 的参数平面中的唯一一条 C^m 类正则曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 的象.

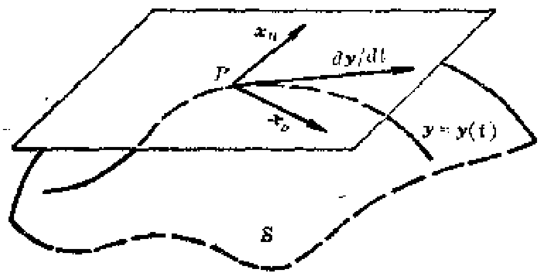


图 8-14

非零向量 $\boldsymbol{T}$ 称为在点 P 与曲面 S *相切*, 如若 S 上有一过 P 的正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$ 使得 $\boldsymbol{T}=d\boldsymbol{y}/dt$. 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是包含 P 的曲面片和

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(u(t), v(t)),$$

则
$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{x}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{dt}.$$

于是曲面在 P 的切向量与在 P 的两个线性独立的向量 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 线性相关, 如图 8-14 所示.

我们记得 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 分别与 u 参数曲线和 v 参数曲线相切. 而与 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 线性相关的每个非零向量是过 P 的某条曲线的切向量 $d\boldsymbol{y}/dt$. 它的证明留给读者作为一个练习.

过 P 且平行于在 P 的 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 的平面称为 S 在 P 的*切平面简称切面*. 由上述可知, 它不依赖于包含 P 的坐标曲面片, 且一非零向量 $\boldsymbol{T}$ 与 S 在 P 相切, 当且仅当它平行于在 P 的切平面. 显然在坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 上的一点的切平面为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{x}_u+k\boldsymbol{x}_v, \quad -\infty<h, k<\infty. \tag{8.1}$$

在曲面的每一点 P 有两个方向相反的单位向量, 它们都垂直于在 P 的切平面. 我们将会看到, 不一定能在每一点选定其中一个方向, 使得它在整个曲面上连续地变化. 但是, 在任意一个坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 上我们约定选取与在 P 的 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 构成右手系的向量, 即取向量 $\boldsymbol{N}=\dfrac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|}$. 显然 $\boldsymbol{N}$ 是单位长的且垂直于在 P 的切平面, 因为它垂直于 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$. 并且因为 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 至少是 C^0 类的和 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq\boldsymbol{0}$, 它在曲面片上连续变化, 向量 $\boldsymbol{N}$ 称为曲面在 P 的*单位法向量*.

若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$ 是任意别的包含 P 的坐标曲面片, 则在交上

$$\boldsymbol{x}^*_\theta\times\boldsymbol{x}^*_\phi=(\boldsymbol{x}_u u_\theta+\boldsymbol{x}_v v_\theta)\times(\boldsymbol{x}_u u_\phi+\boldsymbol{x}_v v_\phi)=(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)(u_\theta v_\phi-u_\phi v_\theta)$$
$$=(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}.$$

于是
$$\boldsymbol{N}^*=\frac{\boldsymbol{x}^*_\theta\times\boldsymbol{x}^*_\phi}{|\boldsymbol{x}^*_\theta\times\boldsymbol{x}^*_\phi|}=\frac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|}\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}\Big/\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}\right|$$
$$=\boldsymbol{N}\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}\right).$$

故 $\boldsymbol{N}$ 在 P 与 $\boldsymbol{N}$ 有同样的指向, 当且仅当在 P, $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi)>0$.

在任何情况下, 过 P 垂直于在 P 的切平面的直线都是不依赖于坐标曲面片的, 我们称它为曲面在 P 的*法线*. 因此在 $\boldsymbol{x}$ 的法线为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{N}, \quad -\infty<k<\infty. \tag{8.2}$$

例 8.5 当一个圆绕其所在平面上一定直线转动时, 生成一环面. 假设圆在 x_1x_3 平面中, 中心在 x_1 轴上, 到原点的距离为 b, 半径是 $a(a<b)$. 考虑它绕 x_3 轴转动一个 θ 角后的情形, 如图 8-15 所示. 若 $\boldsymbol{u}$ 是从原点到圆心的向量和 $\boldsymbol{r}$ 是圆的半径向量, 则

$$\boldsymbol{u}=(b\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$$

和
$$\boldsymbol{r}=(a\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(a\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,$$

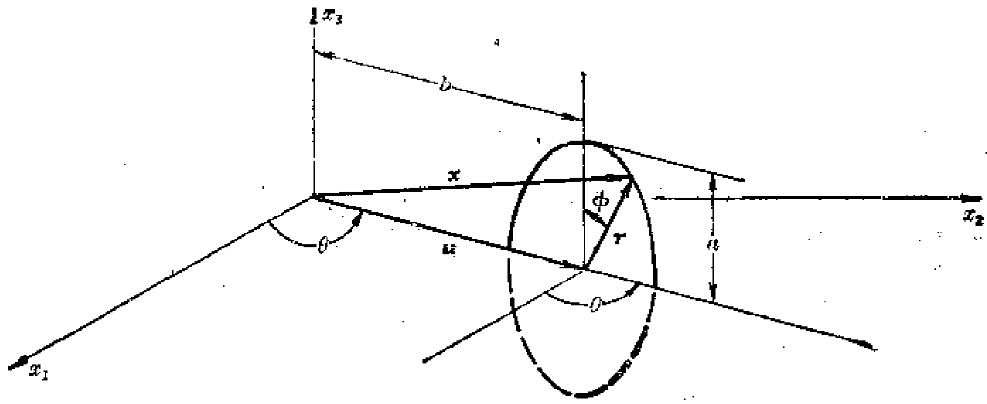


图 8-15

其中 ϕ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 x_3 轴构成的角. 因此

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}=(b+a\sin\phi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\phi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $-\infty<\theta<\infty$, $-\infty<\phi<\infty$. 显然 $\boldsymbol{x}$ 是 C^∞ 类的, 而且

$$\boldsymbol{x}_\theta=-(b+a\sin\phi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\phi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{x}_\phi=(a\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(a\cos\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-(a\sin\phi)\boldsymbol{e}_3$$

和

$$|\boldsymbol{x}_\theta\times\boldsymbol{x}_\phi|=|a(b+a\sin\phi)(-\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-(\cos\phi)\boldsymbol{e}_3|$$
$$=a(b+a\sin\phi)\neq 0,$$

对于所有的(θ, ϕ). 于是 $\boldsymbol{x}$ 是环面上 C^∞ 类正则参数表示, 环面是简单曲面. 我们可以取上述表示的足够多的彼此搭接的部分表示作为基, 只要它们是一一的并且覆盖环面. 例如, 容易验证把 $\boldsymbol{x}$ 限制在 $\theta\phi$ 平面的下述三个开集: (a) $0<\theta<2\pi$, $0<\phi<2\pi$, (b) $-\pi<\theta<\pi$, $-\pi<\phi<\pi$, (c) $-(1/2)\pi<\theta<(3/2)\pi$, $-(1/2)\pi<\phi<(3/2)\pi$ 就可得一个基. (θ, ϕ) 参数平面中每一正则曲线映射到环面一正则曲线上. 例如, 坐标直线 $\theta=$常数映射到曲面上 ϕ 参数曲线中, 它与生成环面的圆一样. 坐标直线 $\phi=$常数映射到曲面上的 θ 参数曲线中, 它是环面上的母圆上一定点绕 x_3 轴旋转生成的圆. 注意 $\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\phi=0$. 所以曲面上的参数曲线正交. 有趣的是参数平面中的直线 $\theta=t$, $\phi=kt$, k 是正整数, 在环面上的象是曲线

$$\boldsymbol{x}=(b+a\sin kt)(\cos t)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin kt)(\sin t)\boldsymbol{e}_2+(a\cos kt)\boldsymbol{e}_3,$$

它是环面上的螺旋线, 它缠绕环面恰好 k 次, 如图 8-16 所示. 环面上的单位法向量是向量

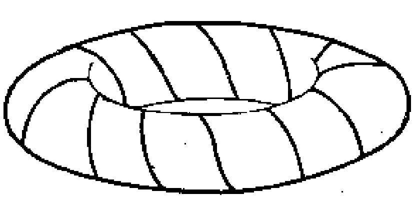


图 8-16

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{x}_\theta\times\boldsymbol{x}_\phi}{|\boldsymbol{x}_\theta\times\boldsymbol{x}_\phi|}=-(\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-(\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,$$

这里 $\boldsymbol{N}$ 在曲面连续地改变, 它指向环面内, 与生成圆的半径向量

$$\boldsymbol{r}=(a\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(a\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3$$

的方向相反.

5. 简单曲面的拓扑性质

简单曲面是连通的, 如若它作为 E^3 中一个点集是连通的. 于是 S 是连通的, 如若不存

在 E^3 中开集 O_1 和 O_2，它们覆盖 S 并与 S 有非空不相交的交．在问题 8.23 中我们将证明．

定理 8.4 若 S 是连通简单曲面，P 和 G 是 S 上任意两点，则存在一连接 P 和 G 的正则弧．于是一连通曲面是由正则弧所弧连接的．

在问题 8.22 中我们还将证明有趣且很重要的

定理 8.5 设 S 和 T 是简单曲面，其中 S 是闭的，T 是连通的，且 S 包含在 T 中，则 S 作为 E^3 中的点集等于 T．

于是一个闭简单曲面，在它不能是一个连通简单曲面的真子集这种意义下，是完全的．

简单曲面是紧致的，如若它是 E^3 中一个紧致点集．于是 S 是紧致的，如若它是闭的和有界的．于是一个紧致曲面没有开的边．它必须是大小有限的和在每一个地方都密闭得如球面或环面那样．

虽然可定向性也是简单曲面的一个拓扑性质，并且可以用连续性等概念定义它，我们还是用曲面上的微分结构（坐标曲面片）定义它．即，一简单曲面 S 是可定向的，如若存在 S 的一个基，使得若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta,\phi)$ 是基中任意两个搭接的坐标曲面片，则在搭接处有 $\partial(u,v)/\partial(\theta,\phi)>0$．我们知道法向量 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}^*$ 在一点是相等的，当且仅当 $\partial(u,v)/\partial(\theta,\phi)>0$．于是 S 是可定向的，当且仅当可以在这曲面上定义一个在曲面上连续变动的单位法向量．

直观上，定向曲面是在其上指定了在曲面上连续变动的法方向的可定向曲面．精确地说，设 S 是 E^3 中一点集和设 F 是 S 上满足下述条件的 C^m 类坐标曲面片集：

(i) F 中有一坐标曲面片集合构成 S 的一个基；

(ii) 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta,\phi)$ 是 F 中任意两个搭接的坐标曲面片，则在其交上 $\partial(u,v)/\partial(\theta,\phi)>0$；

(iii) F 是最大的．即，若把 S 上一个不在 F 中的坐标曲面片添加到 F 中的，性质(ii)不成立．

点集 S 和集合 F 合起来是一个 C^m 类定向简单曲面．

注意，若简单曲面是可定向的，可以在一个满足(ii)的基的基础上添加上所有使之仍然保持(ii)的坐标曲面片使它定向．而一个连通可定向曲面 S 可以用两种且仅可用两种方法定义；即 S 上的坐标曲面片属于集 F_1 和 F_2 中之一个，其中每一个都满足上述(i)、(ii)和(iii)．证明留给读者作为练习．

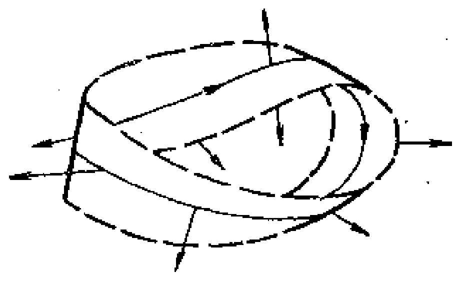


图 8-17

最后，我们定义初等曲面为有单个坐标曲面片构成的基的简单曲面．因此初等简单曲面同胚于平面中一开集且可定向的．例 8.6，球面和环面是连通、紧致和可定向简单曲面的例子．椭圆抛物面和平面是连通初等曲面的例子．图 8-17 所示的 Moebius 带是不可定向的．如图中所表明那样，一个法向量当它绕曲面连续变动时转到了相反的方向．

注意，除非另有说明，我们假设曲面是连通的．于是所谓"C^m 类简单曲面"指的是"C^m 类连通简单曲面"．

§8.2 问题及其解答

1. 正则参数表示

8.1 证明：若 $f(u, v)$ 是 C^m 类的，则 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u, v)\boldsymbol{e}_3$ 是 C^m 类正则参数表示.

证：因为 f 是 C^m 类的，$\boldsymbol{x}$ 是 C^m 类的，且

$$\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{e}_1+f_u\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{e}_2+f_v\boldsymbol{e}_3$$

和
$$|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|=|-f_u\boldsymbol{e}_1-f_v\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3|=[f_u^2+f_v^2+1]^{1/2}\neq 0,$$

故得证.

8.2 证明 $\boldsymbol{x}=(a\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(c\cos\phi)\boldsymbol{e}_3$, $a, b, c>0$, $-\infty<\theta<\infty$, $0<\phi<\pi$, 是在 $(0, 0, c)$ 和 $(0, 0, -c)$ 刺了孔的椭圆面的 C^∞ 正则参数表示，如图 8-18 所示. 描述 θ 参数曲线和 ϕ 参数曲线.

证：
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=\sin^2\phi\cos^2\theta+\sin^2\phi\sin^2\theta+\cos^2\phi=1,$$

而且
$$\boldsymbol{x}_\theta=(-a\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(b\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{x}_\phi=(a\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b\cos\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-(c\sin\phi)\boldsymbol{e}_3$$

和
$$|\boldsymbol{x}_\theta\times\boldsymbol{x}_\phi|=|(-bc\sin^2\phi\cos\phi)\boldsymbol{e}_1-(ac\sin^2\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-(ab\sin\phi\cos\phi)\boldsymbol{e}_3|$$
$$=|\sin\phi|\,[(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)c^2\sin^2\phi+a^2b^2\cos^2\phi]^{1/2}.$$

我们可以假定 $0<a\leqslant b\leqslant c$, 则对于 $0<\phi<\pi$,

$$|\boldsymbol{x}_\theta\times\boldsymbol{x}_\phi|\geqslant|\sin\phi|\,[(a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)a^2\sin^2\phi+a^4\cos^2\phi]^{1/2}|$$
$$=|\sin\phi|a^2\neq 0,$$

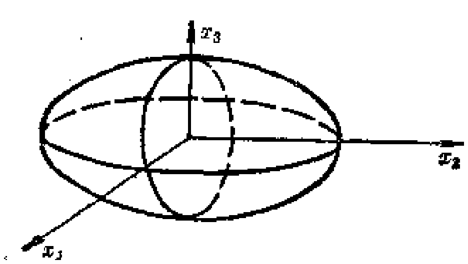


图 8-18

而且 $\boldsymbol{x}$ 是 C^∞ 类的，于是 $\boldsymbol{x}$ 是 C^∞ 类正则参数表示. θ 参数曲线（ϕ=常数）是椭圆面和水平面族 $x_3=c\cos\phi$, $0<\phi<\pi$ 的交线. 它们是椭圆

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1-\cos^2\phi.$$

ϕ 参数曲线（θ=常数）是椭圆面和半平面族

$$x_1=a\cdot R\cos\theta,\ x_2=bR\sin\theta,$$

$R>0$ 的交线，它们是半椭圆. 因为，若用到原点的距离来把这样的半平面与 x_1x_2 平面的交线参数化，则

$$x_1=\frac{a(\cos\theta)t}{d},\quad x_2=\frac{b(\sin\theta)t}{d}\quad (t=Rd),$$

其中 $d^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$, 所以交线是半椭圆 $\frac{t^2}{d^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$, $t>0$.

8.3 旋转曲面是由一平面曲线 C 绕其平面上一直线 L 旋转而得的曲面，C 称为轮廓线，L 称为 S 的轴. C 的不同位置称为 S 的经线，而 C 上每一点生成的圆称为 S 的纬线.

若 $x_1=f(t)$, $x_3=g(t)$, $a<t<b$, 是 x_1x_3 平面中 C^m 类正则曲线 C, 且 $f>0$; 证明

$$\boldsymbol{x}=(f(t)\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(f(t)\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g(t)\boldsymbol{e}_3,\qquad -\infty<\theta<+\infty,$$

是由 C 绕 x_3 轴旋转而得的曲面的 C^m 类正则参数表示. 并证明 t 参数曲线（经线）和 θ 参

数曲线(纬线)正交.

证: 设($\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$)是($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$)绕 x_3 轴旋转角 θ 而得的一个基, 如图 8-19 所示. 轮廓曲线 $x_1=f(t)$, $x_3=g(t)$上一点的位置向量, 当它在包含 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 的平面中时, 是 $\boldsymbol{x}=f(t)\boldsymbol{g}_1+g(t)\boldsymbol{g}_3$. 但是 $\boldsymbol{g}_1=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{e}_3$, 于是

$$\boldsymbol{x}=(f(t)\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(f(t)\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g(t)\boldsymbol{e}_3.$$

因为 f 和 g 是 C^m 类的, $\boldsymbol{x}$ 是 C^m 类的. 而且

$$\boldsymbol{x}_t=(f'\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(f'\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g'\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{x}_\theta=(-f\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(f\cos\theta)\boldsymbol{e}_2$$

和

$$|\boldsymbol{x}_t\times\boldsymbol{x}_\theta|=|-(g'f\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(g'f\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+f'f\boldsymbol{e}_3|$$
$$=f\sqrt{(g')^2+(f')^2}\neq 0.$$

因为 $f>0$ 和 $x_1=f(t)$, $x_3=g(t)$是正则的. 于是 $\boldsymbol{x}$ 是正则的和 C^m 类的. 又由 $\boldsymbol{x}_t\cdot\boldsymbol{x}_\theta=0$, 得 t 参数曲线与 θ 参数曲线正交.

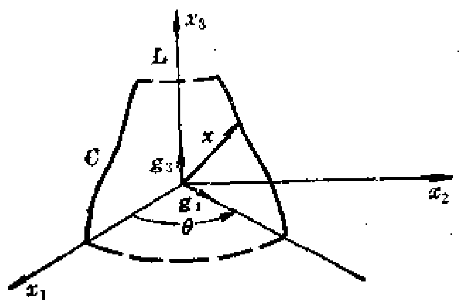


图 8-19

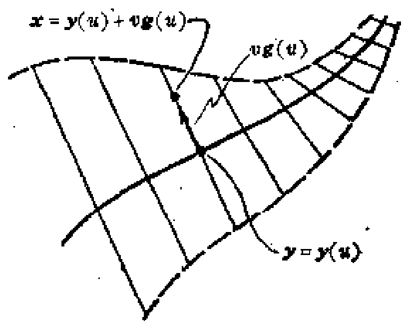


图 8-20

8.4 直纹曲面是单参数直线族生成的曲面. 各种位置的生成直线称为曲面的母线. 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(u)$是 C^m 类正则曲线, $\boldsymbol{g}(u)$是沿 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(u)$的 C^m 类非零向量. 证明若 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是 C^m 类的, 及对所有(u, v), $(\boldsymbol{y}'+u\boldsymbol{g}')\times\boldsymbol{g}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(u)+v\boldsymbol{g}(u)$是直纹面的 C^m 类正则参数表示. 曲面上述形式的参数化称为*直纹形式*参数化. 曲线 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)$ 称为参数化的*底曲线*. 注意柱面(例 8.1(c))是有平行母线的直纹面. 即 $\boldsymbol{g}=$常矢.

证: 如图 8.20 所示, 曲面上一动点是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(u)+v\boldsymbol{g}(u)$, 其中 v 是沿母线的参数. $\boldsymbol{x}$ 是 C^m 类的, 因为 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是 C^m 类的. 并且因为

$$\boldsymbol{x}_u=\frac{d\boldsymbol{y}}{du}+v\frac{d\boldsymbol{g}}{du},\quad \boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{g},$$

$\boldsymbol{x}$ 是正则的, 当且仅当对于所有(u, v),

$$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=\left(\frac{d\boldsymbol{y}}{du}+v\frac{d\boldsymbol{g}}{du}\right)\times\boldsymbol{g}\neq\boldsymbol{0},$$

故得证. 注意上述表示中 $u=$常数的 v 参数曲线是母线自己.

8.5 证明双曲抛物面 $x_3=x_1^2-x_2^2$ 是双直纹面, 即它可以用两族不同的直线生成. 求这曲面用两族母线表示的直纹形式的参数表示.

解: 注意, $x_3=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$, 于是平面 $x_1-x_2=u_0$ 与曲面的交线是平面 $x_1-x_2=u_0$ 和 $x_3=u_0(x_1+x_2)$确定的直线. 所以我们可以令 $x_1-x_2=u$, $x_1+x_2=v$, 使得

$$x_1=\frac{1}{2}(u+v),\quad x_2=\frac{1}{2}(u-v),\quad 和\quad x_3=uv.$$

这给出表示
$$x=\frac{1}{2}(u+v)e_1+\frac{1}{2}(u-v)e_2+uve_3,$$
其中 $v=$ 常数的 u 参数曲线和 $u=$ 常数的 v 参数曲线是直线. 于是双曲面是双直纹面. 把 x 改写为
$$x=\left(\frac{1}{2}ue_1+\frac{1}{2}ue_2\right)+v\left(\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_2+ue_3\right)=y(u)+vg(u).$$
这给出一个直纹形式的表示, 其中
$$y=\frac{1}{2}ue_1+\frac{1}{2}ue_2.$$
$v=0$ 的 u 参数曲线是底曲线. $g=\left(\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_2+ue_3\right)$ 指向在 u 的 v 参数曲线的方向. 类似地,
$$x=\left(\frac{1}{2}ve_1-\frac{1}{2}ve_2\right)+u\left(\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2+ve_3\right)$$
是直纹形式的表示, 其中 $u=0$ 的参数曲线 $y=\frac{1}{2}ve_1-\frac{1}{2}ve_2$ 是底曲线, 而
$$g=\left(\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2+ve_3\right)$$
是在 v 的 u 参数曲线的方向向量.

8.6 正劈锥曲面是以平行于平面 P 而通过一垂直于这平面的直线 L 的直线为母线的直纹面. 直线 L 称为劈锥曲面的轴, 若取 L 为 x_3 轴, 如图 8-21 所示, 证明劈锥曲面有如下形式的参数表示
$$x=(v\cos\theta(u))e_1+(v\sin\theta(u))e_2+ue_3,$$
其中函数 θ 是母线与 x_1x_3 平面构成的角. 证明表示是正则的和 C^m 类的, 倘若 $\theta(u)$ 是 C^m 类的话.

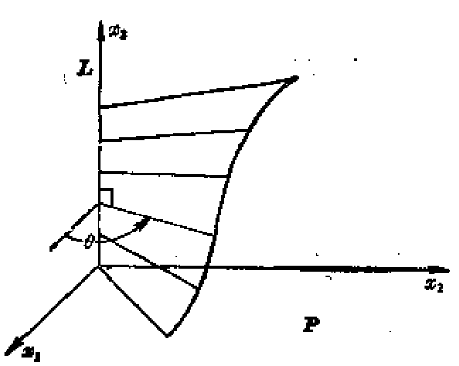


图 8-21

证: 我们取 x_3 轴, $y=ue_3$ 为曲面的底曲线. 因为母线平行于 x_1x_2 平面, 母线方向的单位向量作为 u 的函数可以写成
$$g=(\cos\theta(u))e_1+(\sin\theta(u))e_2,$$
所以
$$\begin{aligned}x&=y+vg\\&=(v\cos\theta(u))e_1+(v\sin\theta(u))e_2+ue_3\end{aligned}$$
是曲面的直纹形式的表示. 这里
$$\begin{aligned}x_u&=(-v\theta'\sin\theta(u))e_1+(v\theta'\cos\theta(u))e_2+e_3,\\x_v&=(\cos\theta(u))e_1+(\sin\theta(u))e_2,\\|x_u\times x_v|&=|(-\sin\theta(u))e_1+(\cos\theta(u))e_2-v\theta' e_3|\\&=[v^2\theta'^2+1]^{1/2}\neq 0,\end{aligned}$$
对所有 $(v,\ \theta)$. 于是倘若 $\theta(u)$ 是 C^m 类的, 则 x 是 C^m 类正则表示. 注意若 $\theta'\neq 0$, 函数 $\theta(u)$ 有逆函数, 曲面有如下形式的表示
$$x=(v\cos\theta)e_1+(v\sin\theta)e_2+u(\theta)e_3.$$

2. 简单曲面

8.7 证明 $x=ue_1+ve_2+f(u,\ v)e_3$ 是 C^m 类坐标曲面片, 当且仅当 $f(u,\ v)$ 是 C^m 类

的.

证: 由问题8.1, $\boldsymbol{x}$ 是 C^m 类正则参数表示. 剩下只要证明 $\boldsymbol{x}$ 是一一的和它的逆映射是连续的. 因为 $x_1=u$, $x_2=v$, 因此 $\boldsymbol{x}(u, v)=\boldsymbol{x}(u', v')$, 意味着 $u=u'$ 和 $v=v'$. 所以 $\boldsymbol{x}$ 是一一的. 逆映射是 $u=x_1$, $v=x_2$, 且是连续的. 于是 $\boldsymbol{x}$ 是 C^m 类坐标曲面片.

8.8 证明映射 $\boldsymbol{x}=u^2\boldsymbol{e}_1+uv\boldsymbol{e}_2+v^2\boldsymbol{e}_3$ 是第一象限 $u>0$, $v>0$ 上是 C^∞ 类坐标曲面片.

证: 显然 $\boldsymbol{x}$ 是 C^∞ 类的, 且

$$|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|=|2v^2\boldsymbol{e}_1-4uv\boldsymbol{e}_2+2u^2\boldsymbol{e}_3|=2\sqrt{v^4+4u^2v^2+u^4}\neq0,$$

对于 $u>0$ 和 $v>0$. 因为 $x_1=u_1^2$ 和 $x_2=uv$, 因此 $\boldsymbol{x}(u, v)=\boldsymbol{x}(u', v')$ 意味着 $u^2=u'^2$ 和 $uv=u'v'$. 因为 $u>0$ 和 $u'>0$, 因此 $u=u'$, $v=v'$. 于是映射是一对一的. 逆映射是 $u=\sqrt{x_1}$, $v=x_2/\sqrt{x_1}$. 因为 $u>0$, 我们有 $x_1>0$, 于是逆映射有定义并连续. 故映射是 C^∞ 类坐标曲面片.

8.9 证明双曲抛物面 $x_3=x_1^2/a^2-x_2^2/b^2$ 是 C^∞ 类简单曲面.

证: 映射

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+(x_1^2/a^2-x_2^2/b^2)\boldsymbol{e}_3$$

是 C^∞ 类 Monge 曲面片(所以是一个真的坐标曲面片), 它覆盖曲面且是曲面与开集 E^3 的交.

8.10 曲面常常用隐式表示, 即它作为 E^3 中一个满足形状为 $f(x_1, x_2, x_3)=C$(C 是常数)的方程的点集. 作为隐函数定理(可在任意一本高等微积分教程中找到)的一个推论, S 和 S 中所有 C^m 类坐标曲面片合在一起是一个简单曲面, 倘若 f 是 C^m 类的且在 S 的每一点偏导数 f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3} 中至少有一个异于零的话. 用这个判别法确定 c 取何值时, $x_1^2-2x_1+x_2x_3=c$ 是简单曲面.

解: $f_{x_1}=2x_1-2$, $f_{x_2}=x_3$, $f_{x_3}=x_2$, 当且仅当 $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$ 它们同时为零. 但当且仅当 $c=-1$ 时, 它才是满足 $x_1^2-2x_1+x_2x_3=c$ 的点, 于是对所有 $c\neq-1$, $x_1^2-2x_1+x_2x_3=c$ 是简单曲面.

8.11 二次曲面是下述形式的方程定义的曲面

$$f=\sum_{ij=1}^{3}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{3}b_ix_i+c=0.$$

利用坐标变换可以证明非退化的二次曲面可以变为图 8-22 中的 6 个草图中的一个.

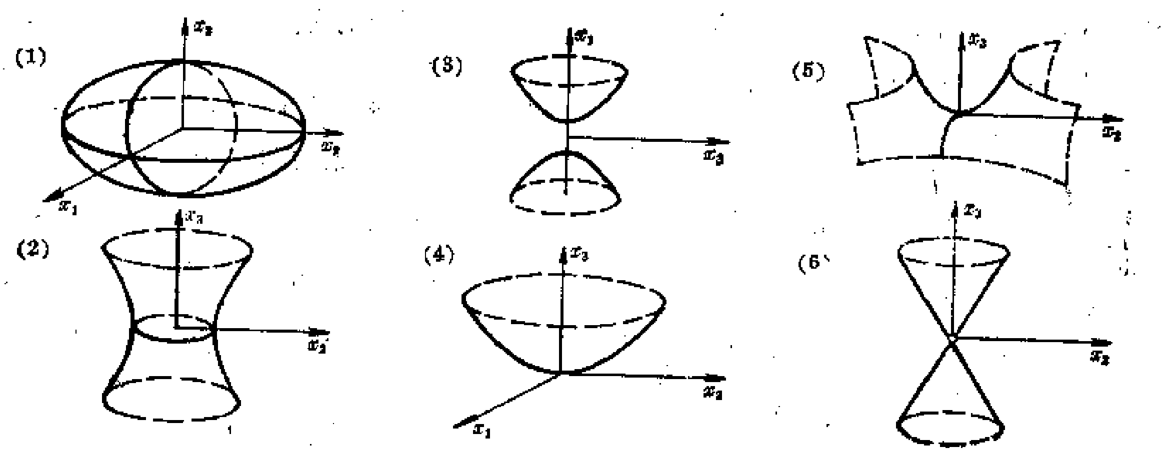


图 8-22

(1) 椭圆面：$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$.

(2) 双曲面(单叶)：$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$.

(3) 双曲面(双叶)：$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$.

(4) 椭圆抛物面：$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-x_3=0$.

(5) 双曲抛物面：$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-x_3=0$.

(6) 二次锥面：$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$, $(x_1, x_2, x_3)\neq(0, 0, 0)$.

利用问题 8.10 中的判别法，证明上述每一曲面是 C^∞ 类简单曲面.

证：对于 $f=\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{x_2^2}{b^2}\pm\frac{x_3^2}{c^2}$，有 $f_{x_1}=\frac{2x_1}{a^2}$, $f_{x_2}=\pm\frac{2x_2}{b^2}$, $f_{x_3}=\pm\frac{2x_3}{c^2}$. 当且仅当 $(x_1, x_2, x_3)=(0, 0, 0)$，它们同时为零. 但原点不在曲面(1)，(2)和(3)上，而在(6)又已被除去. 对于剩下两种 $f=\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{x_2^2}{b^2}-x_3$，有 $f_{x_3}=-1\neq0$. f 在所有情形中是 C^∞ 类的. 所以每一种都是 C^∞ 类简单曲面.

8.12 证明正则参数表示是局部一一的和双连续的. 即若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是定义在开集 v 上的正则参数表示，证明对于 v 中每个 (u, v)，存在一邻域 $S(u, v)$，在其上 $\boldsymbol{x}$ 是一一的和双连续的.

证：回忆定理 8.1 的证明，因为 Jacobi 矩阵的秩是 2，我们可以假定在每个 (u, v) 存在一个定义在包含 (u, v) 的开集 W 上的带有同类逆映射的 $m\geqslant1$ 类映射 $x_1=x_1(u, v)$, $x_2=x_2(u, v)$ 和一个定义在 W 的象上的 Monge 片 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+f(x_1, x_2)\boldsymbol{e}_3$，使得 $\boldsymbol{x}$ 限制在 W 时是复合映射

$$\boldsymbol{x}=x_1(u, v)\boldsymbol{e}_1+x_2(u, v)\boldsymbol{e}_2+f(x_1(u, v), x_2(u, v))\boldsymbol{e}_3.$$

即在 W 上，$\boldsymbol{x}$ 是两个一一双连续映射的复合映射. 故它本身是一一双连续的. 命题证毕.

8.13 可以证明若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是简单曲面 S 上的坐标曲面片和 P 是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 上一点，则在 E^3 中存在一球形邻域 $S(P)$ 使得 $S(P)$ 与曲面 S 的交包含在曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 中. 利用这个结果证明 S 上每个曲面片是 S 与 E^3 中一开集的交. 由此得出任意一覆盖简单曲面 S 的坐标曲面片集合是 S 的一个基.

证：设 G 是任意一曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 在 S 的象. 对于 G 中每个 P 有 $S(P)$ 使得 $S(P)\cap S\subset G$. 设 $O=\bigcup_P S(P)$. 注意 O 是开的，因为它是开集的和. 现在假设 Q 是 G 中一点. 因为 $Q\in S(Q)$，因此 $Q\in O=\bigcup_P S(P)$，又有 $Q\in S$，所以 $Q\in S\cap O$，于是 $G\subset S\cap O$. 反过来，假设 $Q\in S\cap O$. 因为 $S\cap O=S\cap[\bigcup_P S(P)]=\bigcup_P[S\cap S(P)]$，因此 Q 属于某个 $S\cap S(P)$. 但 $S\cap S(P)\subset G$，所以 $Q\in G$. 于是 $S\cap O\subset G$，因此，$G=S\cap O$，这就是所要求的结果，即 S 中每个曲面片是 S 与 E^3 中一开集的交.

8.14 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$ 是简单曲面 S 上的坐标曲面片，它们分别定义在开集 U 和 U^*，且在 S 上有搭接的象 G 和 G^*. 设 W 和 W^* 分别是 U 和 U^* 映射到 $G\cap G^*$ 上

的子集. 证明 W 和 W^* 是它们各自参数平面中的开集.

证: 设 (u_0, v_0) 是 W 中一点, 其象为 $G\cap G^*$ 中点 P_0. 设 $S_\varepsilon(P_0)$ 和 $S_\delta(P_0)$ 是 P_0 的邻域, 其使得 $S_\varepsilon(P_0)\cap S\subset G$ 和 $S_\delta(P_0)\cap S\subset G^*$, 假设 $\varepsilon\leqslant\delta$, 则 $S_\varepsilon(P_0)\cap S\subset G\cap G^*$. 因为 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 连续, 存在 $S_{\delta_1}(u_0, v_0)$ 使得对于 $S_{\delta_1}\cap U$ 中所有 (u, v), $\boldsymbol{x}(u, v)$ 在 $S_\varepsilon(P_0)$ 中, 故所以在 $G\cap G^*$ 中. 但 U 是开的, 于是对于足够小的 δ_2, 有 $S_{\delta_2}(u_0, v_0)$, 使得对于 $S_{\delta_2}(u_0, v_0)$ 中所有 (u, v), $\boldsymbol{x}(u, v)$ 在 $G\cap G^*$ 中, 即对于 $S_{\delta_2}(u_0, v_0)$ 中所有 (u, v), (u, v) 在 W 中. 因为 (u_0, v_0) 是 W 中任意一点, 因此 W 是开的. 类似的论证可得 W^* 是开的.

8.15 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 C^m 类简单曲面 S 上的坐标曲面片, 定义在 U 上, 有象 G, 并设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(x_1, x_2)=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3^*(x_1, x_2)\boldsymbol{e}_3$$

是 S 上的 Monge 片, 定义在开集 V^* 上, 有包含在 G 中的象 G^*, 如图 8-23 所示. 证明存在 U 中一开集 W 和 W 到 V^* 上的 C^m 类一一映射 $x_1=x_1(u, v)$, $x_2=x_2(u, v)$, 这里对于 W 中所有 (u, v), 有 $\partial(x_1, x_2)/\partial(u, v)\neq0$, 使得在 W 上 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是复合映射

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(x_1(u, v), x_2(u, v)).$$

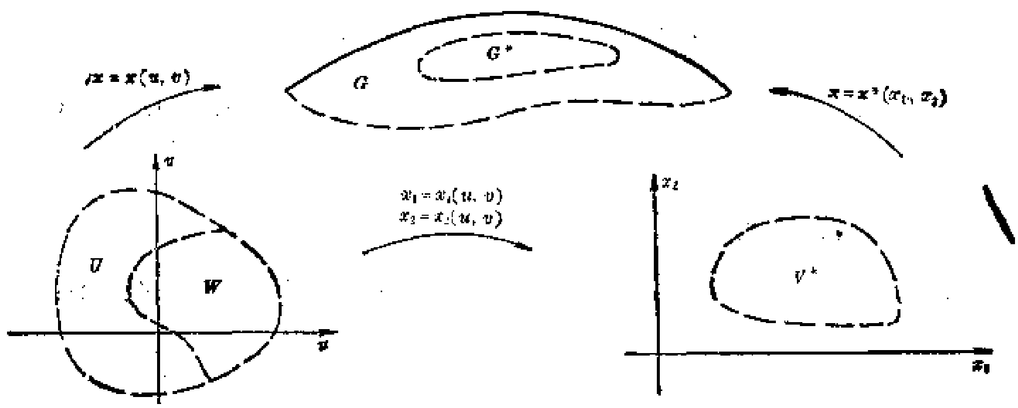


图 8-23

证: 由前一问题, 存在 U 中一开集 W 使得 $\boldsymbol{x}$ 映射 W 到 $G\cap G^*=G^*$ 上. 因为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}^*$ 都是一一的, 有 W 到 V^* 上的一一映射 $x_1=x_1(u, v)$, $x_2=x_2(u, v)$ 使得在 W 上 $\boldsymbol{x}(u, v)=\boldsymbol{x}^*(x_1(u, v), x_2(u, v))$. 剩下证 $x_1=x_1(u, v)$, $x_2=x_2(u, v)$ 是 C^m 类的和 $\partial(x_1, x_2)/\partial(u, v)\neq0$. 因为 $x_1=x_1(u, v)$ 和 $x_2=x_2(u, v)$ 就是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 的前两个分量, $\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 C^m 类的, 因此 $x_1=x_1(u, v)$ 和 $x_2=x_2(u, v)$ 是 C^m 类的. 最后, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(x_1, x_2)$ 的 Jacobi 矩阵的秩在每一点是 2, 两个函数在每个点的微分是它们各自的平面中的向量到 E^3 中一平面的一一线性映射. 我们知道复合函数的微分是单个映射的复合线性映射. 于是 $x_1=x_1(u, v)$, $x_2=x_2(u, v)$ 在每个点的微分是 uv 平面中的向量到 x_1x_2 平面中的向量的一一线性映射. 故 $x_1=x_1(u, v)$, $x_2=x_2(u, v)$ 的 Jacobi 矩阵的秩在每一点也是 2; 即对于所有 (u, v),

$$\begin{vmatrix}\partial x_1/\partial u & \partial x_1/\partial v\\ \partial x_2/\partial u & \partial x_2/\partial v\end{vmatrix}\neq0,$$

问题得证.

8.16 证明定理 8.3, 即在 C^m 类简单曲面 S 上的两个搭接的坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$ 上, 证明参数间有定义在一开集上的 C^m 类一一变换 $\theta=\theta(u, v)$, $\phi=$

$\phi(u, v)$的关系，且对所有(u, v)，有$\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v)\neq 0$.

证明：由问题 8.14，存在分别在 uv 平面和 $\theta\phi$ 平面上的开集 W 和 W^*，它们被映射到坐标曲面片的交上，和一个从 W 到 W^* 的一一映射 $\theta=\theta(u, v)$，$\phi=\phi(u, v)$，它使得

$$\boldsymbol{x}(u, v)=\boldsymbol{x}^*(\theta(u, v), \phi(u, v)).$$

剩下只要证明 $\theta(u, v)$和 $\phi(u, v)$是 C^m 类的，且对于 W 中所有(u, v)，$\partial(\theta,\phi)/\partial(u, v)\neq 0$.

设(u_0, v_0)是 W 中在 S 有象 P 的点．由定理 8.1，存在 S 中包含 P 的 Monge 片

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x_1, x_2)=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3(x_1, x_2)\boldsymbol{e}_3,$$

由前一问题，存在包含(u_0, v_0)的开集 V 到 x_1x_2 平面中开集 V^{**} 的一一映射 $x_1=x_1(u, v)$，$x_2=x_2(u, v)$，它在 V 中是 C^m 类的，且 $\partial(x_1, x_2)/\partial(u, v)\neq 0$．而且还存在 $\theta\phi$ 平面中包含$(\theta(u_0, v_0), \phi(u_0, v_0))$的开集 V^* 到 V^{**} 的一一映射 $x_1=x_1(\theta, \phi)$，$x_2=x_2(\theta, \phi)$，它在 V^* 上是 C^m 类的，且 $\partial(x_1, x_2)/\partial(\theta, \phi)\neq 0$．由反函数定理，逆映射 $\theta=\theta(x_1, x_2)$，$\phi=\phi(x_1, x_2)$ 是 C^m 类的，且 $\partial(\theta, \phi)/\partial(x_1, x_2)\neq 0$．于是 $\theta=\theta(u, v)=\theta(x_1(u, v), x_2(u, v))$和

$$\phi=\phi(u, v)=\phi(x_1(u, v), x_2(u, v))$$

在 V 上是 C^m 类的，且

$$\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)}=\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(x_1, x_2)}\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}\neq 0.$$

因为 V 包含(u_0, v_0)，而(u_0, v_0)是 W 中任意一点．因此，$\theta=\theta(u, v)$，$\phi=\phi(u, v)$在 W 中是 C^m 类的，且在 W 中，有 $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v)\neq 0$.

3. 切面和法线

8.17 求下式表示的曲面在对应于 $u=1$，$v=1$ 的点的切面和法线方程：

$$\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2-v^2)\boldsymbol{e}_3.$$

解：
$$\boldsymbol{x}(1, 1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{x}_u(1, 1)=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x}_v(1, 1)=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3,$$

于是
$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{x}(1, 1)+h\boldsymbol{x}_u(1, 1)+k\boldsymbol{x}_v(1, 1)\\&=(1+h)\boldsymbol{e}_1+(1+k)\boldsymbol{e}_2+2(h-k)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

是在 $\boldsymbol{x}(1, 1)$的切平面．

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{x}_u(1, 1)\times\boldsymbol{x}_v(1, 1)}{|\boldsymbol{x}_u(1, 1)\times\boldsymbol{x}_v(1, 1)|}=\frac{1}{3}\ (-2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$

于是
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}(1, 1)+k\boldsymbol{N}(1, 1)=\left(1-\frac{2}{3}k\right)\boldsymbol{e}_1+\left(1+\frac{2}{3}k\right)\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}k\boldsymbol{e}_3,$$

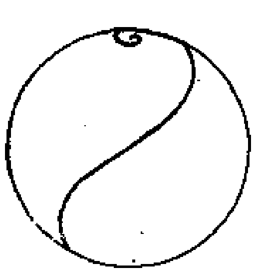


图 8-24

或令 $t=k/3$.

$$\boldsymbol{y}=(1-2t)\boldsymbol{e}_1+(1+2t)\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3,\quad -\infty<t<\infty,$$

是在 $\boldsymbol{x}(1, 1)$的法线方程．

8.18 证明曲线 $\theta=\log t$，$\phi=2\arctan t$，$t>0$，在球面

$$\boldsymbol{x}=(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2+(\cos\phi)\boldsymbol{e}_3$$

上的象与经线，ϕ 参数曲线，交成 $\pi/4$ 的定角，注意当 t 从 0 变到 1，再到 ∞ 时，角 θ 从 $-\infty$ 变到 0 再到 ∞，角 ϕ 从 0 变到 $\pi/2$ 再到 π．于是曲线绕着南北极成螺旋形，如图 8-24 所示．

证：
$$\boldsymbol{x}_\theta=(-\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{x}_\phi=(\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_2+(\sin\phi)\boldsymbol{e}_3.$$

$$\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=\sin^2\phi,\ \boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\phi=0,\ \boldsymbol{x}_\phi\cdot\boldsymbol{x}_\phi=1,$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{t},\quad \frac{d\phi}{dt}=\frac{2}{1+t^2}.$$

曲面上曲线的切线 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{x}_\theta\frac{d\theta}{dt}+\boldsymbol{x}_\phi\frac{d\phi}{dt}$ 与 ϕ 参数曲线的切线 $\boldsymbol{x}_\phi$ 之间夹角 α 的余弦是

$$\cos\alpha=\frac{(d\boldsymbol{y}/dt)\cdot\boldsymbol{x}_\phi}{|d\boldsymbol{y}/dt|\,|\boldsymbol{x}_\phi|}=\frac{d\phi}{dt}\left[\sin^2\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\left[\frac{\sin^2(2\arctan t)}{t^2}+\frac{4}{(1+t^2)^2}\right]^{-1/2}$$

$$=\frac{2}{1+t^2}\left[\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(1+t^2)^2}\right]^{-1/2}=1/\sqrt{2}.$$

于是 $\alpha=\pi/4=$常数，这就是所求证的结果.

8.19 证明沿(a)柱面(b)-曲线的切线曲面的一个分支的一条母线的所有点的切面重合.

证：(a)柱面的直纹形式表示是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)+v\boldsymbol{g},\quad \boldsymbol{g}=\text{常矢}\neq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}\neq\boldsymbol{0},$$

这里 $\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{y}',\ \boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{x}_t\times\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}$ 和 $N=\frac{\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}}{|\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}|}$.

因为 N 不依赖于沿母线的参数 v，问题得证.

(b)没有拐点的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$ 的切线曲面由下述表示确定

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{t}(s)$$

这曲面在 $v=0$ 处，即沿曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$ 不是正则的，它分为对应于 $v>0$ 和 $v<0$ 的两支. 对于 $v>0$,

$$\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{t}+v\dot{\boldsymbol{t}},\quad \boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{t},\quad \boldsymbol{x}_s\times\boldsymbol{x}_v=(\boldsymbol{t}+v\dot{\boldsymbol{t}})\times\boldsymbol{t}=v\dot{\boldsymbol{t}}\times\boldsymbol{t}$$

和

$$N=\frac{\boldsymbol{x}_s\times\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_s\times\boldsymbol{x}_v|}=\frac{\dot{\boldsymbol{t}}\times\boldsymbol{t}}{|\dot{\boldsymbol{t}}\times\boldsymbol{t}|}$$

不依赖于沿母线的参数. 类似的计算对 $v<0$ 亦成立.

4. 简单曲面的拓扑性质

8.20 若 $f(\boldsymbol{x})$ 对于 E^3 的所有 $\boldsymbol{x}$ 连续，证明 E^3 中满足 $f(\boldsymbol{x})=C=$常数的点集 M 是闭集.

证：假设 $\boldsymbol{x}_0$ 是在 M 的余集 M^C 中，则 $f(\boldsymbol{x}_0)=C^*\neq C$. 因为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续并对所有 $\boldsymbol{x}$ 有定义，有 $\delta>0$，使得对于 $S_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 中所有 $\boldsymbol{x}$,

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\frac{1}{2}|C-C^*|,\quad \text{或}\quad |f(\boldsymbol{x})-C^*|<\frac{1}{2}|C-C^*|.$$

因此对于 $S_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 中所有 $\boldsymbol{x}$, $f(\boldsymbol{x})\neq C$. 于是 $S_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 中所有 $\boldsymbol{x}$ 也在 M^C 中. 因为 $\boldsymbol{x}_0$ 是 M^C 中任意一点，因此 M^C 是开集. 所以 M 是闭集，证毕.

8.21 利用问题 8.20，确定下列曲面哪个是紧致的：

(a) $x_1^2+x_2^2x_3^2=1$, (b) $x_1^2+x_2^4+x_3^6=1$.

证: (a) 由问题 8.20, 满足 $x_1^2+x_2^2x_3^2=1$ 的点集是闭的, 但是它不是有界的. 因为令 $x_1=1/\sqrt{2}$ 时, 则方程变为 $x_2^2=1/2x_3^2$, 而对于任意大的 x_2 而足够小的 x_3, 此式可以被满足. 于是曲面不是紧致的.

(b) 满足 $x_1^2+x_2^4+x_3^6=1$ 的点集是闭的, 它还是有界的. 事实上它由 $|x_1|\leqslant 1$, $|x_2|\leqslant 1$, $|x_3|\leqslant 1$ 界定.

8.22 证明定理 8.5: 若 S 和 T 是简单曲面, 其中 S 是闭集, T 是连通集, S 包含在 T 中, 则 S 作为 E^3 中的点集等于 T.

证: 假设 $S\neq T$. 设 M^* 是 T 中不在 S 中的点集. 注意 $M^*\neq\varnothing$. $M^*\cup S=T$ 和 $M^*\cap S=\varnothing$. 现在设 P 是 S 中任意一点. 我们想证明 E^3 中有一包含 P 的开集 O_P 使得 $O_P\cap T\subset S$. 设 G 是 S 中一包含 P 的坐标曲面片的象, 则有一开集 O_P 使得 $O_P\cap S=G$. 但 G 也是 T 中一坐标曲面片. 于是 $O_P\cap T=G\subset S$. 现在设 Q 是 M^* 中一点. 因为 S 是闭的和 $Q\notin S$, 有一邻域 $S(Q)$ 使得 $S(Q)\cap S=\varnothing$. 所以 $S(Q)\cap T\subset M^*$. 设 $O_1=\bigcup_P O_P$ 和 $O_2=\bigcup_Q S(Q)$, 则 O_1 和 O_2 是开的, 且两者与 T 有非空不相交的交, 即 S 和 M^*. 但这是不可能的, 因为 T 是连通的. 定理得证.

8.23 证明定理 8.4: 若 S 是连通简单曲面, 则 S 是由正则弧所连接的.

证: 假设 S 是连通的, 而 P 和 Q 是 S 中不能用正则弧连接的两点. 设 M_1 是 S 中可与 P 连接的点的集合, M_2 是不可能与 P 连接的点的集合. 注意 $M_2\neq\varnothing$. 现设 $P^*\in M_1$. 我们想证明有一包含 P^* 的开集 O_{P^*} 使得 $O_{P^*}\cap S\subset M_1$. 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$ 是包含 P^* 的坐标曲面片, C 是从 P 到 P^* 的正则弧, 而 $(u_0,\ v_0)$ 是参数平面中映射到 P^* 的点. 在参数平面中, C 是有端点 $(u_0,\ v_0)$ 的正则曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$, 如图 8-25 所示. 现设 $S(u_0,\ v_0)$ 是 (u_0, v_0)-邻域, $\boldsymbol{x}$ 定义在其上. 注意 $S(u_0, v_0)$ 存在, 因为 $\boldsymbol{x}$ 定义在一开集上. 易见 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 可以作为正则弧延长到 $S(u_0, v_0)$ 中任意点 $(u,\ v)$. 映射 $\boldsymbol{x}$ 限制在 $S(u_0, v_0)$ 时是 S 上的一个坐标曲面片, 它的所有点可以与 P^*, 故可以与 P 连接. 但作为 S 中一坐标曲面片, 它是一个开集 O_{P^*} 与 S 的交, 于是有 E^3 中一包含 P^* 的开集 O_{P^*} 使得 $O_{P^*}\cap S\subset M_1$. 类似的论证可证明若 Q^* 是 M_2 中一点, 则存在一包含 Q^* 的开集 O_{Q^*} 使得 $O_{Q^*}\cap S\subset M_2$. 现设 $O_1=\bigcup_{P^*}O_{P^*}$ 和 $O_2=\bigcup_{Q^*}O_{Q^*}$. 集合 O_1 和 O_2 是开的, 覆盖 S, 且与 S 有非空不相交的交, 即 M_1 和 M_2, 但这是不可能的. 因为 S 是连通的, 定理得证.

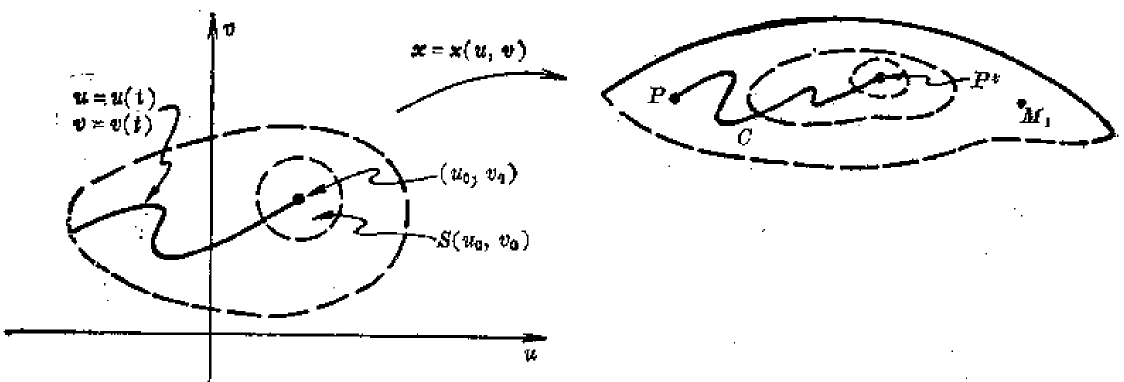


图 8-25

§8.3 补 充 题

8.24 证明 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}(u+v)\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}(u-v)\boldsymbol{e}_2+uv\boldsymbol{e}_3$ 是双曲抛物面 $x_3=x_1^2-x_2^2$ 的 C^∞ 类正则参数表示，描述它的 u 参数曲线和 v 参数曲线.

8.25 求通过 x_1x_2 平面中的椭圆 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$ 的正柱面的一个正则参数表示.

8.26 求椭圆面 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ 的坐标曲面片的一个基.

8.27 若 G 和 G^* 是简单曲面 S 上两坐标曲面片的象，证明 S 中存在坐标曲面片，它的象等于 $G\cap G^*$.

8.28 证明旋转曲面 $\boldsymbol{x}=f(u)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+f(u)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g(u)\boldsymbol{e}_3$, $f>0$ 的单位法向量是 $N=[(-g'\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(g'\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+f'\boldsymbol{e}_3]/[(f')^2+(g')^2]^{1/2}$.

8.29 证明双曲面 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$ 是双直纹面.

8.30 求 $\boldsymbol{x}=(u+v)\boldsymbol{e}_1+(u-v)\boldsymbol{e}_2+uv\boldsymbol{e}_3$ 在 $u=1$, $v=-1$ 的切面和法线方程.

8.31 证明环面的表示

$$\boldsymbol{x}=(b+a\sin\phi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\phi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3$$

限制在下列三个开集时构成环面的一个基:

(a) $0<\theta<2\pi$, $0<\phi<2\pi$,

(b) $-\pi<\theta<\pi$, $-\pi<\phi<\pi$,

(c) $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi<\phi<\frac{3}{2}\pi$.

8.32 求以 $\boldsymbol{y}=u\boldsymbol{e}_1+u^2\boldsymbol{e}_2+u^3\boldsymbol{e}_3$, $u>0$ 为底曲线，$\boldsymbol{g}=(\cos u)\boldsymbol{e}_1+(\sin u)\boldsymbol{e}_2$ 为直母线方向的直纹形式的表示. 证明该表示是正则的和 C^∞ 类的.

8.33 锥面是母线通过一定点 P 的直纹面，定点 P 称为锥面的顶点. 若 $\boldsymbol{g}(u)$ 是沿母线方向的非零向量，证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}+v\boldsymbol{g}(u)$ 是锥面的 C^m 类正则参数表示，若 $v\neq0$, $\boldsymbol{g}$ 是 C^m 类的，且 $\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}'\neq\boldsymbol{0}$.

8.34 证明沿锥面的母线有固定的切面.

8.35 正螺面是其母线以固定速度绕轴旋转的正劈锥曲面(见问题8.6). 证明以 x_3 轴为轴的正螺面有如下表示

$$\boldsymbol{x}=(v\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(v\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a+b\theta)\boldsymbol{e}_3,\quad b\neq0.$$

8.36 当点 P 沿正螺面的母线运动时(见问题8.35)证明这时单位法线绕母线转动，使得它与轴的交角从在 0 的 $\frac{\pi}{2}$ 变到在 ∞ 的 0. 证明此交角的正切与到轴的距离成反比.

8.37 证明沿一曲线的切线曲面的母线的切面与曲线在该母线的切点的密切平面重合.

8.38 Moebius 带可以表示为直纹面

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(\theta)+v\boldsymbol{g}(\theta),\quad -\frac{1}{2}<v<\frac{1}{2},$$

这里

$$\boldsymbol{y}(\theta)=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$$

和 $$\boldsymbol{g}(\theta)=\left(\sin\frac{1}{2}\theta\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)\boldsymbol{e}_3,$$

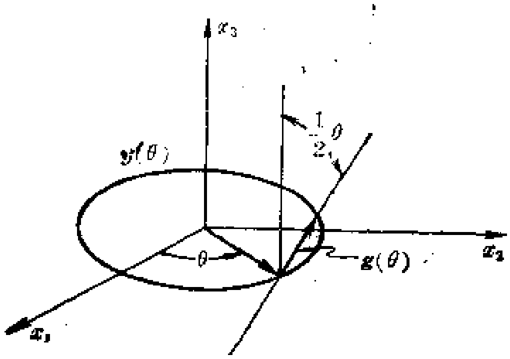


图 8-26

验证单位法向量绕圆

$$\boldsymbol{y}=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$$

连续转一周时改变为相反的方向. 见图 8-26.

8.39 若在问题 8.38 中的 Moebius 带中去掉一个圆 $\boldsymbol{x}=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$. 证明所得曲面是连通的和可定向的.

8.40 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$ 是 C^m 类坐标曲面片 $x=\boldsymbol{x}(u,v)$ 上的 C^m 类正则曲线, 证明它的象 $u=u(t)$, $v=v(t)$是参数平面中的 C^m 类正则曲线.

8.41 证明锥面 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$, $(x_1, x_2, x_3)\neq(0, 0, 0)$, 是 C^∞ 类初等曲面.

8.42 若 $\boldsymbol{T}$ 是平行于简单曲面在点 P 的切面的非零向量, 证明曲面上有一过 P 的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$ 使得在 P 点 $\boldsymbol{T}=d\boldsymbol{y}/dt$.

8.43 确定下列曲面中哪一个是紧致的:

(a) $x_1^2-x_2^4+x_3^4=1$, (b) $x_1^2-2x_1+x_2^2+x_3^4=1$.

答: (a) 非紧致; (b) 紧致.

8.44 设 C 是 uv 平面中有端点 (u_0, v_0) 的 C^1 类正则弧, $S(u_0, v_0)$ 是 (u_0, v_0) 的任意邻域. 证明 C 可以作为 $S(u_0, v_0)$ 中一个 C^1 类正则弧延续到 $S(u_0, v_0)$ 中任意一点 (u^*, v^*).

8.45 若 S 是连通可定向简单曲面, 证明存在一个且仅有一个划分, 把 S 中所有坐标曲面片的集合 F 分为非空不相交集合 F_1 和 F_2, 使得对于每个 F_i, $i=1, 2$, (i) F_i 是一个基, (ii) 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$ 在 F_i 中, 则在交上有 $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi)>0$, (iii) F_i 是最大的, 即若把 S 中任意一坐标曲面片再加进 F_i 中, 则性质(ii)不成立.

第九章　第一和第二基本形式

§9.1　基 本 内 容

1. 第一基本形式

前面讲过，在 E^3 中的曲线是用两个局部不变量即作为弧长参数的函数的曲率和挠率唯一确定，类似地，在 E^3 中的曲面用称为第一和第二基本形式的局部不变量唯一确定。

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是类 $\geqslant 1$ 的曲面上的坐标片（简称片）。我们知道，映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 在 (u, v) 的微分是 $d\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv$. 它把 uv 平面的向量 (du, dv) 一一线性映射到平行于 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 的切平面上的向量 $\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv$，如图 9-1 所示，注意，对 uv 平面上坐标函数的微分和向量的分量，我们都用符号 du, dv. 同样，我们也用 $d\boldsymbol{x}$ 表示映射的像 $\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv$，我们知道，$d\boldsymbol{x}$ 有以下性质，即

$$\boldsymbol{x}(u+du,\ v+dv)=\boldsymbol{x}(u,\ v)+d\boldsymbol{x}+\boldsymbol{o}((du^2+dv^2)^{1/2}).$$

于是向量 $d\boldsymbol{x}$ 是从片上的点 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 到邻近点 $\boldsymbol{x}(u+du, v+dv)$ 的向量 $\boldsymbol{x}(u+du, v+dv)-\boldsymbol{x}(u, v)$ 的一阶近似.

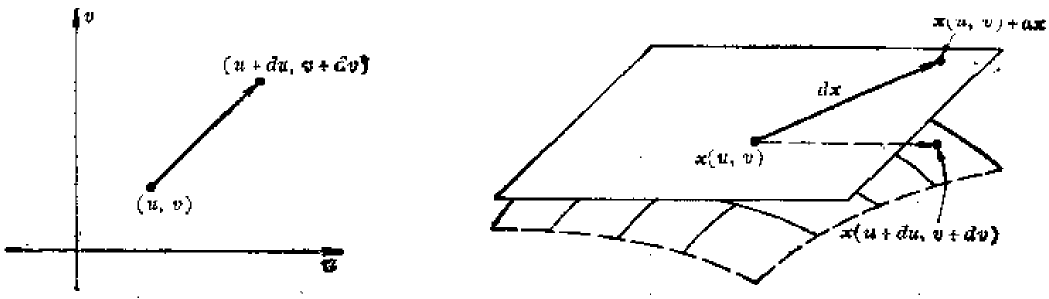


图 9-1

现在，我们研究量

$$\begin{aligned}I=d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}&=(\boldsymbol{x}_u d_u+\boldsymbol{x}_v d_v)\cdot(\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv)\\&=(\boldsymbol{x}_u\cdot\ \boldsymbol{x}_u)du^2+2(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v)du\cdot dv+(\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v)dv^2\\&=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,\end{aligned}$$

其中我们令

$$E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u,\ F=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v,\ G=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v. \tag{9.1}$$

函数 $I=d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ 称为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 的*第一基本形式*. 它是 du, dv 的二次齐次函数，系数 E, F, G 称为*第一基本系数*. 它是 u, v 的函数，随坐标片上点的不同而变化，于是，第一基本形式 I 是定义在 uv 平面上的向量 (du, dv) 的二次形式. 即

$$I(du,\ dv)=Edu^2+2F\,du\,dv+Gdv^2.$$

前面讲过，$d\boldsymbol{x}$ 是从片上的点 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 到点 $\boldsymbol{x}(u+du, v+dv)$ 的向量 $\boldsymbol{x}(u+du, v+dv)-\boldsymbol{x}(u, v)$ 的主要部份，可以证明，I 只依赖于曲面本身而与曲面的特殊表示无关. 事实上，设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$ 是包含点 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 的一个邻域的另一坐标片，变数变换 $\theta=\theta(u, v)$, $\phi=$

$\phi(u, v)$在(u, v)可微，$d\theta=\theta_u du+\theta_v dv$，$d\phi=\phi_u du+\phi_v dv$. 它把向量$(du, dv)$映射成向量$(d\theta, d\phi)$. 以下证明$I$与表示无关，即在这个对应下，$I$和$I^*$是相等的：

$$I(du, dv)=I^*(d\theta, d\phi).$$

用链法则来证明这个式子.

$$\begin{aligned}I^*(d\theta, d\phi)&=|d\boldsymbol{x}^*|^2=|(\boldsymbol{x}_\theta^* d\theta+\boldsymbol{x}_\phi^* d\phi)|^2=|\boldsymbol{x}_\theta^*(\theta_u du+\theta_v dv)+\boldsymbol{x}_\phi^*(\phi_u du+\phi_v dv)|^2\\&=|(\boldsymbol{x}_\theta^*\theta_u+\boldsymbol{x}_\phi^*\phi_u)du+(\boldsymbol{x}_\theta^*\theta_v+\boldsymbol{x}_\phi^*\phi_v)dv|^2=|\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv|^2=|d\boldsymbol{x}|^2\\&=I(du, dv).\end{aligned}$$

但是第一基本系数本身在参数变换下不是不变量. 事实上把E, F, G变换为

$$\begin{aligned}E&=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=(\boldsymbol{x}_\theta^*\theta_u+\boldsymbol{x}_\phi^*\phi_u)\cdot(\boldsymbol{x}_\theta^*\theta_u+\boldsymbol{x}_\phi^*\phi_u)\\&=\boldsymbol{x}_\theta^*\cdot\boldsymbol{x}_\theta^*\theta_u^2+2\boldsymbol{x}_\theta^*\cdot\boldsymbol{x}_\phi^*\theta_u\phi_u+\boldsymbol{x}_\phi^*\cdot\boldsymbol{x}_\phi^*\phi_u^2\\&=E^*\theta_u^2+2F^*\theta_u\phi_u+G^*\phi_u^2.\end{aligned}\tag{9.2}$$

同理

$$\begin{aligned}F&=E^*\theta_u\theta_v+F^*(\theta_u\phi_v+\phi_u\theta_v)+G^*\phi_u\phi_v,\\G&=E^*\theta_v^2+2F^*\theta_v\phi_v+G^*\phi_v^2.\end{aligned}\tag{9.3}$$

最后，注意第一基本形式是正定的，即$I\geqslant 0$，并且当且仅当$du=0$，$dv=0$时$I=0$. 事实上，显然$I=|d\boldsymbol{x}|^2\geqslant 0$，且因为$\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$线性无关，$I=|d\boldsymbol{x}|^2=|\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv|^2=0$当且仅当$du=0$和$dv=0$.

因为I是正定的，它的系数必须满足$E>0$，$G>0$和$EG-F^2\geqslant 0$，这也能直接证明，因为$\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$线性无关，$\boldsymbol{x}_u\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}_v\neq 0$，因此$E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=|\boldsymbol{x}_u|^2>0$，$G=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v=|\boldsymbol{x}_v|^2>0$.

用向量恒等式[F_8]，求得

$$\begin{aligned}EG-F^2&=(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u)(\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v)-(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v)(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v)=(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)\\&=|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|^2.\end{aligned}\tag{9.4}$$

在每一点$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq 0$，所以$EG-F^2>0$.

例 9.1 研究用$\boldsymbol{x}=(u+v)\boldsymbol{e}_1+(u-v)\boldsymbol{e}_2+uv\boldsymbol{e}_3$给出的曲面，这里$\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3$，

$$E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=2+v^2,\ F=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v=uv, G=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v=2+u^2.$$

$$I=Edu^2+2F\,du\,dv+Gdv^2=(2+v^2)du^2+2uv\,du\,dv+(2+u^2)dv^2.$$

注意，在所有点(u, v)，$E>0$，$G>0$，$EG-F^2=4+2u^2+2v^2>0$，若我们引进$\theta=u+v$，$\phi=u-v$，则曲面也可表示为

$$\boldsymbol{x}=\theta\boldsymbol{e}_1+\phi\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{4}(\theta^2-\phi^2)\boldsymbol{e}_3,$$

这里$\boldsymbol{x}_\theta=\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\theta\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{x}_\phi=\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{e}_3$，

$$E^*=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=1+\frac{1}{4}\theta^2,\ F^*=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\phi=-\frac{1}{4}\theta\phi, G^*=\boldsymbol{x}_\phi\cdot\boldsymbol{x}_\phi=1+\frac{1}{4}\phi^2.$$

注意在点$(u, v)=(1, 1)$有$E=3$，$F=1$，$G=3$. 在同一点$(\theta, \phi)=(2, \theta)$有$E^*=2$，$F^*=0$，$G^*=1$所以第一基本系数不是不变量.

2. 弧长和曲面面积

第一基本系数在计算弧长，交角和曲面的面积中起着重要的作用.

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(t), v(t))$，$a\leqslant t\leqslant b$是在曲面片$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$上的正则弧，正则弧的弧长为

积分

$$S=\int_a^b\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|dt=\int_a^b\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^{1/2}dt$$
$$=\int_a^b\left[\left(\boldsymbol{x}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{dt}\right)\cdot\left(\boldsymbol{x}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{dt}\right)\right]^{1/2}dt.$$

展开得

$$S=\int_a^b\left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^{1/2}dt. \tag{9.5}$$

这样在曲面上正则弧的弧长是第一基本形式的平方根的积分.

设 $d\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv$, $\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_u\delta u+\boldsymbol{x}_v\delta v$ 是两个平行于点 $\boldsymbol{x}$ 的切平面的向量, 如果 α 是 $d\boldsymbol{x}$ 和 $\delta\boldsymbol{x}$ 之间的交角, 则

$$\cos\alpha=\frac{d\boldsymbol{x}\cdot\delta\boldsymbol{x}}{|d\boldsymbol{x}||\delta\boldsymbol{x}|}=\frac{(\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv)\cdot(\boldsymbol{x}_u\delta u+\boldsymbol{x}_v\delta v)}{|\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv||\boldsymbol{x}_u\delta u+\boldsymbol{x}_v\delta v|}$$
$$=\frac{E\,du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,dv\,\delta v}{[E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2]^{1/2}[E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2]^{1/2}}. \tag{9.6}$$

特别, 如果 β 是曲面的 u 参数曲线和 v 参数曲线之间的交角, 即是 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 之间的交角, 则

$$\cos\beta=\frac{\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u||\boldsymbol{x}_v|}=\frac{\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v}{\sqrt{\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u}\sqrt{\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v}}=\frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{9.7}$$

作为上述的结果, 我们有

定理 9.1 (a) 切向量 $d\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv$ 和 $\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_u\delta u+\boldsymbol{x}_v\delta v$ 互相垂直的充分必要条件是

$$E\,du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,dv\,\delta v=0.$$

(b) u 参数曲线和 v 参数曲线互相垂直的充分必要条件是 $F=0$.

例 9.2 研究曲线 $\theta=\log\cot(\pi/4-t/2)$, $\phi=\pi/2-t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 在单位球面 $\boldsymbol{x}=(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\cdot\sin\phi)\boldsymbol{e}_2+(\cos\phi)\boldsymbol{e}_3$ 上的象, 如图 9-2 所示, 曲线从赤道出发在北极附近象螺线那样缠绕, 我们计算它的弧长.

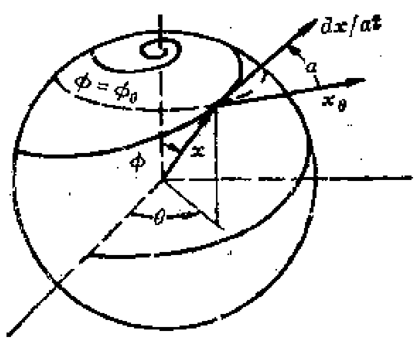


图 9-2

$$\boldsymbol{x}_\theta=(-\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{x}_\phi=(\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_2-(\sin\phi)\boldsymbol{e}_3,$$
$$E=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=\sin^2\phi\cdot F=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\phi=0,$$
$$G=\boldsymbol{x}_\phi\cdot\boldsymbol{x}_\phi=1.$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\cos\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}{2\cot(\pi/4-t/2)}=\frac{1}{2\sin(\pi/4-t/2)\cos(\pi/4-t/2)}$$
$$=\frac{1}{\sin(\pi/2-t)}\quad\frac{d\phi}{dt}=-1.$$

沿曲线 $$\frac{I}{dt^2}=E\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+2F\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}+G\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=\frac{\sin^2\phi}{\sin^2(\pi/2-t)}+1=2.$$
$$S=\int_0^{\pi/2}\sqrt{I}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2}\,dt=\pi/\sqrt{2}.$$

注意曲线和平行圆($\phi=$常数)作成定角 α. 因为 $\phi=\frac{\pi}{2}-t$

$$\cos\alpha=\cos\angle\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{x}_\theta\right)=\frac{\left(\boldsymbol{x}_\theta\frac{d\theta}{dt}+\boldsymbol{x}_\phi\frac{d\phi}{dt}\right)\cdot\boldsymbol{x}_\theta}{\left|\boldsymbol{x}_\theta\frac{d\theta}{dt}+\boldsymbol{x}_\phi\frac{d\phi}{dt}\right||\boldsymbol{x}_\theta|}=\frac{E\frac{d\theta}{dt}+F\frac{d\theta}{dt}}{\frac{\sqrt{I}}{dt}\cdot\sqrt{E}}$$

$$=\left(\frac{\sin^2\phi}{\sin(\pi/2-t)}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sin\phi}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

现在设 ΔR 是片上的小区域, ΔR 是由邻近的 v 参数曲线(u 和 $u+du$)和邻近的 u 参数曲线(v 和 $v+dv$)为边的曲线四边形, 如图 9-3 所示.

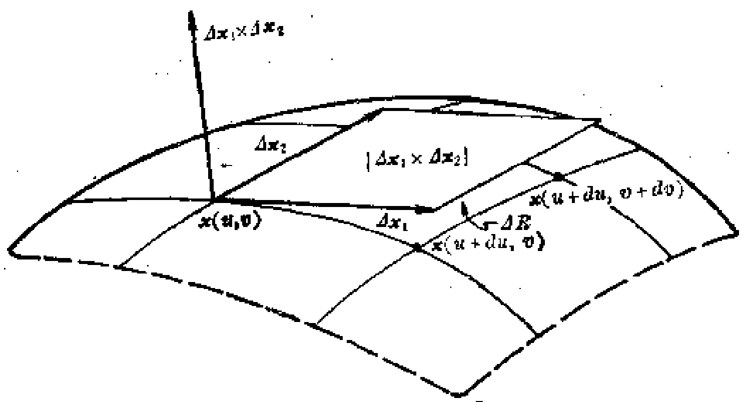


图 9-3

我们取边为向量 $\Delta\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_u du$ 和 $\Delta\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_v dv$ 的平行四边形面积作为 ΔR 面积的一阶近似, 设 $du>0$, $dv>0$, 即是量

$$\Delta S=|\Delta\boldsymbol{x}_1\times\Delta\boldsymbol{x}_2|=|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|du\,dv=\sqrt{EG-F^2}du\,dv.$$

这样我们把在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 上区域 R 的面积定义为下面的二重积分 (如果积分存在的话)

$$A=\iint_W\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,\tag{9.8}$$

其中 W 是参数平面上的点集, W 中每一点被映射到 R 上.

注意在定向曲面上, 上面面积的定义是与 R 的特殊表示无关的. 事实上设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta,\phi)$ 是另一包含 R 的片, 使对所有$(u, v)\in W$, $\dfrac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)}>0$.

从方程(9.2)和(9.3)容易算得

$$EG-F^2=(E^*G^*-F^{*2})[\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v)]^2.\tag{9.9}$$

从二重积分的变换公式得到

$$A=\iint_W\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\iint_W\sqrt{E^*G^*-F^{*2}}\,\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)}du\,dv$$

$$=\iint_{W^*}\sqrt{E^*G^*-F^{*2}}d\theta\,d\phi=A^*.$$

其中 W^* 是 W 在 $\theta\phi$ 平面上的像, 这就是所要的结果.

例 9.3 研究环面(参看例 8.5)

$$\boldsymbol{x}=(b+a\sin\phi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\phi)\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2+(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,$$

这里 $E=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=(b+a\sin\phi)^2$, $F=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\phi=0$, $G=\boldsymbol{x}_\phi\cdot\boldsymbol{x}_\phi=a^2$, 曲面面积是

$$S=\iint\limits_{\substack{0<\theta<2\pi\\0<\phi<2\pi}}\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\phi=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}a(b+a\sin\phi)d\phi\right]d\theta=4\pi^2ab.$$

3. 第二基本形式

我们现在设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是类 $\geqslant 2$ 的曲面片，则在片上每一点存在单位法向量 $\boldsymbol{N}=\dfrac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|}$，它是 u, v 的 C^1 类函数，$\boldsymbol{N}$ 的微分为 $d\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_u dv+\boldsymbol{N}_v dv$，注意在图 9-4($a$)中，$d\boldsymbol{N}$ 垂直于 $\boldsymbol{N}$，因为 $d\boldsymbol{N}$ 平行于 $\boldsymbol{N}$ 的球面像的切平面，这也可以从 $0=d(1)=d(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N})=2d\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}$ 得到，这样 $d\boldsymbol{N}$ 是平行于 $\boldsymbol{x}$ 的切平面的向量，如图 9-4(b)所示.

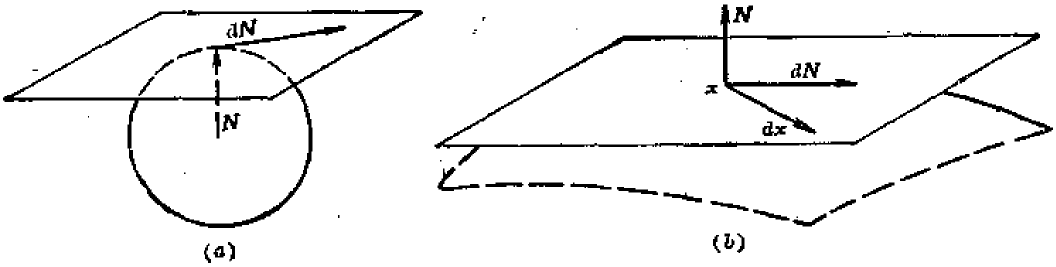


图 9-4

现在研究量

$$\begin{aligned}II&=-d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{N}=-(\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv)(\boldsymbol{N}_u du+\boldsymbol{N}_v dv)\\&=-\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_u du^2-(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_v+\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_u)du\,dv-\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_v dv^2\\&=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2,\end{aligned}$$

其中 $L=-\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_u,\ M=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_v+\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_u), N=-\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_v.$ (9.10)

函数 $II=-d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{N}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$ 称为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$的第二基本形式. II 也是 du, dv 的二次齐次函数，它的系数 L, M, N 是 u, v 的连续函数，称为第二基本系数.

容易证明：在保持 $\boldsymbol{N}$ 的指向的参数变换下 II 同 I 一样是不变量，否则 II 改变它的符号，II 的系数变换规律和第一基本系数一样，即是，如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\theta, \phi)$ 是曲面上的另一坐标片，则在二片的交集上，有

$$\begin{aligned}L&=L^*\theta_u^2+2M^*\theta_u\phi_u+N^*\phi_u^2,\\M&=L^*\theta_u\theta_v+M^*(\phi_u\theta_v+\theta_u\phi_v)+N^*\phi_u\phi_v,\\N&=L^*\theta_v^2+2M^*\theta_v\phi_v+N^*\phi_v^2,\end{aligned}$$

其中 $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v)>0$. (9.11)

II 的以上性质的证明留给读者作练习.

因为对所有(u, v)，$\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 都垂直于 $\boldsymbol{N}$，我们有

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N})_u=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_u,\\0&=(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N})_v=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_v,\\0&=(\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N})_u=\boldsymbol{x}_{vu}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_u,\\0&=(\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N})_v=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_v.\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_u,\quad \boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{N}_v=-\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_u,$$
$$\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{N}_v.$$

从(9.10)得到 $L=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N},\ M=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{N},$

$$N=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}. \tag{9.12}$$

这就给出了 $L,\ M,\ N$ 的另一表达式,同样得到

$$II=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}du^2+2\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}\,du\,dv+\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}dv^2=d^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}, \tag{9.13}$$

其中 $d^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{uu}du^2+2\boldsymbol{x}_{uv}\,du\,dv+\boldsymbol{x}_{vv}dv^2$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在 $(u,\ v)$ 沿 $(du,\ dv)$ 方向的二阶微分.

例 9.4 研究用 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2-v^2)\boldsymbol{e}_3$ 表示的曲面. 这里 $\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{e}_1+2u\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{e}_2-2v\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x}_{uu}=2\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x}_{uv}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_{vv}=-2\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{N}=\dfrac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|}=(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}(-2u\boldsymbol{e}_1+2v\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$,这样第二基本系数是

$$L=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2},$$

$$M=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=0,$$

$$N=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=-2(4u^2+4v+1)^{-1/2}.$$

第二基本形式是

$$II=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$$
$$=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}(du^2-dv^2).$$

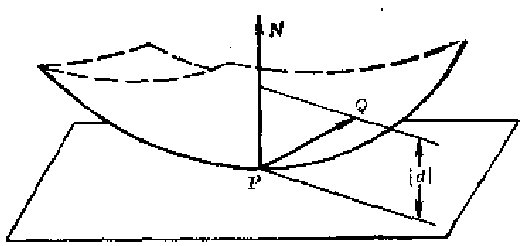


图 9-5

设 P 是类 $\geqslant 2$ 的曲面上的点, Q 是 P 邻近的点, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$ 是包含 P 和 Q 的片, 令 $d=\boldsymbol{PQ}\cdot\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{PQ}$ 在 P 点的单位法向量方向上的投影, 如图 9-5 所示, 注意 u 是正或负取决于 Q 和 $\boldsymbol{N}$ 是在 P 点的切平面的同侧还是异侧, $|d|$ 是 Q 到 P 点的切平面的垂直距离. 现在设 P 和 Q 分别为 $\boldsymbol{x}(u,\ v)$ 和 $\boldsymbol{x}(u+du,\ v+dv)$,用泰勒定理得到.

$$\boldsymbol{x}(u+du,\ v+dv)=\boldsymbol{x}(u,\ v)+d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{x}+O(du^2+dv^2).$$

这样,

$$\begin{aligned}d=\boldsymbol{PQ}\cdot\boldsymbol{N}&=(\boldsymbol{x}(u+du,\ v+dv)-\boldsymbol{x}(u,\ v))\cdot\boldsymbol{N}\\&=\left[d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{x}+O(du^2+dv^2)\right]\cdot\boldsymbol{N}\\&=d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}+O(du^2+dv^2).\end{aligned}$$

因为 $d\boldsymbol{x}$ 平行于 P 点的切平面, $d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}=0$, 所以, 从(9.13)得

$$d=\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}+O(du^2+dv^2)=\frac{1}{2}II+O(du^2+dv^2).$$

于是 II 是 $\boldsymbol{PQ}$ 在 $\boldsymbol{N}$ 上的投影的主部的两倍, $|II|$ 是 Q 点到 P 点的切平面的垂直距离的主部的两倍.

函数 $\delta=\dfrac{1}{2}II=\dfrac{1}{2}(L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2)$ 称为 P 点的密切抛物面, 抛物面的形状定性地确定曲面在 P 点邻近的形状,我们根据判别式 $LN-M^2$ 分四种情况讨论如下:

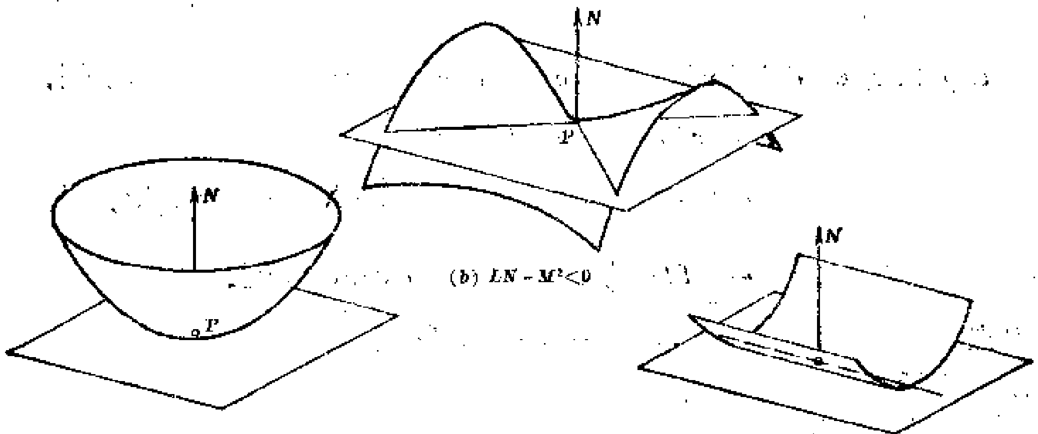
(i) 椭圆情况: 如果 $LN-M^2>0$, 称这种点为椭圆点. 在这情况下 δ 作为 $du,\ dv$ 的函数是椭圆抛物面,如图 9-6(a)所示. 注意 δ 对所有$(du,\ dv)$保持相同符号 在椭圆点的邻域,曲面落在这点的切平面的一侧,它的形状如图 9-6(a)所示.

(ii) 双曲情况,如果 $LN-M^2<0$, 称这种点为双曲点, 在这种情况下 δ 作为$(du,\ dv)$的函数是双曲抛物面,如图 9-6(b)所示,这时在过 P 的切面上存在两条不同的直线,它分别

平面成四个部份，在这四部份中 δ 交替地取正值和负值，在这两条直线上，$\delta=0$。在双曲点的邻域，曲面落在切平面的两侧，如图 9-6(b)所示。

(iii) 抛物情况：如果 $LN-M^2=0$，且 $L^2+M^2+N^2\neq0$，即 $LN-M^2=0$，且 L, M, N 不全为零，称这种点为**抛物点**。在这种情况下，δ 作为 (du, dv) 的函数是抛物柱面，如图 9-6(c)所示，这时在过 P 的切面上只有一条直线，沿这条直线 $\delta=0$。在其它情况下，δ 保持同号，值得注意的是曲面在抛物点的邻域，可以落在切平面的两侧，参见问题 9.8。

(iv) 平点情况：如果 $L=M=N=0$，称这种点为平点，此时对所有 (du, dv)，$\delta=0$。在这种情况下，曲面和切平面比前几种情况有更高阶切触。



(a) $LN-M^2>0$　(b) $LN-M^2<0$　(c) $LN-M^2=0$ $L^2+M^2+N^2\neq0$

图 9-6

在上面的讨论中，我们希望曲面上的点是椭圆点双曲点，抛物点或平点，不依赖于曲面的表达式，这是可以证明的，事实上，如果 $x=x^*(\theta, \phi)$ 是曲面上的任一其它坐标曲面片，从(9.11)可证明对两个坐标曲面片的交集上的点，有

$$L^*N^*-M^{*2}=\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}\right)^2(LN-M^2).$$

因为 $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi)\neq0$，推出 $L^*N^*-M^{*2}$ 是正、负或零和 $LN-M^2$ 一致，又从(9.11)也可以推得：

$$L=M=N=0,\ \text{当且仅当}\ L^*=M^*=N^*=0.$$

例 9.5 研究环面

$$\boldsymbol{x}=(b+a\sin\phi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(b+a\sin\phi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3\quad b>a,$$

这里

$$\boldsymbol{x}_{\theta\theta}=-(b+a\sin\phi)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(b+a\sin\phi)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{x}_{\theta\phi}=-(a\cos\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(a\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{x}_{\phi\phi}=-(a\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(a\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{N}=(-\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1-(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2-(\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,$$
$$L=\boldsymbol{x}_{\theta\theta}\boldsymbol{N}=(b+a\sin\phi)\sin\phi,\ M=\boldsymbol{x}_{\theta\phi}\cdot\boldsymbol{N}=0,\ N=\boldsymbol{x}_{\phi\phi}\cdot\boldsymbol{N}=a,$$
$$LN-M^2=a(b+a\sin\phi)\sin\phi.$$

注意第二基本系数仅依赖于 ϕ，沿平行圆 $\phi=\phi_0$，它们是常数，因为 $0<a<b$，$a(b+a\sin\phi)>0$。因此 $LN-M^2$ 的符号与 $\sin\phi$ 的符号一致，于是当 $0<\phi<\pi$ 时 $LN-M^2>0$，当 $\phi=0$ 或 $\phi=\pi$ 时，$LN-M^2=0$，当 $\pi<\phi<2\pi$ 时，$LN-M^2<0$，如图 9-7 所示，环面的外侧面的点

$(0<\phi<\pi)$ 是椭圆点，在这种点的邻域曲面落在切平面的一侧，环面的内侧面的点 $(\pi<\phi<2\pi)$ 是双曲点，在这种点的邻域，曲面落在切平面的两侧，环面的最高处的纬线(圆) $(\phi=0)$ 和最低处的纬线(圆) $(\phi=\pi)$ 的点是抛物点.

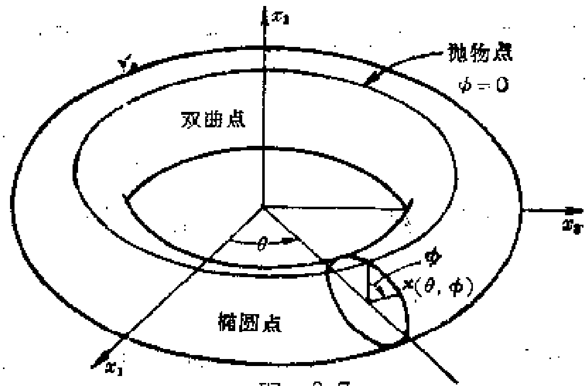


图 9-7

用 $\boldsymbol{x}(u, v)$ 展开式的更高次项来研究曲面在平点邻近的形状，即是，设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 C^3 类，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是平点，则

$$\boldsymbol{x}(u+du,\ v+dv)=\boldsymbol{x}(u,v)+d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{x}+\frac{1}{6}d^3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{O}[(du^2+dv^2)^{3/2}],$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}&=[\boldsymbol{x}(u+du,\ v+dv)-\boldsymbol{x}(u,\ v)]\cdot\boldsymbol{N}\\&=d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}+\frac{1}{6}d^3\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{O}[(du^2+dv^2)^{3/2}]\\&=\frac{1}{2}II+\frac{1}{6}d^3\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{O}[(du^2+dv^2)^{3/2}].\end{aligned}$$

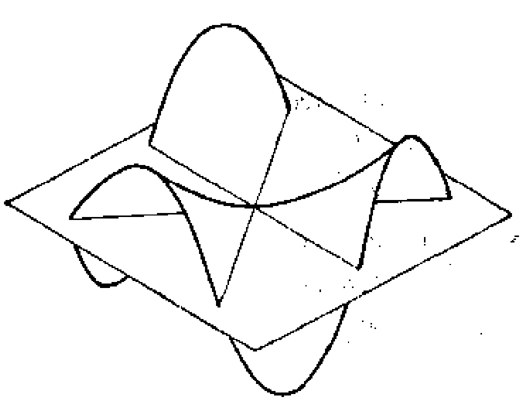
因为在 P 点 $\quad \boldsymbol{L}=M=\boldsymbol{N}=0,\ II=0,$

因此，曲面近似于

$$\begin{aligned}\delta&=\frac{1}{6}d^3\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{N}\\&=\frac{1}{6}[\boldsymbol{x}_{uuu}\cdot\boldsymbol{N}du^3+3\boldsymbol{x}_{uuv}\cdot\boldsymbol{N}du^2dv+3\boldsymbol{x}_{uvv}\cdot\boldsymbol{N}du\,dv^2+\boldsymbol{x}_{vvv}\cdot\boldsymbol{N}dv^3]\\&=\frac{1}{6}[A\,du^3+B\,du^2dv+C\,du\,dv^2+D\,dv^3].\end{aligned}$$

如果三次四项式 Ax^3+Bx^2+Cx+D 有三个不同的实根，则存在三条直线，它们过 P 在切平面上，分切平面成六部份，在这六部份中，δ 交错地取正值和负值，在这种情况下 δ 作为 $(du,\ dv)$ 的函数画成猴鞍形. 如图 9-8 所示，它的变化依赖于 Ax^3+Bx^2+Cx+D 的根的性质.

例 9.6 研究曲面 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^3+v^3+u^4)\boldsymbol{e}_3$，这里 $\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{e}_1+(3u^2+4u^3)\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{e}_2+3v^2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}_{uu}=(6u+12u^2)\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}_{uv}=0$, $\boldsymbol{x}_{vv}=6v\boldsymbol{e}_3$,


图 9-8

$$\boldsymbol{N}=[(3u^2+4u^3)^2+9v^4+1]^{-1/2}(-(3u^2+4u^3)\boldsymbol{e}_1-3v^2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$

$$\boldsymbol{x}_{uuu}=(6+24u)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{x}_{uuv}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_{uvv}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_{vvv}=6\boldsymbol{e}_3.$$

在 $u=0,\ v=0$，有 $\boldsymbol{x}_{uu}=\boldsymbol{x}_{uv}=\boldsymbol{x}_{vv}=\boldsymbol{0}$，所以

$$L=M=N=0.$$

这点是平点，用 δ 来研究曲面在这点邻近的形状，

$$\delta=\frac{1}{6}(\boldsymbol{x}_{uuu}\cdot\boldsymbol{N}du^3+3\boldsymbol{x}_{uuv}\cdot\boldsymbol{N}du^2dv+3\boldsymbol{x}_{uvv}\cdot N\,du\,dv^2+\boldsymbol{x}_{vvv}\cdot\boldsymbol{N}dv^3).$$

在$u=0,\ v=0$，

$$\delta=\frac{1}{6}[6\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3du^3+6\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3dv^3]$$

$$=du^3+dv^3$$

$$=(du+dv)(du^2-du\,dv+dv^2).$$

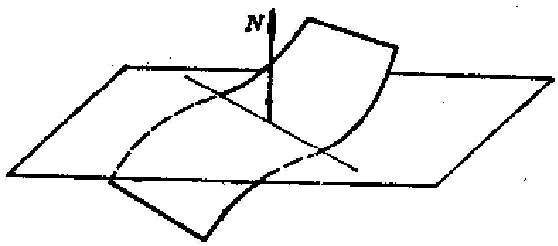


图 9-9

这里有一条直线 $du+dv=0$，这直线在切平面上，沿这条直线 $\delta=0$，第二个因子 $(du^2-dudv+dv^2)$对所有$(du,\ dv)$是正定的，在这个点的邻域曲面的形状如图 9-9 所示。

4. 法 曲 率

设 P 是类 $\geqslant 2$ 的曲面上的点，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$是包含 P 的片，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(t),\ v(t))$是过 P 的 C^2 类的正则曲线 C，它在 P 点的法曲率向量用 $\boldsymbol{k}_n$ 表示，它是曲线 C(在 P 点的)的曲率向量 $\boldsymbol{k}$ 在(P 点的)法向量 $\boldsymbol{N}$ 上的投影向量，即是

$$\boldsymbol{k}_n=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N}. \tag{9.14}$$

注意 $\boldsymbol{k}_n$ 与 $\boldsymbol{N}$ 的指向无关，也和 C 的指向无关，因为 $\boldsymbol{k}$ 与 C 的指向无关。

$\boldsymbol{k}_n$ 在 $\boldsymbol{N}$ 方向上的分量(数)，称为 C 在 P 点的**法曲率**，用 $\varkappa_n$ 表示，即

$$\varkappa_n=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N}. \tag{9.15}$$

这里 $\varkappa_n$ 的符号取决于 $\boldsymbol{N}$ 的指向，但与 C 的指向无关。

前面讲过，C 在 P 点的单位切向量是 $\boldsymbol{t}=\dfrac{d\boldsymbol{x}}{ds}=\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big/\left|\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|$，曲率向量是 $\boldsymbol{k}=\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}\Big/\left|\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|$，沿曲线，$\boldsymbol{t}$ 垂直于 $\boldsymbol{N}$。

因此 $0=\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{N})=\dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{t}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{N}}{dt}$，有

$$\varkappa_n=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N}=\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}\cdot\boldsymbol{N}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|=-\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{N}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|=-\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{N}}{dt}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2$$

$$=-\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{N}}{dt}\Big/\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=-\left(\boldsymbol{x}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{dt}\right)\cdot\left(\boldsymbol{N}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{N}_v\frac{dv}{dt}\right)$$

$$=-\left(\boldsymbol{x}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{dt}\right)\cdot\left(\boldsymbol{x}_n\frac{du}{dt}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{dt}\right).$$

因此

$$\varkappa_n=\frac{L(du/dt)^2+2M(du/dt)(dv/dt)+N(dv/dt)^2}{E(dv/dt)^2+2F(du/dt)(dv/dt)+G(dv/dt)^2}. \tag{9.16}$$

注意 $\varkappa_n$ 作为 $du/dt,\ dv/dt$ 的函数依赖于比值$(du/dt)/(dv/dt)$、即是依赖于 C 在 P 点的切线方向，在 C 的切线方向固定的情况下，$\varkappa_n$ 是第一和第二基本系数的函数，而基本系数只依赖于 P，于是有

定理 9.2 在曲面片上过 P 点具有同一切线的所有曲线，在 P 点有相同的法曲率。

现在设 C 是在 P 点具有连续主法向量 $\boldsymbol{n}$ 的曲线，并设 $\boldsymbol{n}$ 沿 C 的指向是这样选取，使得在 P 点，$0\leqslant\angle(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{N})\leqslant\dfrac{\pi}{2}$。从方程(9.15)

$$\varkappa_n=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N}=\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{N}=\varkappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})=\varkappa\cos\alpha, \tag{9.17}$$

其中 $\alpha=\angle(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{N})$，因为 $\varkappa_n$ 只依赖于 C 的切线方向，且 $\cos\alpha$ 是用 C 的主法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向来确定，如果 $\cos\alpha\neq0$，得到 C 在 P 点的曲率 $\varkappa$ 是由 C 的密切平面所唯一确定，如图 9-10

所示.

注意 $\cos\alpha=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{n}$ 平行于P 点的切平面，它等价于当且仅当密切面和切面重合，于是有

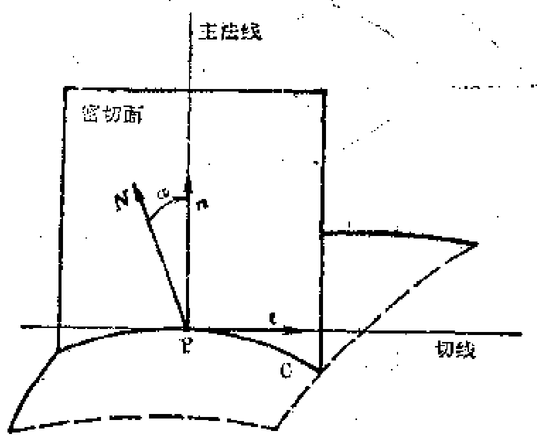


图 9-10

定理 9.3 过 P 在 P 点有相同密切面的所有曲面曲线，倘若密切面不是曲面的切面，则在 P 点有相同的曲率.

从上面的定理得到除了曲线的密切面同时是曲面的切面的情况外，所有过 P 的曲线的曲率的可能值，可以用研究过 P 的平面的截口曲线的曲率得到，特别，若 C 是过 P 且包含 $\boldsymbol{N}$ 的平面的截口曲线，称此截口曲线为片在 P 点的法截线．设 C 是片在 P 点的法截线，则 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}=1$，由(9.17)式得到 $\varkappa_n=\varkappa$，因此有

定理 9.4 片在 P 点的法截线的曲率等于法截线在 P 点的法曲率.

因为 C 在 P 点的法曲率仅依赖于 P 和 C 在 P 点的切线的方向，根据(9.16)在 P 点沿 $du:dv$ 方向($du^2+dv^2\neq0$)的法曲率可以写成

$$\varkappa_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\frac{II}{I}. \tag{9.18}$$

这里 $du:dv$ 是在切面上平行于向量 $\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv$ 的直线的方向数，方向数 $du:dv$ 和 $du':dv'$ 确定同一条直线，当且仅当它们成比例，即当且仅当存在 $\lambda\neq0$ 使得 $du=\lambda du'$ 和 $dv=\lambda dv'$.

从(9.18)得到 $\varkappa_n$ 在保持 $\boldsymbol{N}$ 的指向的参数变换下是不变量(如同 I 和 II)．且 $\varkappa_n$ 在改变 $\boldsymbol{N}$ 的指向的参数变换下改变符号，因为 I 是正定的，得到 $\varkappa_n$ 和 II 同时取正、负或零．如果 P 是椭圆点，$\varkappa_n\neq0$，对所有 $du:dv$，$\varkappa_n$保持同号，如果 P 是双曲点，$\varkappa_n$ 是正、负或零取决于 $\frac{du}{dv}$．如果 P 是抛物点，$\varkappa_n$ 保持同号且对使 $II=0$ 的方向，$\varkappa_n=0$．在平点，对所有方向 $\varkappa_n=0$.

例 9.7 研究半径为 a 的球面

$$\boldsymbol{x}=(a\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(a\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2+(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,\ 0<\theta<2\pi,\ 0<\phi<\pi,$$

这里

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_\theta&=-(a\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(a\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2\\
\boldsymbol{x}_\phi&=(a\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(a\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_2-(a\sin\phi)\boldsymbol{e}_3\\
\boldsymbol{x}_{\theta\theta}&=-(a\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1-(a\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{x}_{\theta\phi}&=-(a\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(a\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{x}_{\phi\phi}&=-(a\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1-(a\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2-(a\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{N}&=-(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1-(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2-(\cos\phi)\boldsymbol{e}_3,\\
E&=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=a^2\sin^2\phi,\ F=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\phi=0,\ G=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_\phi=a^2,\\
L&=\boldsymbol{x}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{N}=a\sin^2\phi,\ M=\boldsymbol{x}_{\theta\phi}\cdot\boldsymbol{N}=0,\ N=\boldsymbol{x}_{\phi\phi}\cdot\boldsymbol{N}=a,\\
\varkappa_n&=\frac{L\,d\theta^2+2M\,d\theta\,d\phi+N\,d\phi^2}{E\,d\theta^2+2F\,d\theta\,d\phi+G\,d\phi^2}=\frac{a\sin^2\phi\,d\theta^2+a\,d\phi^2}{a^2\sin^2\phi\,d\theta^2+a^2d\phi^2}=1/a.
\end{aligned}$$

因此在每一点和每一个方向，$\varkappa_n=$常数$=\frac{1}{a}$. 这和我们熟知的事实是一致的——球面在每一点的法截线交球面于半径为 a 曲率为 $\frac{1}{a}$ 的大圆。

例 9.8 研究曲面 $\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2-v^2)\boldsymbol{e}_3$，这里 $\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{e}_1+2u\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{e}_2-2v\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{x}_{uu}=2\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{x}_{uv}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}_{vv}=-2\boldsymbol{e}_3$，

$$\boldsymbol{N}=(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}(-2u\boldsymbol{e}_1+2v\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$

$$E=1+4u^2,\ F=-4uv,\ G=1+4v^2,$$

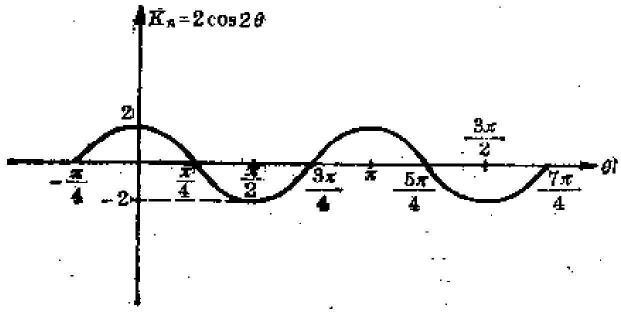
$$L=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2},\ M=0,\ N=-2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$LN-M^2=-4(4u^2+4v^2+1)^{-1}.$$

注意曲面的所有点是双曲点，特别在原点 $E=1$，$F=0$，$G=1$，$L=2$，$M=0$，$N=-2$，所以 $\varkappa_n=\frac{2(du^2-dv^2)}{du^2+dv^2}$，如果我们设 $du^2+dv^2=1$，

且令 $du=\cos\theta,\ dv=\sin\theta$，有 $\varkappa_n=2$，

$(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2\cos 2\theta$，于是，如图 9-11 所示，在这四个区间上，$-\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/4$，$\pi/4\leqslant\theta\leqslant 3\pi/4$，$3\pi/4\leqslant\theta\leqslant 5\pi/4$，$5\pi/4\leqslant\theta\leqslant 7\pi/4$，$\varkappa_n$ 的值在正和负之间变化。过原点的法截线的曲率 $\varkappa$ 如同 $\varkappa_n$ 一样在 -2 和 2 之间变化。



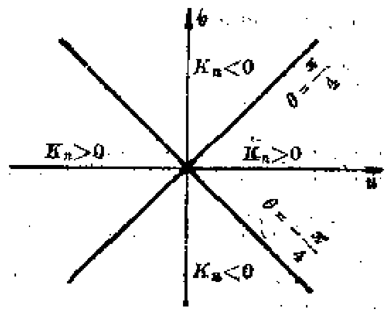


图 9-11

5. 主方向和主曲率

我们想详细研究在曲面上一点 P 的法曲率 $\varkappa_n$，因为 $\varkappa_n$ 具有不变量性质，我们可以假设 P 点邻域用 Monge 片的方式表示的，即

$$\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u,v)\boldsymbol{e}_3,$$

使得 P 点 $\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{e}_2$。这可用移动曲面使得 P 是原点且使切平面和 x_1x_2 平面重合来实现。如图 9-12 所示，由此得到 $E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=1$，$F=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v=0$，$G=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v=1$

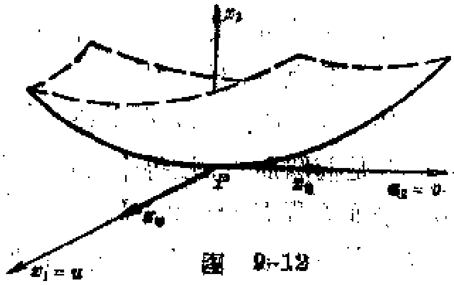


图 9-12

且
$$\varkappa_n=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{du^2+dv^2}.$$

因为 $\varkappa_n$ 只依赖于比值 du/dv，可以设 $du^2+dv^2=1$，且令 $du=\cos\theta$，$dv=\sin\theta$，于是

$$\varkappa_n=L\cos^2\theta+2M\cos\theta\sin\theta+N\sin^2\theta$$

最后我们设 $|\varkappa_n|=1/r^2$，且令 $x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，

得到
$$\pm 1 = Lx_1^2 + 2Mx_1x_2 + Nx_2^2. \tag{9.19}$$
方程(9.19)确定一条在 x_1x_2 平面上的二次曲线，它称为杜潘指示线(标形)．它使从点 (x_1, x_2) 到原点的距离 r 是在 $\cos\theta:\sin\theta$ 方向上 $|\kappa_n|$ 的平方根的倒数．

如果 P 是椭圆点，$(LN-M^2>0)$ 指示线是椭圆，如图 9-13(a) 所示．如果 P 是双曲点，$(LN-M^2<0)$ 指示线是一对共轭双曲线(见图 9-13(b))，沿着双曲线的一条，κ_n 是正，沿着双曲线的另一条，κ_n 是负，对应于 $\kappa_n=0$ 的方向有公共的渐近线．在抛物点情况，$LN-M^2=0$，$L^2+N^2+M^2\neq 0$，$Lx_1^2+2Mx_1x_2+Nx_2^2$ 可分解因子，指示线是一对平行直线，如图 9-13(c) 所示．直线的方向也是使 $\kappa_n=0$ 的方向．在平点 $(L=M=N=0)$，指示线不存在．

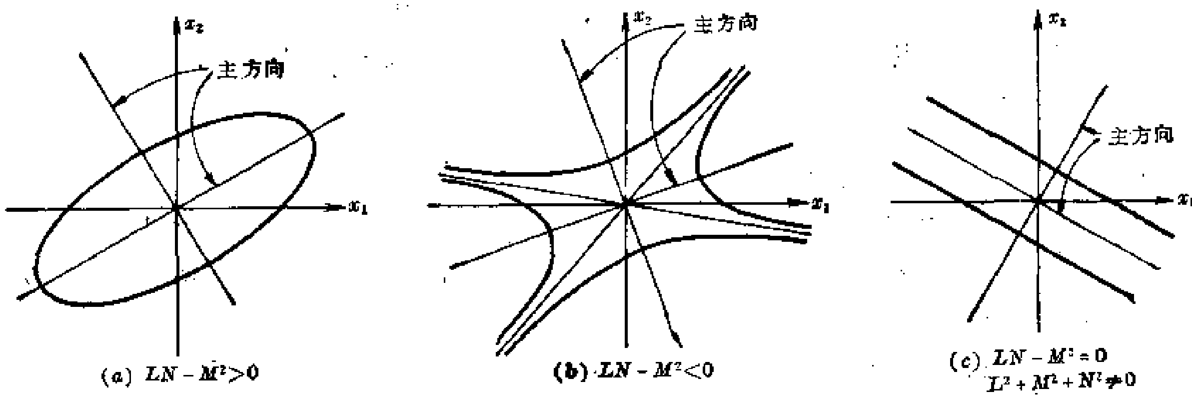


图 9-13

从 $|\kappa_n|=\dfrac{1}{r^2}$，我们看到：如果指示线存在且不是圆，则在指示线的轴的两个垂直方向上，κ_n 取相异的最大值 κ_1 和最小值 κ_2．在椭圆点，设 $\kappa_n>0$，最小值 κ_1 具有指示线的短轴方向，即是到原点的距离最小，最小值 κ_2 具有指示线的长轴方向即是到原点的距离最大．在双曲点，最大值 κ_1 是正的，具有双曲线的轴的方向，沿这个方向 $\kappa_n>0$，最小值 κ_2 是负的，具有双曲线的轴的方向，沿着这个方向 $\kappa_n<0$．在抛物点，设 $\kappa_n\geqslant 0$，最大值 κ_1 具有垂直于平行线的方向且最小值 $\kappa_2=0$ 具有指示线的平行线的方向，在这两个垂直方向上 κ_n 的值达到最大和最小．这两个方向称为主方向，对应的法曲率 κ_1 和 κ_2 称为主曲率．

剩下考虑指示线是圆的椭圆点和不存在指示线的平点，在这种椭圆点 $\kappa_n=$ 常数 $\neq 0$，所有的方向都是主方向，类似地，在平点，$\kappa_n=$ 常数 $=0$，所有方向都是主方向，在曲面上，$\kappa_n=$ 常数的点称为脐点，椭圆情况下的脐点，称为椭圆(或球圆)脐点，平点也称为抛物脐点．

例 9.9 (a) 从例 9.7 在半径为 a 的球面上的每一点，法曲率 $\kappa_n=$ 常数 $=1/a$，故球面上的每一点是椭圆脐点，且每个方向是主方向．

(b) 平面方程是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}u+\boldsymbol{c}v$，其中 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为常向量，这里 $\boldsymbol{x}_{uu}=\boldsymbol{x}_{uv}=\boldsymbol{x}_{vv}=\boldsymbol{0}$，因此，$L=M=N=0$，故平面上每一点是平点或抛物脐点，平面上的每个方向是主方向．

(c) 在例 9.8 中，$\boldsymbol{x}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2-v^2)\boldsymbol{e}_3$ 在原点的法曲率是

$\kappa_n=\dfrac{2(du^2-dv^2)}{du^2+dv^2}$；因为 $du^2+dv^2=1$，$du=\cos\theta$，$dv=\sin\theta$，$r^2=1/|\kappa_n|$，$x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，得到指示线 $\pm 1=2(x_1^2-x_2^2)$ 是共轭双曲线，如图 9-14 所示，这里 κ_n 的最大值是 2 具有 x_1 轴的方向，κ_n 的最小值是 -2 具有 x_2 轴的方向，x_1 和 x_2 轴方向是主方向．

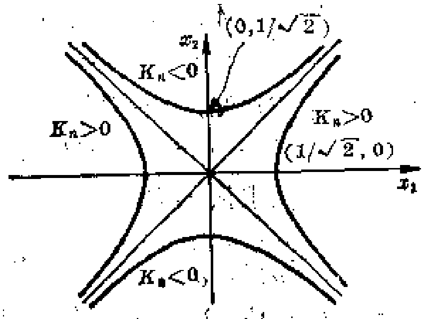


图 9-14

现在设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$是曲面上包含 P 的任意片，在问题9.16中我们证明

定理 9.5 实数 $\varkappa$ 是在 P 点在方向 $du:dv$ 上的主曲率的充分必要条件是 $\varkappa$, du, dv 满足方程

$$(L-\varkappa E)du+(M-\varkappa F)dv=0,$$
$$(M-\varkappa F)du+(N-\varkappa G)dv=0, \qquad (9.20)$$

其中 $du^2+dv^2\neq 0$.

上面是齐次方程组，它有非平凡解 du, dv 的充分必要条件是

$$\det\begin{pmatrix} L-\varkappa E & M-\varkappa F \\ M-\varkappa F & N-\varkappa G \end{pmatrix}=0.$$

展开得$(EG-F^2)\varkappa^2-(EN+GL-2FM)\varkappa+(LN-M^2)=0$. 在问题9.14中，我们证明上面方程的判别式，大于或等于零，这样，方程有两个不同的实根 $\varkappa_1$ 和 $\varkappa_2$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 就是在非脐点的主曲率，或者有两重实根 $\varkappa$，它就是在脐点的曲率，于是有

定理 9.6 $\varkappa$ 是主曲率的充分必要条件是 $\varkappa$ 为方程$(EG-F^2)\varkappa^2-(EN+GL-2FM)\varkappa+(LN-M^2)=0$的解. (9.21)

最后注意：在脐点，每一个方向都是主方向，这当且仅当方程(9.20)的系数都为零. 于是，有

定理 9.7 一点是脐点当且仅当基本系数成比例，此时法曲率

$$\varkappa=\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}. \qquad (9.22)$$

6. 高斯曲率与中曲率

如果我们用 $EG-F^2$ 除方程(9.21)，把方程写成

$\varkappa^2-2H\varkappa+K=0$. 设它的根为 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$,

其中

$$H=\frac{1}{2}(\varkappa_1+\varkappa_2)=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} \qquad (9.23)$$

是两根 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 的平均值，称为 P 点的中曲率

$$K=\varkappa_1\varkappa_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2} \qquad (9.24)$$

是两根 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 的积，称为 P 点的高斯曲率.

因为当曲面的定向改变时，曲线的法曲率至多改变符号，法曲率 $\varkappa_n$ 的极值仍然是极值，至多在曲面定向改变时改变符号(极大值变极小值，等等)，由此得出高斯曲率$K=\varkappa_1\varkappa_2$是曲面的不变性质，不依赖于曲面的表达式，注意 $EG-F^2>0$，于是 K 的符号跟 $LN-M^2$ 的符号相同，即

定理 9.8 曲面上的点是椭圆点的充分必要条件是 $K>0$；曲面上的点是双曲点的充分必要条件是 $K<0$；曲面上的点是抛物点的充分必要条件是 $K=0$.

例 9.10 (a) 从例9.9(a)，我们看到在半径为 a 的球面上每一点，高斯曲率 $K=$常数$=\frac{1}{a^2}$，中曲率$H=\pm\frac{1}{a}$，符号依赖于球面的定向.

(b) 从例9.9(b)，我们看到平面上每一点，高斯曲率 $K=0$，中曲率 $H=0$.

(c) 研究环面 $X=(b+a\sin\phi)(\cos\theta)e_1+(b+a\sin\phi)(\sin\theta)e_2+(a\cos\phi)e_3$ 从例 9.5 知 $E=(b+a\sin\phi)^2$, $F=0$, $G=a^2$, $L=(b+a\sin\phi)\sin\phi$, $M=0$, $N=a$.
从方程(9.21)知,主曲率是下面方程的根

$$a^2(b+a\sin\phi)^2\kappa^2-[a(b+a\sin\phi)^2+a^2(b+a\sin\phi)\sin\phi]\kappa+a(b+a\sin\phi)\sin\phi=0.$$

从二次方程求根公式得

$\kappa=\dfrac{(b\pm 2a\sin\phi)\pm b}{2a(b+a\sin\phi)}$ 即 $\kappa_1=\dfrac{2b+2a\sin\phi}{2a(b+a\sin\phi)}=\dfrac{1}{a}$ 是曲率的最大值, $\kappa_2=\dfrac{\sin\phi}{b+a\sin\phi}$ 是曲率的最小值. 注意 κ_1 在每一点都相同且等于环面的生成圆的曲率. 最小曲率 κ_2 随 ϕ 沿着经线变化, 在外侧面的平行圆 $\phi=\dfrac{\pi}{2}$,它取最大值 $\dfrac{1}{b+a}$, 在平行圆 $\phi=0$ 和 $\phi=\pi$ 它是零. 在内侧面的平行圆 $\phi=-\dfrac{\pi}{2}$,它取最小值 $-\dfrac{1}{b+a}$, 高斯曲率 $K=\kappa_1\kappa_2=\dfrac{\sin\phi}{a(b+a\sin\phi)}$.

7. 曲 率 线

设 P 是类 $\geqslant 2$ 的曲面片 $x=x(u, v)$ 上的点,在问题 9.24 中,我们证明

定理 9.9 方向 $du:dv$ 是 P 点的主方向的充分必要条件是 du, dv 满足方程

$$(EM-LF)du^2+(EN-LG)du\,dv+(FN-MG)dv^2=0. \tag{9.25}$$

在非脐点可以证明上面方程能分解为两个形如 $A\,du+B\,dv=0$的线性方程, 它们代表两个互相垂直的主方向.

注意因为曲线的法曲率 κ_n 除了符号是不变量, 由此可见使 κ_n 具有极值的主方向也是不变量. 特别如果 $X^*(\theta, \phi)$是另一包含 P 的坐标片, 则 $d\theta:d\phi$ 是主方向的充分必要条件是 $d\theta=\theta_u du+\theta_v dv$ 和 $d\phi=\phi_u du+\phi_v dv$, 其中 $du:dv$ 是 $X=X(u, v)$在 P 点的主方向.

一条曲面曲线, 它在其上每一点的切方向都是曲面在这点的主方向, 这样的曲面曲线称为曲率线. 从上面推出曲线是曲率线的充分必要条件是曲线上每一点对某一包含这些点的片 $X=X(u, v)$, 它的切方向满足(9.25). 由此得出, (9.25)可以认为是两族曲率线的微分方程. 从微分方程的存在唯一性定理知, 如果系数是 C^1 类, (9.25)的解存在. 这样, 我们有

定理 9.10 在类 $\geqslant 3$ 的曲面上的非脐点的邻域, 存在两族相正交的曲率线.

例 **9.11** 研究曲面 $X=ue_1+ve_2+(u^2+v^2)e_3$, 算得 $E=1+4u^2$, $F=4uv$, $G=1+4v^2$, $L=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}$, $M=0$, $N=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}$. 用 $-8(4u^2+4v+1)^{-1/2}$ 除(9.25)式得到 $uv\,du^2+(v^2-u^2)du\,dv-uv\,dv^2=0$, 即 $(u\,du+v\,dv)(v\,du-u\,dv)=0$, 即 $u\,du+v\,dv=0$, $v\,du-u\,dv=0$. 第一个方程的解是圆族 $u^2+v^2=r^2$. 第二个方程的解是通过原点的直线族 $u=bv$. 在曲面上这些曲线的像是曲率线. 如图 9-15 所示. 注意在原点 $u=0$, $v=0$, 有 $E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=2$, $M=0$, $N=2$, 即第一和第二基本系数成比例. 故原点为每个方向都是主方向的脐点.

作为定理 9.10 的结果, 如果曲面充分光滑, 在非脐点 P 的邻域可以引进 C^2 类坐标片, 使得 u, v 参数曲线是曲率线. 在许多问题中, 总有包含 C^2 类坐标片, 使得 u, v 参数曲线的方向是曲面在 P 点的主方向. 在问题 9.21 中, 我们证明

定理 9.11 对类 $\geqslant 2$ 的曲面上每一点 P, 存在包含 P 的坐标片, 使得 u, v 参数曲线在 P 点的方向是曲面的主方向.

在片上的非脐点 P, 设参数曲线的方向是主方向, 因为 $X_u=1\cdot X_u+0\cdot X_v$ 切于 u 参数

曲线，$X_v=0\cdot X_u+1\cdot X_v$ 切于 v 参数曲线，由此得到在 P 点，方程(9.25)对 $du=1$，$dv=0$ 和 $dv=1$，$du=0$ 必定满足；代入得到 $FN-MG=0$，$EM-LF=0$.

我们讲过在非脐点的主方向是正交的．因此从定理 9.1 得到在 P 点 $F=0$，所以 $MG=EM=0$．最后因为 I 是正定的，$E>0$ 所以 $M=0$．于是在 P 点 $F=M=0$，其逆也真，即得

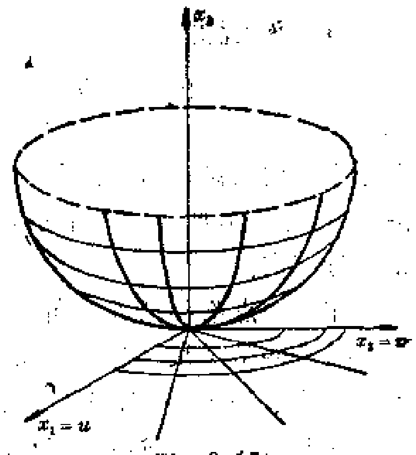


图 9-15

定理 9.12 在片上的非脐点，u，v 参数曲线的方向是主方向的充分必要条件是在这一点 $F=M=0$.

作为上面的结果，有

推论：在没有脐点的片上，u，v 参数曲线是曲率线的充分必要条件是片上每一点 $F=M=0$.

在片上的 P 点，如果参数曲线 u，v 的方向是主方向，我们得到主曲率的简单表达式，即首先设 P 为非脐点，则从上面定理 9.12，在 P 点，$F=M=0$，主曲率和主方向的方程(9.20)简化为$(L-\varkappa E)du=0$ 和 $(N-\varkappa G)dv=0$，因为 $du=1$，$dv=0$ 是过 P 的 u 参数曲线的方向数，因此得到在这个方向的主曲率是 $\varkappa_1=L/E$，用 $du=0$，$dv=1$ 代入得到 v 参数曲线方向的主曲率是 $\varkappa_2=N/G$．若 P 是脐点，则从定理 9.7 得到 $\varkappa=L/E=M/F=N/G$．于是，我们证明了

定理 9.13 若在片上的 P 点，u，v 参数曲线的方向是主方向，则在 P 点的主曲率是 $\varkappa_1=L/E$，$\varkappa_2=N/G$.

推论：若在片上，u、v 参数曲线是曲率线，则在每一点主曲率为 $\varkappa_1=L/E$，$\varkappa_2=N/G$.

例 9.12 研究曲面 $X=ue_1+ve_2+(u^2+v^2)e_3$．从例 9.11 知曲率线是圆 $u^2+v^2=r^2$ 和直线 $u=bv$ 的像．曲率线可以用参数代换 $u=r\cos\theta$，$v=r\sin\theta$ 变为参数曲线．此时曲面的表达式是

$$X=(r\cos\theta)e_1+(r\sin\theta)e_2+r^2e_3,\quad r>0.$$

算出第一和第二基本系数为 $E=r^2$，$F=0$，$G=1+4r^2$，$L=-2r^2(1+4r^2)^{-1/2}$，$M=0$，$N=-2(1+4r^2)^{-1/2}$，主曲率 $\varkappa_1=L/E=-2(1+4r^2)^{-1/2}$ 和 $\varkappa_2=-2(1+4r^2)^{-3/2}$.

8. 罗德里克公式

设 $du:dv$ 是片上 P 点的主方向，$\varkappa$是对应于这个主方向的主曲率，则从(9.10)，(9.12)，(9.20)得到

$$(-N_u\cdot X_u-\varkappa X_u\cdot X_u)du+(-N_v\cdot X_u-\varkappa X_v\cdot X_u)dv=0,$$
$$(-N_u\cdot X_v-\varkappa X_u\cdot X_v)du+(-N_v\cdot X_v-\varkappa X_v\cdot X_v)dv=0,$$

即

$$[(N_u du+N_v dv)+\varkappa(X_u du+X_v dv)]\cdot X_u=0,$$
$$[(N_u du+N_v dv)+\varkappa(X_u du+X_v dv)]\cdot X_v=0;$$

即

$$(dN+\varkappa dX)\cdot X_u=0,\quad (dN+\varkappa dX)\cdot X_v=0.$$

但因 $dN+\varkappa dX$ 平行于 P 点的切平面，向量 X_u，X_v 是线性无关的，因此 $dN+\varkappa dX=0$，即 $dN=-\varkappa dX$．于是在主方向，向量 dN 平行于 dX，且

$$dN=-\varkappa dX, \tag{9.26}$$

其中 $\varkappa$ 是主方向的主曲率，其逆的证明在问题 9.28 中给出，于是有

定理 9.14 方向 $du:dv$ 是片上一点的主方向的充分必要条件是存在某一个数 $\varkappa$，使 $dN=N_u du+N_v dv$ 和 $dX=X_u du+X_v dv$．满足 $dN=-\varkappa dX$，其中 $\varkappa$ 是主方向 $du:dv$ 的

主曲率.

上面公式称为罗德里克公式. 它完全刻划了主方向的特征,应注意记忆.

9. 渐近曲线——共轭曲线族

若片上一点的一个方向使得

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0, \tag{9.27}$$

称这个方向为渐近方向. 因 $\kappa_n = II/I$ 且 I 正定, 故渐近方向也是使 $\kappa_n = 0$ 的方向. 在椭圆点渐近方向, 在双曲点有两个不同的渐近方向, 在抛物点有一个渐近方向. 在平点每个方向都是渐近方向.

在每一点都和渐近方向相切的曲面曲线, 称为渐近曲线, 于是曲面曲线是渐近曲线的充分必要条件是对某一包含这曲线的坐标片 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(u, v)$, 曲线在每一点的切线方向满足方程 (9.27). 在双曲点, 这个方程可分解为两个形如 $Adu + Bdv = 0$ 的实的不同因子, 它可以看作渐近曲线的一阶微分方程, 如同曲率线的情形, 我们有

定理 9.15 在类 $\geqslant 3$ 的曲面上的双曲点的邻域, 有两个不同的渐近曲线族.

如果 u, v 参数曲线本身是渐近曲线, 则在每一点, 对 $du = 1$, $dv = 0$ 和 $du = 0$, $dv = 1$ (9.27) 必定满足, 因此 $L = N = 0$, 其逆也真, 即

定理 9.16 片上的 u 参数曲线和 v 参数曲线为渐近曲线的充分必要条件是在每一点 $L = N = 0$.

例 9.13 研究曲面 $\boldsymbol{X} = (r\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (r\sin\theta)\boldsymbol{e}_2 + (\log r)\boldsymbol{e}_3$, $r > 0$.

算得 $L = -r/(1+r^2)^{1/2}$, $M = 0$, $N = 1/r(1+r^2)^{1/2}$.

用 $(1+r^2)^{1/2}$ 乘(9.27)得到微分方程 $-r\,d\theta^2 + dr^2/r = 0$,

即 $d\theta + dr/r = 0$ 和 $d\theta - dr/r = 0$.

解得 $\theta + u = \log r$ 和 $\theta + v = -\log r$, 其中 u, v 是积分常数. 这些曲线在曲面上的象是两族渐近曲线. 关于 u, v 解出 r 和 θ 得 $\theta = -(u+v)/2$, $r = e^{(u-v)/2}$. 于是

$$\boldsymbol{X} = e^{(u-v)/2}\left(\cos\frac{1}{2}(u+v)\right)\boldsymbol{e}_1 - e^{(u-v)/2}\left(\sin\frac{1}{2}(u+v)\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{2}(u-v)\boldsymbol{e}_3.$$

这是用渐近曲线表示的曲面的参数方程.

我们讲过, 在片上曲线在每一点的法曲率是 $\kappa_n = II/I = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N}$, 其中 $\boldsymbol{k}$ 是曲线的曲率向量. 由此得出曲线为渐近曲线的充分必要条件是在每一点 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N} = 0$. 即是当且仅当 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$, 或 $\boldsymbol{k}$ 垂直于 $\boldsymbol{N}$. 于是我们有

定理 9.17 曲面曲线为渐近曲线的充分必要条件是或者曲线上的所有点都是逗留点 ($\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$). 或者它在每一点的密切面与曲面的切面迭合.

因为沿一条直线, $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{0}$, 于是有

推论: 曲面上的直线必为渐近曲线.

对不是直线的渐近曲线, 我们将在问题 9.30 中证明以下定理.

定理 9.18 (Beltrami–Enneper)(贝尔特腊米–恩内佩尔) 在不是直线的渐近曲线上的每一点, 它的挠率 τ 满足 $\tau^2 = -K$, 其中 K 是在这一点的高斯曲率.

给出片上一点的方向 $\delta u:\delta v$, 若方向 $du:dv$ 满足

$$d\boldsymbol{X}\cdot\delta\boldsymbol{N} = 0 \tag{9.29}$$

其中 $d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_u du + \boldsymbol{X}_v dv$ 和 $\delta\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_u\delta u + \boldsymbol{N}_v\delta v$, 则称方向 $du:dv$ 共轭于方向 $\delta u:\delta v$.

展开并应用(9.10) $dX\cdot\delta N=0$ 等价于

$$L\,du\,\delta u+M(du\,\delta v+dv\,\delta u)+N\,dv\,\delta v=0. \tag{9.29}$$

注意，因为方程对称，由此得到 $\delta u:\delta v$ 也共轭于 $du:dv$. 所以我们说 $\delta u:\delta v$ 和 $du:dv$ 是互为共轭方向. 注意渐近方向是自共轭方向.

给出任意方向 $du:dv$, (9.29)是关于 $\delta u:\delta v$ 的线性方程 $(L\,du+M\,dv)\delta u+(M\,du+N\,dv)\delta v=0$, 在问题 9.29 中，我们证明若 $LN-M^2\neq 0$ 这个方程有唯一解. 即有

定理 9.19 在曲面上的椭圆点或双曲点的每一个方向有唯一的一个共轭方向.

曲面上的两族曲线，若它们的切方向在每一点都共轭，则称这两族曲线为共轭曲线族. 给出一个单参数曲线族 $f(u\cdot v)=C_1$, 方程(9.29)可以看作是共轭曲线族 $g(u\cdot v)=C_2$ 的一阶微分方程.

若 u, v 参数曲线本身是共轭曲线族. 则在每一点，$du=1$, $dv=0$和$\delta u=0$, $\delta v=1$ 应满足(9.29)，代入(9.29)，得到 $M=0$，其逆也真. 即有

定理 9.20 片上的 u 参数曲线和 v 参数曲线是共轭曲线族的充分必要条件是在片上每一点 $M=0$.

注意作为上面定理的结果和定理 9.12 的推论，我们有：在没有脐点的片上，u, v 参数曲线是正交和共轭的曲线族的充分必要条件为它们是曲率线.

例 9.14 研究曲面(见例 9.11) $\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$. 这里 $L=N=2(u^2+v^2+1)^{-1/2}$, $M=0$. 注意因为处处 $M=0$. 曲面的参数曲线族是共轭曲线族. 现在研究在参数平面上由 $f(u,v)=u^2+v^2=C_1^2$给出的曲线族. 因为 $df=f_u du+f_v dv=2u du+2v dv=0$. 有 $du:dv=f_v:-f_u=-v:u$, 用 $2(1+u^2+v^2)^{-1/2}$ 除(9.29)得到 $-v\delta u+u\delta v=0$, 它的解 $u=C_2 v$ 是参数平面上的直线族. 这两族曲线 $u^2+v^2=C_1^2$ 和 $u=C_2 v$ 的像确定曲面上的共轭曲线族. 实际上，它们是曲面上的曲率线.

§9.2 问题及其解答

1. 第一基本形式，弧长，曲面面积

9.1 证明旋转曲面 $\boldsymbol{X}=f(t)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+f(t)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g(t)\boldsymbol{e}_3$ 的第一基本形式是 $I=f^2d\theta^2+(f'^2+g'^2)dt^2$.

证：
$$\boldsymbol{X}_\theta=-(f\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(f\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{X}_t=(f'\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(f'\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g'\boldsymbol{e}_3,$$
$$E=\boldsymbol{X}_\theta\cdot\boldsymbol{X}_\theta=f^2,\ F=\boldsymbol{X}_\theta\cdot\boldsymbol{X}_t=0,\ G=\boldsymbol{X}_t\cdot\boldsymbol{X}_t=f'^2+g'^2,$$

从这得到所要的结果.

9.2 求锥面 $\boldsymbol{X}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3$ 上的弧段 $u=e^{\theta(\cot\beta)/\sqrt{2}}$, $\theta=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$, ($\beta$=常数)的弧长.

解：
$$E=\boldsymbol{X}_\theta\cdot\boldsymbol{X}_\theta=u^2,\ F=\boldsymbol{X}_\theta\cdot\boldsymbol{X}_u=0,\ G=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u=2.$$
$$du/d\theta=u(\cot\beta)/\sqrt{2},\ d\theta/d\theta=1.$$

$$S=\int_0^\pi\left[E\left(\frac{d\theta}{d\theta}\right)^2+2F\frac{d\theta}{d\theta}\frac{du}{d\theta}+G\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{1/2}d\theta=\int_0^\pi\left[u^2+(\cot^2\beta)u^2\right]^{1/2}d\theta$$
$$=\sqrt{1+\cot^2\beta}\int_0^\pi u\,d\theta=\sqrt{1+\cot^2\beta}\int_0^\pi e^{\theta(\cot\beta)/\sqrt{2}}\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{\cos\beta}\left(e^{\pi(\cot\beta)/\sqrt{2}}-1\right).$$

这就是所要的结果.

9.3 证明上题 9.2 中的锥面曲线和锥面的直母线 $\theta=$ 常数相交成定角 β.

证:
$$\cos\angle\left(\frac{d\boldsymbol{X}}{d\theta},\ \boldsymbol{X}_u\right)=\frac{(d\boldsymbol{X}/d\theta)\cdot\boldsymbol{X}_u}{|d\boldsymbol{X}/d\theta||\boldsymbol{X}_u|}=\frac{(\boldsymbol{X}_\theta(d\theta/d\theta)+\boldsymbol{X}_u(du/d\theta))\cdot\boldsymbol{X}_u}{|\boldsymbol{X}_\theta(d\theta/d\theta)+\boldsymbol{X}_u(du/d\theta)||\boldsymbol{X}_u|}$$
$$=\frac{F+G(du/d\theta)}{\sqrt{E+2F(du/d\theta)+G(du/d\theta)^2}\sqrt{G}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(du/d\theta)}{\sqrt{u^2+2(du/d\theta)^2}}=\frac{u\cot\beta}{\sqrt{u^2+u^2\cot^2\beta}}$$
$$=\frac{\cot\beta}{\sqrt{1+\cot^2\beta}}=\cos\beta.$$

这就是所要的结果.

9.4 若片上的第一基本形式是 $I=du^2+f(u\cdot v)dv^2$, 证明 U 参数曲线从所有 u 参数曲线中截出弧长相等的弧段. 在这种情况下称 v 参数曲线是平行的. 如图 9-16 所示(注意, 因为 $F=0$, 参数曲线也正交).

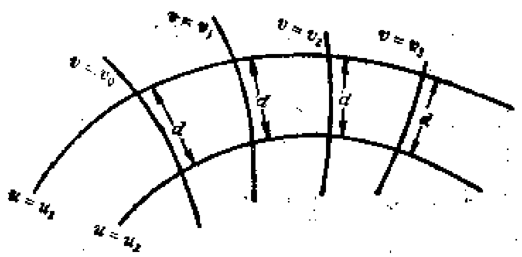


图 9-16

证: 沿 u 参数曲线 $u=u$, $v=v_0$ 在 $u=u_1$ 和 $u=u_2(u_1<u_2)$ 之间的距离是
$$d=\int_{u_1}^{u_2}[(du/du)^2+f(u,v_0)(dv/du)^2]^{1/2}du.$$
因为 $du/du=1$, $dv/du=0$. 故有
$$d=\int_{u_1}^{u_2}du=u_2-u_1.$$

这就证明了对每一 $v=v_0$, d 是相等的.

9.5 证明用 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=C$ 表示的曲面, 有 $f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2+f_{x_3}dx_3=0$, 其中 $d\boldsymbol{X}=(dx_1,\ dx_2,\ dx_3)$ 是曲面在 $P(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 点的任意切向量.

证: 设 $\boldsymbol{X}=x_1(t)\boldsymbol{e}_1+x_2(t)\boldsymbol{e}_2+x_3(t)\boldsymbol{e}_3$ 是曲面上过 P 点的正则曲线, 则对所有 t, $f(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))=C$. 从而
$$df/dt=f_{x_1}(dx_1/dt)+f_{x_2}(dx_2/dt)+f_{x_3}(dx_3/dt)=0.$$
即若 $d\boldsymbol{X}=dx_1\boldsymbol{e}_1+dx_2\boldsymbol{e}_2+dx_3\boldsymbol{e}_3$ 是切平面在 P 点的任意切向量, 则
$$f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2+f_{x_3}dx_3=0.$$

9.6 证明参数变换 $u=\sinh t$, $\phi=\theta$, $-\infty<t<+\infty$, $0<\theta<2\pi$. 使旋转曲面 M_1

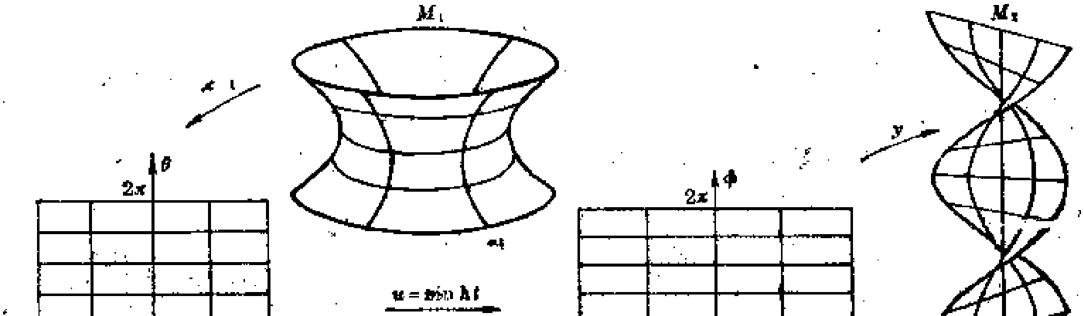


图 9-17

$\boldsymbol{X}=(\cosh t\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cosh t\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3$, $0<\theta<2\pi$ 和正劈锥曲面 M_2: $\boldsymbol{Y}=(u\cos\phi)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\phi)\boldsymbol{e}_2+\phi\boldsymbol{e}_3$, $0<\phi<2\pi$ 的点之间确定一个一一对应，使得对应向量的第一基本形式一致．

证：因为 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 是曲面 M_1 和 M_2 对应区域上双方单值到上的映射．且 $u=\sinh t$, $\phi=\theta$ 确定区域之间的一一对应．由此可见，先用 $\boldsymbol{X}^{-1}$，再用 $u=\sinh t$, $\phi=\theta$，最后用 $\boldsymbol{Y}$ 得到的复合映射是曲面 M_1 到 M_2 的一一映射．

对 M_1 上的点 $\boldsymbol{X}(t,\theta)$，有 $E=\boldsymbol{X}_\theta\cdot\boldsymbol{X}_\theta=\cosh^2 t$, $F=\boldsymbol{X}_\theta\cdot\boldsymbol{X}_t=0$, $G=\boldsymbol{X}_t\cdot\boldsymbol{X}_t=\cosh^2 t$ 且 $I=\cosh^2(d\theta^2+dt^2)$．

对 M_2 上的点 $\boldsymbol{Y}(u,\phi)$，有 $E^*=\boldsymbol{Y}_\phi\cdot\boldsymbol{Y}_\phi=u^2+1$, $F^*=\boldsymbol{Y}_\phi\boldsymbol{Y}_u=0$, $G^*=\boldsymbol{Y}_u\cdot\boldsymbol{Y}_u=1$ 且 $I^*=(u^2+1)d\phi^2+du^2$．但 $u=\sinh t$, $\phi=\theta$, $du=\cosh t$, $d\phi=d\theta$，因此

$$I^*=(\sinh^2 t+1)d\theta^2+\cosh^2 t\,dt^2=\cosh^2 t(d\theta^2+dt^2)=I.$$

这就是所要的结果．

2. 第二基本形式

9.7 证明曲面 $\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^3)\boldsymbol{e}_3$ 当 $v>0$ 时是椭圆点，当 $v<0$ 时是双曲点，当 $v=0$ 时是抛物点．

证：$\boldsymbol{X}_u=\boldsymbol{e}_1+2u\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{e}_2+3v^2\boldsymbol{e}_3$,

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v}{|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v|}=(4u^2+9v^4+1)^{-\frac{1}{2}}(-2u\boldsymbol{e}_1-3v^2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

$\boldsymbol{X}_{uu}=2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{X}_{uv}=0$, $\boldsymbol{X}_{vv}=6v\boldsymbol{e}_3$.

$L=\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=2(4u^2+9v^4+1)^{-1/2}$, $M=\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=0$,

$N=\boldsymbol{X}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=6v(4u^2+9v^4+1)^{-1/2}$,

$$LN-M^2=\frac{12v}{4u^2+9v^4+1}.$$

因为对所有 (u,v), $4u^2+9v^4+1>0$，故当 $v>0$ 时，$LN-M^2>0$，这些点是椭圆点．当 $v<0$ 时，$LN-M^2<0$．这些点是双曲点，当 $v=0$ 时，$LN-M^2=0$ 且 $L\neq0$ 这些点是抛物点．

9.8 证明在问题 9.7 中的曲面在抛物点 $P(0,0)$ 的邻域落在切平面的两侧．

证：在 $u=0$, $v=0$ 有 $\boldsymbol{X}_u=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{e}_2$．因此在 $P(0,0)$ 的切平面是坐标平面 $x_3=0$．v 参数曲线 $u=0$ 是立方抛物线 $\boldsymbol{X}=v\boldsymbol{e}_2+v^3\boldsymbol{e}_3$，它落在点 $P(0,0)$ 邻域的切平面的两侧．如图 9-18 所示．

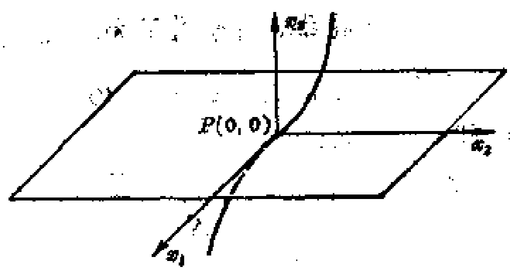


图 9-18

9.9 证明曲线的切线曲面上的所有点都是抛物点．

证：曲线 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}(s)$ 的切线曲面为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}(s)+u\boldsymbol{t}(s)$．于是

$$\boldsymbol{X}_s=\dot{y}+u\dot{t}=\boldsymbol{t}+u\kappa\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{X}_u=\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_s}{|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_s|}=\frac{u\kappa\boldsymbol{b}}{|u\kappa|},$$

$$\boldsymbol{X}_{ss}=\dot{t}+u\kappa\dot{n}+u\dot{k}\boldsymbol{n}=-u\kappa^2\boldsymbol{t}+(u\dot{k}+\kappa)\boldsymbol{n}+u\kappa\tau\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{X}_{su}=\dot{t}=\kappa\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{X}_{uu}=\boldsymbol{0},\ L=\boldsymbol{X}_{ss}\cdot\boldsymbol{N}=|u\kappa|\tau,$$

$$M=\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=0,\ N=\boldsymbol{X}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=0.$$

因此在所有点 $LN-M^2=0$. 证毕.

9.10 证明旋转曲面 $\boldsymbol{X}=f(t)(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+f(t)(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_3$, $f(t)>0$ 上每一点是抛物点，当且仅当曲面是圆柱面 $f=a$ 或为锥面 $f=at+b$, $a=$常数$\neq0$. $b=$常数.

证：算得 $L=\dfrac{-f}{[1+f'^2]^{1/2}}$, $M=0$, $N=\dfrac{f''}{[1+f'^2]^{1/2}}$,

因此 $LN-M^2=\dfrac{-ff''}{1+f'^2}$.

因为 $f>0$, $LN-M^2=0$ 当且仅当 $f''=0$. 即当且仅当 $f'=a\neq0$ 即 $f=at+b$, $a\neq0$. 证毕.

9.11 证明在椭圆点的邻域，曲面落在切平面的一侧.

证：设 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}(u,\ v)$ 是椭圆点，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{X}(u+du,\ v+dv)$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的邻近点，据前 $d=\boldsymbol{PQ}\cdot\boldsymbol{N}=\dfrac{1}{2}II+O(du^2+dv^2)$，其中 $\dfrac{1}{2}II=\dfrac{1}{2}(L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2)$ 是在 $(du,\ dv)$ 的椭圆抛物面，对所有 $(du,\ dv)$ 不变号，并且当且仅当 $du=0$, $dv=0$ 时等于零，不失一般性，我们可以假设 $\dfrac{1}{2}II\geqslant O$，令 $du=r\cos\theta$, $dv=r\sin\theta$, 研究量

$$\frac{1}{2}\frac{II}{du^2+dv^2}=\frac{1}{2}\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{du^2+dv^2}$$
$$=\frac{1}{2}(L\cos^2\theta+2M\cos\theta\sin\theta+N\sin^2\theta),$$

这正好是在单位圆 $du=\cos\theta$, $dv=\sin\theta$ 上计算出来的 $\dfrac{1}{2}II$, 因为 $\dfrac{1}{2}II$ 连续且在圆上大于零，故 $\dfrac{1}{2}II/(du^2+dv^2)$ 有最小值 $m>0$. 现在选取 ε, 使当 $du^2+dv^2<\varepsilon^2$ 就有

$$\frac{O(du^2+dv^2)}{du^2+dv^2}<m.$$

但另一方面，当 $0<du^2+dv^2<\varepsilon^2$, $\dfrac{d}{du^2+dv^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{II}{du^2+dv^2}+\dfrac{O(du^2+dv^2)}{du^2+dv^2}>0$. 由此可见，当 $du^2+dv^2<\varepsilon^2$ 时 $d\geqslant0$, 也即 Q 落在切平面的同一侧，证毕.

3. 法曲率，高斯曲率和中曲率

9.12 求曲面曲线 $\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$, $u=t^2$, $v=t$ 在点 $t=1$ 的法曲率向量 $\boldsymbol{k}_n$ 和法曲率 $\varkappa_n$.

解：
$$E=1+4u^2,\ F=4uv,\ G=1+4v^2,$$
$$\boldsymbol{N}=(4u^2+4v+1)^{-1/2}(-2u\boldsymbol{e}_1-2v\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$
$$L=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2},\ M=0,\ N=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}.$$
$$du/dt=2t,\ dv/dt=1.$$

当 $t=1$ 时，$u=1$, $v=1$, $E=5$, $F=4$, $G=5$, $\boldsymbol{N}=-1/3[2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3]$, $L=2/3$, $M=0$, $N=2/3$. $\dfrac{du}{dt}=2$, $\dfrac{dv}{dt}=1$. 因此

$$\varkappa_n=\frac{L(du/dt)^2+2M(du/dt)(dv/dt)+N(dv/dt)^2}{E(du/dt)^2+2F(du/dt)(dv/dt)+G(dv/dt)^2}=\frac{10}{123}.$$

$$\boldsymbol{k}_n = K_n\boldsymbol{N} = -\frac{10}{369}[2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3].$$ 证毕.

9.13 设 L 是曲面在 P 点在 $\varkappa_n\neq 0$ 的方向的切线(即非渐近方向的切线). 证明过 P 且与 L 相切的所有曲面曲线的密切圆落在一个球面上.

证: 设 C 是过 P 且与 L 相切的曲面曲线, 因为 $\varkappa_n=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N}\neq 0$, 可见 $\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}$, 可写作

$$\varkappa_n=\varkappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N})=\varkappa\cos\alpha,$$

选取 $\boldsymbol{N}$, 使得 $\varkappa_n>0$ 且 $\boldsymbol{n}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 的方向, 有 $\varkappa_n>0$, $\varkappa>0$ 且 $0\leqslant\alpha=\angle(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{N})\leqslant\frac{\pi}{2}$. 现在设 $\rho=\frac{1}{\varkappa}$, $R=\frac{1}{\varkappa_n}$, 则 $\rho=R\cos\alpha$, 其中 $R=$常数, 且 ρ 是 C 的密切圆的曲率半径. 由此得到密切圆是密切平面和半径为 R 且与 P 点的切面相切的球面的交线, 如图9–19所示, 证毕.

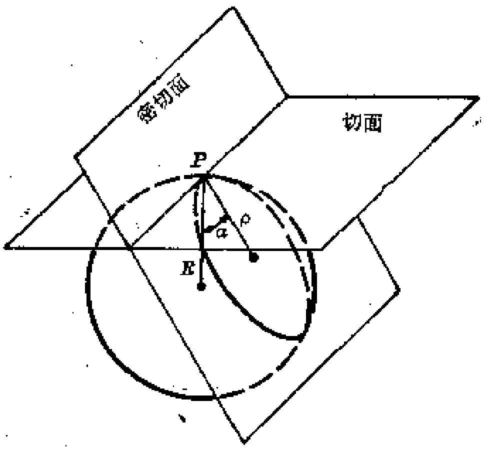


图 9–19

9.14 证明方程 $(EG-F^2)\varkappa^2-(EN+GL-2FM)\varkappa+(LN-M^2)=0$ 的判别式大于或等于零, 并且当且仅当 $L/E=M/F=N/G$ 时等于零.

证: 方程的判别式为 $(EN+GL-2FM)^2-4(EG-F^2)(LN-M^2)$, 可证它恒等于:

$$4\left(\frac{EG-F^2}{E^2}\right)(EM-FL)^2+\left[EN-GL-\frac{2F}{E}(EM-FL)\right]^2.$$

因为 $EG-F^2>0$, 因此判别式大于或等于零, 当且仅当

$$EM-FL=0 \text{ 且 } EN-GL-\frac{2F}{E}(EM-FL)=0,$$

即当且仅当 $EM-FL=0$ 且 $EN-GL=0$,

即当且仅当 $L/E=M/F=N/G$ 时, 上式为零.

9.15 证明在曲面的每一点 P 存在一个抛物面, 使得曲面在 P 点沿任意方向的法曲率和抛物面的法曲率相同.

证: 假设曲面被平移旋转到 P 在原点且切平面是 x_1x_2 平面. 则在 P 点的邻域, 曲面可以表为

$$\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u,\ v)\boldsymbol{e}_3.$$

其中 $\boldsymbol{X}(0,\ 0)=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{X}_u(0,\ 0)=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{X}_v(0,\ 0)=\boldsymbol{e}_2$. 由泰勒定理知

$$\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}(au^2+2buv+cv^2)\boldsymbol{e}_3+O(u^2+v^2),$$

其中 $\boldsymbol{X}_{uu}(0,\ 0)=a\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{X}_{uv}(0,\ 0)=b\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{X}_{vv}(0,\ 0)=c\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{N}(0,\ 0)=\boldsymbol{e}_3$,

因此 $\varkappa_n=\dfrac{a\,du^2+2b\,du\,dv+c\,dv^2}{du^2+dv^2}$, 曲面可近似地表为

$$\boldsymbol{X}^*=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}(au^2+2buv+cv^2)\boldsymbol{e}_3.$$

它是在 $u=0$, $v=0$ 切于 x_1x_2 平面的抛物面, 且使 $\varkappa_n^*=\varkappa_n$ 这就是所要的结果.

9.16 证明定理 9.5, 即是证明 $\varkappa_0$ 是主方向 $du_0:dv_0$ 的主曲率, 当且仅当 $\varkappa_0$, du_0, dv_0 满足

$$\begin{aligned}&(L-\varkappa_0 E)du_0+(M-\varkappa_0 F)dv_0=0,\\&(M-\varkappa_0 F)du_0+(N-\varkappa_0 G)dv_0=0.\end{aligned}\tag{a}$$

证：设 $\varkappa_0$ 是对应于主方向 $du_0:dv_0$ 的主曲率，注意到主曲率是法曲率 $\varkappa_n$ 的最大或最小值，于是

$\varkappa_n=\frac{II}{I}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}$ 在 (du_0, dv_0) 上取最大值或最小值，则由微积分知，偏导数

$$\left.\frac{\partial\varkappa_n}{\partial du}\right|_{(du_0,dv_0)}=0 \text{ 且 } \left.\frac{\partial\varkappa_n}{\partial dv}\right|_{(du_0,dv_0)}=0,$$

即
$$\left.\frac{I\,II_{du}-II\,I_{du}}{I^2}\right|_{(du_0,dv_0)}=0 \text{ 且 } \left.\frac{I\,II_{dv}-II\,I_{dv}}{I^2}\right|_{(du_0,dv_0)}=0.$$

用 I 乘全式得

$$\left.II_{du}-\frac{II}{I}I_{du}\right|_{(du_0,dv_0)}=0 \text{ 且 } \left.II_{dv}-\frac{II}{I}I_{dv}\right|_{(du_0,dv_0)}=0.$$

但是 $(II/I)|_{(du_0,dv_0)}=\varkappa_n|_{(du_0,dv_0)}=\varkappa_0$，

因此 $(II_{du}-\varkappa_0 I_{du})|_{(du_0,dv_0)}=0$，且 $(II_{dv}-\varkappa_0 I_{dv})|_{(du_0,dv_0)}=0$，

因为 $II_{du}=2L\,du+2M\,dv$ 且 $I_{du}=2E\,du+2F\,dv$ 等等，代入，得

$$(L\,du_0+M\,dv_0)-\varkappa_0(E\,du_0+F\,dv_0)=0, \quad (M\,du_0+N\,dv_0)-\varkappa_0(F\,du_0+G\,dv_0)=0.$$

这就给出了所要的结果．其逆，设 $\varkappa_0$, du_0, dv_0, $du_0^2+dv_0^2\neq0$ 满足方程(a)，则 $\varkappa_0$ 必须满足

$$\det\begin{pmatrix}L-KE & M-KF\\ M-KF & N-KG\end{pmatrix}=0.$$

展开整理得
$$(EG-F^2)\varkappa^2-(EN+GL-2FM)\varkappa+(LN-M^2)=0. \tag{b}$$

现设 P 是带有曲率为 $\varkappa$ 的脐点，因为 $\varkappa$ 在每个方向上取值，(a) 的系数必须全为零，即 $\varkappa=L/M=M/F=N/G$．但是另一方面，从问题 9.14 得到方程 (b) 有两重根，因此 $\varkappa=\varkappa_0$，于是 $\varkappa_0$ 为主曲率，$du_0:dv_0$ 的方向是主方向．若 P 为非脐点，$\varkappa_0$ 必是 (b) 的两个不同根中的一个，即是，在非脐点，主方向 $du_0:dv_0$ 的曲率是两个主曲率中的一个，这就证明了定理．

9.17 证明两个曲面的交线 C 上每一点的曲率 $\varkappa$，满足

$$\varkappa^2\sin^2\alpha=\varkappa_1^2+\varkappa_2^2-2\varkappa_1\varkappa_2\cos\alpha,$$

其中 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 是两曲面在 P 点沿曲线 C 的切方向的法曲率，α 是两曲面在 P 点的法向量之间的交角．

证：从方程(9.15)得

$$\varkappa_1\boldsymbol{N}_2=\varkappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}_1)\boldsymbol{N}_2\varkappa_2\boldsymbol{N}_1=\varkappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}_2)\boldsymbol{N}_1,$$

代入且用第一章定理 1.8 的二重向量积的公式得

$$\varkappa_1\boldsymbol{N}_2-\varkappa_2\boldsymbol{N}_1=\varkappa[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}_1)\boldsymbol{N}_2-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N}_2)\boldsymbol{N}_1]=\varkappa(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)\times\boldsymbol{n}.$$

再应用第一章定理 1.8 的向量恒等式[F_1]，进一步得到

$$\begin{aligned}(\varkappa_1\boldsymbol{N}_2-\varkappa_2\boldsymbol{N}_1)\cdot(\varkappa_1\boldsymbol{N}_2-\varkappa_2\boldsymbol{N}_1)&=\varkappa^2[(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)\times\boldsymbol{n}]\cdot[(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{M}_2)\times\boldsymbol{n}]\\&=\varkappa^2[(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)\cdot(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)-((\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)\cdot\boldsymbol{n})^2]\\&=\varkappa^2(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)\cdot(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2),\end{aligned}$$

其中 $(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)\cdot\boldsymbol{n}=0$，因为 $\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2$ 平行于曲线的切方向．展开得

$$\varkappa_1^2(\boldsymbol{N}_2\cdot\boldsymbol{N}_2)-2\varkappa_1\varkappa_2(\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2)+\varkappa_2^2(\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_1)=\varkappa^2|\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2|^2,$$

即
$$\varkappa_1^2-2\varkappa_1\varkappa_2\cos\alpha+\varkappa_2^2=\varkappa^2\sin^2\alpha.$$

9.18 证明在片上每一点，有 $\boldsymbol{N}_u\times\boldsymbol{N}_v=\varkappa(\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v)$，其中 $\varkappa$ 是该点的高斯曲率．

证：因为 N 是单位长向量，N_u，N_v 垂直于 N. 因此平行于切平面，可写作 $N_u=aX_u+bX_v$ 和 $N_v=cX_u+dX_v$，其中 a，b，c，d 是常数，注意

$$N_u\times N_v=(aX_u+bX_v)\times(cX_u+dX_v)=(ad-bc)(X_u\times X_v),$$

于是只要证明 $ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\varkappa$. 由上面和第九章(9.10)，有

$$X_u\cdot N_u=aX_u\cdot X_u+bX_u\cdot X_v=aE+bF=-L.$$

同理可得

$$X_v\cdot N_u=aF+bG=-M,$$

$$X_u\cdot N_v=cE+dF=-M,$$

$$X_v\cdot N_v=cF+dG=-N.$$

以上等式可以写作矩阵积

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{vmatrix},$$

即

$$ad-bc=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\varkappa.$$

证毕.

4. 曲 率 线

9.19 确定 $X=ue_1+ve_2+(u^2+v^2)e_3$ 在 $u=1$, $v=1$ 的主方向并且验证罗德里克公式.

解：从例 9.11 知 $E=1+4u^2$, $F=4uv$, $G=1+4v^2$, $L=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}$, $M=0$, $N=2(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}$. 在 $u=1, v=1$ 有 $E=5$, $F=4$, $G=5$, $L=2/3$, $M=0$, $N=2/3$. 由方程(9.25)，在 $u=1$, $v=1$ 的主方向是下面方程的解

$$-\frac{8}{3}du^2+\frac{8}{3}dv^2=0,$$

即

$$(du+dv)(du-dv)=0.$$

因此

$$du_1:dv_1=1:-1 \text{ 和 } du_2:dv_2=1:1.$$

又

$$X_u=e_1+2ue_3,\ X_v=e_2+2ve_3,$$

$$N=(4u^2+4v^2+1)^{-1/2}(-2ue_1-2ve_2+e_3),$$

$$N_u=(4u^2+4v^2+1)^{-3/2}[-(8v^2+2)e_1+8uv\,e_2-4u\,e_3],$$

$$N_v=(4u^2+4v^2+1)^{-3/2}[8uve_1-(8v^2+2)e_2-4v\,e_3].$$

在 $u=1$, $v=1$.

$$X_u=e_1+2e_3,\ X_v=e_2+2e_3,$$

$$N_u=\frac{1}{27}(-10e_1+8e_2-4e_3),$$

$$N_v=\frac{1}{27}(8e_1-10e_2-4e_3),$$

$$dN_1=N_u\,du_1+N_v\,dv_1=\frac{1}{27}(-18e_1+18e_2)=-\frac{18}{27}(e_1-e_2),$$

$$dX_1=X_u\,du_1+X_v\,dv_1=e_1-e_2,$$

于是
$$dN_1=-\frac{18}{27}dX_1;$$

同理
$$dN_2=N_u du_2+N_v dv_2=\frac{1}{27}[-2e_1-2e_2-8e_3]=\frac{-2}{27}[e_1+e_2+4e_3],$$
$$dX_2=X_u du_2+X_v dv_2=e_1+e_2+4e_3,$$

因此 $dN_2=-\frac{2}{27}dX_2$. 这就验证了罗德里克公式.

9.20 证明 $A\,du^2+2B\,du\,dv+C\,dv^2=0$ 的解当且仅当 $EC-2FB+GA=0$ 时作成片上的正交曲线族.

证: 假设 $A\,du^2+2B\,du\,dv+C\,dv^2=(A'\,du+B'\,dv)(C'\,du+D'\,dv)$. 则曲线族之一是 $A'\,du+B'\,dv=0$ 的解, 另一族是 $C'\,\delta u+D'\,\delta v=0$ 的解. 从而,
$$du:dv=B':-A',$$
$$\delta u:\delta v=D':-C'.$$
从定理 9.1 知, 两族曲线相正交的必要充分条件是
$$E du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,du\,\delta v=EB'D'-F(B'C'+D'A')+GA'C'$$
$$=EC-2FB+GA=0.$$

9.21 证明定理 9.11, 即是证明若 P 是类 $\geqslant 2$ 的曲面片上的点, 则存在包含 P 的坐标片, 使得参数曲线的方向是主方向.

证: 因为在脐点情况下每一个方向都是主方向. 所以研究 P 是非脐点且任一包含 P 的坐标片就够了. 设 $X=X(u,v)$是任一包含非脐点 P 的坐标片, 且设 $du_1:dv_1$ 和 $du_2:dv_2$ 是在 P 点的主方向. 研究参数变换
$$u=du_1\,\theta+du_2\,\phi,$$
$$v=dv_1\,\theta+dv_2\,\phi.$$
注意因为方向 $du_1:dv_1$ 和 $du_2:dv_2$ 不同, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\phi)}=\begin{vmatrix}du_1 & du_2\\ dv_1 & dv_2\end{vmatrix}\neq 0$, 于是参数变换是容许的 C^∞ 类变换. 由此得到 $X=X^*(\theta,\phi)=X(u(\theta,\phi),\ v(\theta,\phi))$是包含 P 的 C^2 类坐标片, 且
$$X_\theta=X_u(\partial u/\partial\theta)+X_v(\partial u/\partial\theta)=X_u du_1+X_v dv_1,$$
$$X_\phi=X_u(\partial u/\partial\phi)+X_v(\partial v/\partial\phi)=X_u du_2+X_v dv_2.$$
即 θ, ϕ 参数曲线在 P 点的方向是主方向.

9.22 Euler 定理. 证明在类 $\geqslant 2$ 的曲面上一点在切线 L 方向的法曲率 $\varkappa_n=\varkappa_1\cos^2\alpha+\varkappa_2\sin^2\alpha$, 其中 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 是 P 点的主曲率. α 是 L 和对应于 $\varkappa_1$ 的主方向的切线间的交角.

证: 若 P 是脐点 $\varkappa_1=\varkappa_2=\varkappa_n$, 定理显然成立. 在 P 为非脐点的情况下, 设 $X=X(u,v)$ 是包含 P 的坐标片. 使得 u, v 参数曲线的方向是主方向. 则从定理 9.12 知 $F=M=0$, 且在任意方向 $du:dv$ 的法曲率 $\varkappa_n=\frac{L\,du^2+N\,dv^2}{E\,du^2+G\,dv^2}$. 从定理 9.13 得到主曲率
$$\varkappa_1=L/E,\ \varkappa_2=N/G, \text{代入 } \varkappa_n, \text{得}$$
$$\varkappa_n=\varkappa_1\frac{E\,du^2}{E\,du^2+G\,dv^2}+\varkappa_2\frac{G\,dv^2}{E\,du^2+G\,dv^2},$$
其中 α, β 分别是任意切线方向 $du:dv$ 和主方向 1:0 和 0:1 的切线间的交角. 从方程(9.6)知
$$\cos\alpha=\frac{E\,du}{\sqrt{E\,du^2+G\,du^2}\sqrt{E}},$$

$$\cos\beta=\frac{G\,dv^2}{\sqrt{E\,du^2+G\,dv^2}\sqrt{G}}.$$

平方并代入得
$$\varkappa_n=\varkappa_1\cos^2\alpha+\varkappa_2\cos^2\beta.$$

但是主方向是相垂直的，即

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

因此
$$\varkappa_n=\varkappa_1\cos^2\alpha+\varkappa_2\sin^2\alpha.$$

9.23 证明定理 9.14，即是证明，若存在某个数 $\varkappa$，在方向 $du:dv$ 上满足 $d\boldsymbol{N}=-\varkappa d\boldsymbol{X}$，则 $du:dv$ 是片上一点的主方向.

证：由 $d\boldsymbol{N}=-\varkappa d\boldsymbol{X}$ 有

$$(d\boldsymbol{N}+\varkappa d\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{X}_u=0 \text{ 且 } (d\boldsymbol{N}+\varkappa d\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{X}_v=0,$$

即
$$[(\boldsymbol{N}_u du+\boldsymbol{N}_v dv)+\varkappa(\boldsymbol{X}_u du+\boldsymbol{X}_v dv)]\cdot\boldsymbol{X}_u=0,$$
$$[(\boldsymbol{N}_u du+\boldsymbol{N}_v dv)+\varkappa(\boldsymbol{X}_u du+\boldsymbol{X}_v dv)]\cdot\boldsymbol{X}_v=0,$$
$$(-\boldsymbol{N}_u\cdot\boldsymbol{X}_u-\varkappa\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u)du+(-\boldsymbol{N}_v\cdot\boldsymbol{X}_u-\varkappa\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_u)dv=0,$$
$$(-\boldsymbol{N}_u\cdot\boldsymbol{X}_v-\varkappa\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v)du+(-\boldsymbol{N}_v\cdot\boldsymbol{X}_v-\varkappa\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v)dv=0,$$

即
$$(L-\varkappa E)du+(M-\varkappa F)dv=0,$$
$$(M-\varkappa F)du+(N-\varkappa G)dv=0.$$

从定理 9.5 得到 $\varkappa$ 是主曲率且 $du:dv$ 是对应的主方向.

9.24 证明定理 9.9，即是证明 $du:dv$ 是片上一点的主方向，当且仅当 du 和 dv 满足 $(EM-LF)du^2+(EN-LG)du\,dv+(FN-MG)dv^2=0$.

证：从定理 9.5 知 $du:dv$ 是主方向，当且仅当存在某一实数 $\varkappa$，使得

$$(L-\varkappa E)du+(M-\varkappa F)dv=0,$$
$$(M-\varkappa F)du+(N-\varkappa G)dv=0.$$

即
$$(L\,du+M\,dv)-\varkappa(E\,du+F\,dv)=0,$$
$$(M\,du+N\,dv)-\varkappa(F\,du+G\,dv)=0.$$

上面方程组有非平凡解 $(1,-\varkappa)$，当且仅当

$$\begin{vmatrix} L\,du+M\,dv & E\,du+F\,dv \\ M\,du+N\,dv & F\,du+G\,dv \end{vmatrix}=0.$$

展开得
$$(EM-LF)du^2+(EN-LG)du\,dv+(FN-MG)dv^2=0$$

9.25 如果两个曲面相交成定角，且交线是其中一个曲面的曲率线. 证明交线也是另一个曲面的曲率线.

证：因为曲面 M_1，M_2 相交成定角，故沿交线 $\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2=$常数.

因而
$$0=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2)=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{N}_1)\cdot\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{N}_1\cdot\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{N}_2\right).$$

设交线为 M_1 的曲率线，则由 Rodrigue 公式

$$\frac{d\boldsymbol{N}_1}{dt}=-\varkappa_1\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}.$$

因此，
$$-\varkappa_1\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\cdot\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{N}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{N}_2}{dt}=0.$$

而 $\dfrac{d\boldsymbol{X}}{dt}$ 垂直于 $\boldsymbol{N}_2$，即 $(d\boldsymbol{X}/dt)\cdot\boldsymbol{N}_2=0$ 于是

$$N_1\cdot\frac{dN_2}{dt}=0$$

因此 $$\frac{dN_2}{dt}\text{ 垂直于 }N_1$$

因为 N_2 是单位长向量，故 $\frac{dN_2}{dt}$ 垂直于 N_2. 由此可见 $\frac{dN_2}{dt}$ 平行于 $\frac{dX}{dt}$. 即存在 $\varkappa_2$ 使得 $\frac{dN_2}{dt}=-\varkappa_2\left(\frac{dX}{dt}\right)$. 由此交线也是 M_2 的曲率线.

9.26 *第三基本形式* 第三基本形式定义为 $III=dN\cdot dN$. 证明 $III-2HII+KI=0$, 其中 H 是中曲率, K 是高斯曲率.

证：容易验证 III 如同 I 一样是不变量，注意 II 和 H 随曲面定向的改变而变号，于是研究固定点 P 和含 P 的坐标片，使得 u, v 参数曲线在 P 点的方向是主方向就足够了，从 Rodrigue 公式,

$$N_u=-\varkappa_1X_u,$$
$$N_v=-\varkappa_2X_v,$$

其中 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 是主曲率，由此可见，对任意(du, dv),

$$dN=N_u\,du+N_v\,dv=-\varkappa_1X_u\,du-\varkappa_2X_v\,dv=-\varkappa_1X_u\,du-\varkappa_1X_v\,dv+\varkappa_1X_v\,dv-\varkappa_2X_v\,dv$$
$$=-\varkappa_1dX+(\varkappa_1-\varkappa_2)X_vdv.$$

即 $$dN+\varkappa_1dX=(\varkappa_1-\varkappa_2)X_vdv,$$

$$dN=-\varkappa_1X_udu+\varkappa_2X_udu-\varkappa_2X_udu-\varkappa_2X_vdv=-\varkappa_2dX+(\varkappa_2-\varkappa_1)X_u\,du,$$

即 $$dN+\varkappa_2dX=(\varkappa_2-\varkappa_1)X_udu.$$

于是 $$(dN+\varkappa_1dX)\cdot(dN+\varkappa_2dX)=(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_2-\varkappa_1)du\,dv\,X_u\cdot X_v.$$

因为曲率线在 P 点是垂直的，故 $X_u\cdot X_v=0$. 则 $(dN+k_1dX)\cdot(dN+k_2dX)=0$

即 $$dN\cdot dN+(\varkappa_1+\varkappa_2)dN\cdot dX+\varkappa_1\varkappa_2dX\cdot dX=0.$$

因此 $$III-2HII+\varkappa I=0$$

9.27 证明用 $f(x_1, x_2, x_3)=C$ 表示的曲面的主方向是以下方程组的解

$$\begin{vmatrix} dx_1 & f_{x_1} & df_{x_1}\\ dx_2 & f_{x_2} & df_{x_2}\\ dx_3 & f_{x_3} & df_{x_3}\end{vmatrix}=0,$$

$$f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2+f_{x_3}dx_3=0.$$

证：设 $dX=dx_1e_1+dx_2e_2+dx_3e_3$ 为切向量，则由 $f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2+f_{x_3}dx_3=0$ 知，$G=f_{x_1}e_1+f_{x_2}e_2+f_{x_3}e_3$ 为法向量，且 $N=\frac{G}{|G|}$，于是

$$dN=\frac{dG}{|G|}-\frac{(G\cdot dG)G}{|G|^3},$$

其中 $dG=df_{x_1}e_1+df_{x_2}e_2+df_{x_3}e_3$, 现设 $dX=dx_1e_1+dx_2e_2+dx_3e_3$ 是主方向，则从 Rodrigue 公式知，dX 平行于 dN，因而三向量 dX, N, dN 线性相关.

$$0=[dX\,N\,dN]=\left[dX\,\frac{G}{|G|}\left(\frac{dG}{|G|}-\frac{(G\cdot dG)G}{|G|^3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{|G|^2}[dX\,G\,dG]-\frac{G\cdot dG}{|G|^4}[dX\,G\,G].$$

而$[dX\,G\,G]=0$，因此$[dX\,G\,dG]=0$. 问题得证.

5. 渐近曲线——共轭曲线族

9.28 曲面 $X=X_1(u)+X_2(v)$，其中 X_1, X_2 任意，证明曲面的参数曲线是共轭曲线族.

证：$X_u=X_1'(u)$, $X_v=X_2'(v)$, $X_{uv}=0$, $M=X_{uv}\cdot N\equiv 0$，于是从定理 9.20 知参数曲线是共轭曲线族.

9.29 证明定理 9.19，即证在椭圆点或双曲点的每一个方向有一个且只有一个共轭方向.

证：由方程(9.29)知，$\delta u:\delta v$ 和 $du:dv$ 共轭，当且仅当

$$(L\,du+M\,dv)\delta u+(M\,du+N\,dv)\delta v=0.$$

上面方程有唯一解 $\delta u:\delta v$, $\delta u^2+\delta v^2\neq 0$ 当且仅当系数不全为零. 于是，给出 $du:dv$，存在唯一的 $\delta u:\delta v$，当且仅当

$$(L\,du+M\,dv)^2+(M\,du+N\,dv)^2\neq 0,$$

即
$$(L^2+M^2)du^2+2(LM+MN)du\,dv+(M^2+N^2)dv^2\neq 0.$$

而这个方程对所有 $du:dv$, $du^2+dv^2\neq 0$ 异于零，当且仅当判别式

$$(L^2+M^2)(M^2+N^2)-(LM+MN)^2>0.$$

展开得
$$(LN-M^2)^2>0,$$

即
$$LN-M^2\neq 0.$$

于是每个方向 $du:dv$ 有一个共轭方向，当且仅当

$$LN-M^2\neq 0.$$

这就证明了定理，其逆也真.

9.30 证明定理 9.18，即是证明沿不是直线的渐近曲线的挠率 τ 满足 $\tau^2=-K$.

证：从定理 9.17 知，渐近曲线上每一点的密切面是曲面在这点的切面. 因此沿曲线付法向量 $b=\pm N$，两边求导得

$$\dot{b}=\pm(dN/ds)=-\tau n,$$

且
$$\frac{dN}{ds}\cdot\frac{dN}{ds}=\tau^2(n\cdot n)=\tau^2.$$

由问题 9.26 知

$$III-2HII+\kappa I=0.$$

而沿渐近曲线 $II=0$, $\dfrac{III}{I}=\dfrac{dN}{ds}\cdot\dfrac{dN}{ds}=\tau^2$.

$$I=\frac{dX}{ds}\cdot\frac{dX}{ds}=1,$$

因此 $$\tau^2+K=0,$$
即 $$\tau^2=-K.$$

9.31 证明用 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 表示的曲面的渐近方向是下面方程组的解

$$dx_1\,df_{x_1}+dx_2\,df_{x_2}+dx_3\,df_{x_3}=0,$$
$$f_{x_1}dx_1+f_{x_2}dx_2+f_{x_3}dx_3=0.$$

证: 从问题 9.27 知 $G=f_{x_1}e_1+f_{x_2}e_2+f_{x_3}e_3$ 是曲面的法向量,

$$N=\frac{G}{|G|},$$

$$dN=\frac{dG}{|G|}-\frac{(G\cdot dG)G}{|G|^3}.$$

因此若 $dX=dx_1e_1+dx_2e_2+dx_3e_3$ 为渐近方向, 则

$$0=II=-dX\cdot dN=-\frac{dX\cdot dG}{|G|}+\frac{(G\cdot dG)(dX\cdot G)}{|G|^3}.$$

而 $dX\cdot G=0$, 于是 $dX\cdot dG=0$,

即 $$dx_1\,df_{x_1}+dx_2\,df_{x_2}+dx_3\,df_{x_3}=0.$$

9.32 用上题结果求曲面 $f=x_3-x_1\sin x_2=0$, $-\frac{\pi}{2}<x_2<\frac{\pi}{2}$, $x_1>0$ 的渐近曲线.

解: $$f_{x_1}=-\sin x_2,\ f_{x_2}=-x_1\cos x_2,\ f_{x_3}=1,$$
$$df_{x_1}=-\cos x_2\,dx_2,\ df_{x_2}=-\cos x_2\,dx_1+x_1\sin x_2\,dx_2,\ df_{x_3}=0.$$

方程 $$df_{x_1}dx_1+df_{x_2}dx_2+df_{x_3}dx_3=-2\cos x_2\,dx_1\,dx_2+x_1\sin x_2\,dx_2^2=0$$

有因子 $$dx_2=0 \text{ 和 } -2\cos x_2\,dx_1+x_1\sin x_2\,dx_2=0.$$

它的解 $$x_2=C \text{ 和 } x_1=K\sec^{1/2}x_2.$$

把第一解代入 $x_3-x_1\sin x_2=0$, 得到直线族 $x_1=t$, $x_2=C$, $x_3=t\sin C$, $t>0$. 把第二解代入 $x_3-x_1\sin x_2=0$, 得到曲线族

$$x_1=K\sec^{1/2}u,\ x_2=u,\ x_3=K\sec^{1/2}u\sin u,\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}.$$

§9.3 补 充 题

9.33 证明 Monge 片 $X=ue_1+ve_2+f(u,v)e_3$ 上的参数曲线为正交曲线族的充分必要条件是 $f_uf_v=0$.

9.34 证明曲线 $Y=Y(s)$ 的切线曲面 $X=Y(s)+ut(s)$ 的第一基本形式是 $I=(1+u^2K^2)ds^2+2ds\,du+du^2$.

9.35 证明曲线 $Y=Y(s)$ 的副法线曲面 $X=Y(s)+ub(s)$ 的第一基本形式是 $I=(1+u^2\tau^2)ds^2+du^2$.

9.36 求球面曲线 $X=(\sin\phi\cos\theta)e_1+(\sin\phi\sin\theta)e_2+(\cos\phi)e_3$, $\theta=\int_{\pi/4}^{t}\frac{1}{\sin\tau}d\tau$, $\phi=t$, $\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的弧长. 答案: $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

9.37 证明 Monge 片 $\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u,v)\boldsymbol{e}_3$ 的曲面的面积为积分

$$A=\iint_{U}\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\,du\,dv.$$

9.38 证明在曲面上两个坐标片 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta,\phi)$ 之交的那部份上有

$$EG-F^2=(E^*G^*-F^{*2})\left[\frac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(u,v)}\right]^2.$$

9.39 证明在曲面 $\boldsymbol{X}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(a\theta+b)\boldsymbol{e}_3$ 上使得

$$(u^2+a^2)d\theta^2-du^2=0$$

的曲线，作成正交曲线族.

9.40 证明在曲面 $\boldsymbol{X}=(r\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(r\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+f(\theta)\boldsymbol{e}_3$ 上的 θ 参数曲线是平行的.

9.41 证明 Monge 片 $\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u,v)\boldsymbol{e}_3$ 的第二基本形式是

$$II=(f_u^2+f_v^2+1)^{-1/2}[f_{uu}du^2+2f_{uv}du\,dv+f_{vv}dv^2].$$

9.42 证明一般柱面 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}(s)+u\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g}=$常向量上的点是抛物点或为平点.

9.43 若 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u,v)$; $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\theta,\phi)$ 是使 $\dfrac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(u,v)}>0$ 的两个坐标片. 证明第二基本形式的系数变换规律为

$$L=L^*\theta_u^2+2M^*\theta_u\phi_u+N^*\phi_u^2,$$

$$M=L^*\theta_u\theta_v+M^*(\theta_u\phi_v+\phi_u\theta_v)+N^*\phi_u\phi_v,$$

$$N=L^*\theta_v^2+2M^*\theta_v\phi_v+N^*\phi_v^2.$$

9.44 证明曲面 $\boldsymbol{X}=(u+v)\boldsymbol{e}_1+(u-v)\boldsymbol{e}_2+uv\boldsymbol{e}_3$ 在 $u=1$, $v=1$ 的点的高斯曲率和中曲率为 $K=-\dfrac{1}{16}$, $H=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$.

9.45 证明旋转曲面 $\boldsymbol{X}=(\cosh u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cosh u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3$ 上每一点的中曲率都为零.

9.46 证明曲面 $x_1\sin x_3-x_2\cos x_3=0$ 的主曲率为 $\pm\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2+1}$.

9.47 证明曲面 $\boldsymbol{X}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+\theta\boldsymbol{e}_3$ 的曲率线为 $\log(u+\sqrt{u^2+1})-\theta=C$ 和 $\log(u+\sqrt{u^2+1})+\theta=K$ 的像.

9.48 用 Dupin 指示线求曲面 $\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+(4u^2+v^2)\boldsymbol{e}_3$ 在点 $u=0$, $v=0$ 的主曲率和主方向.

9.49 证明在片上与给出的曲线族 $Adu+Bdv=0$ 相正交的曲线族是方程 $(EB-FA)du+(FB-GA)dv=0$ 的解.

9.50 设曲面 $\boldsymbol{X}=e^{\frac{u-v}{2}}\left(\cos\dfrac{u+v}{2}\right)\boldsymbol{e}_1+e^{\frac{u-v}{2}}\left(\sin\dfrac{u+v}{2}\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\dfrac{u-v}{2}\right)\boldsymbol{e}_3$ 的参数曲线是渐近曲线，验证沿 u 参数曲线 $(v=0)$ 的挠率 τ 满足 $\tau^2=-K$.

9.51 证明曲面 $x_3-x_1^4+x_2^4=0$ 的渐近曲线是这曲面和柱面族 $x_1^2+x_2^2=C$ 和 $x_1^2-x_2^2=K$ 的交线.

9.52 证明主方向平分渐近方向.

9.53 证明中曲率为零的曲面，它的渐近曲线作成正交曲线族。

9.54 如果球面或平面交曲面成定角，证明交线是曲率线。

9.55 证明在曲面上任一点任意两个相垂直的方向的法曲率的和是常数。

9.56 如果曲面有一非直线族单参数平面渐近曲线，证明曲面为平面。

9.57 设 R 是曲面片上的一个区域，在 R 的单位法向量的端点形成单位球面的子集 R'，称 R' 为 R 的球面像；证明在 P 点附近，$P\in R$，R' 的面积与 R 的面积的比，当 R 收缩到 P 点时，这个面积的比趋于 $|K|$。

提示：参见问题 9.18。

9.58 设 P 是曲面上的一点，在 P 点 $K\neq 0$，证明存在 P 点的一个邻域，使得这个邻域的点可以和这邻域的球面像的点之间建立一一对应（见问题 9.57）。

第十章 曲面论 张量分析

§10.1 基本内容

1. 高斯——魏因加尔吞(Gauss-Weingarton)方程

曲面的 Gauss-Weingarten 方程类似于曲线的 Frenet 方程，前面讲过 Frenet 方程是向量 $\dot{\boldsymbol{t}}$, $\dot{\boldsymbol{n}}$, $\dot{\boldsymbol{b}}$ 写成 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ 的线性组合，其系数是 $\varkappa$ 和 τ。类似地 Gauss-Weingarten 方程是向量 $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的偏导数写成这些向量的线性组合，其系数是第一和第二基本系数的函数。

假定 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u, v)$ 是类 $\geqslant 2$ 的曲面片，则 $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是 C^1 类函数且有连续偏导数 $\boldsymbol{X}_{uu}$, $\boldsymbol{X}_{uv}$, $\boldsymbol{X}_{vv}$, $\boldsymbol{N}_u$ 和 $\boldsymbol{N}_v$，因为向量 $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$, $\boldsymbol{N}$ 线性无关，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_{uu}&=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{X}_v+\alpha_{11}\boldsymbol{N},\\
\boldsymbol{X}_{uv}&=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{X}_v+\alpha_{12}\boldsymbol{N},\\
\boldsymbol{X}_{vv}&=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{X}_v+\alpha_{22}\boldsymbol{N},\\
\boldsymbol{N}_u&=\beta_1^1\boldsymbol{X}_u+\beta_1^2\boldsymbol{X}_v+\gamma_1\boldsymbol{N},\\
\boldsymbol{N}_v&=\beta_2^1\boldsymbol{X}_u+\beta_2^2\boldsymbol{X}_v+\gamma_2\boldsymbol{N},
\end{aligned}\tag{10.1}$$

其中系数 Γ_{ij}^k, α_{ij}, β_i^j, γ_i 确定如下：

因为 $\boldsymbol{N}$ 有单位长，则 $\boldsymbol{N}_u$ 和 $\boldsymbol{N}_v$ 垂直于 $\boldsymbol{N}$. 所以

$$0=\boldsymbol{N}_u\cdot\boldsymbol{N}=\beta_1^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{N}+\beta_1^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{N}+\gamma_1\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N},$$

$$0=\boldsymbol{N}_v\cdot\boldsymbol{N}=\beta_2^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{N}+\beta_2^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{N}+\gamma_2\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N},$$

而
$$\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{N}=0,\quad \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=1,$$

于是
$$\gamma_1=\gamma_2=0,$$

$$\begin{aligned}
-L&=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{N}_u=\beta_1^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u+\beta_1^2\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v=\beta_1^1E+\beta_1^2F,\\
-M&=\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{N}_u=\beta_1^1\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_u+\beta_1^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v=\beta_1^1F+\beta_1^2G,\\
-M&=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{N}_v=\beta_2^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u+\beta_2^2\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v=\beta_2^1E+\beta_2^2F,\\
-N&=\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{N}_v=\beta_2^1\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_u+\beta_2^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v=\beta_2^1F+\beta_2^2G.
\end{aligned}$$

对 β_1^1 和 β_1^2 解前两个方程，对 β_2^1 和 β_2^2 解后两个方程得到

$$\beta_1^1=\frac{MF-LG}{EG-F^2},\quad \beta_1^2=\frac{LF-ME}{EG-F^2},\quad \beta_2^1=\frac{NF-MG}{EG-F^2},$$

$$\beta_2^2=\frac{MF-NE}{EG-F^2}.\tag{10.2}$$

再确定 α_{11}, α_{12}, α_{22}. 因为

$$\begin{aligned}
L&=\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{N}+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{N}+\alpha_{11}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=\alpha_{11},\\
M&=\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{N}+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{N}+\alpha_{12}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=\alpha_{12},\\
N&=\boldsymbol{X}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{N}+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{N}+\alpha_{22}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=\alpha_{22},
\end{aligned}$$

于是

$$\alpha_{11}=L, \quad \alpha_{12}=M, \quad \alpha_{22}=N. \tag{10.3}$$

剩下确定 Γ_{ij}^k, 在问题 10.3 中, 我们证明它们是

$$\Gamma_{11}^1=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{12}^1=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{22}^1=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)}, \tag{10.4}$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}.$$

于是我们有

定理 10.1 在类 $\geqslant 2$ 的曲面片 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u, v)$ 上, 向量 $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$, $\boldsymbol{N}$ 和它们的偏导数满足

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_{uu}&=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{X}_v+L\boldsymbol{N},\\
\boldsymbol{X}_{uv}&=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{X}_v+M\boldsymbol{N},\\
\boldsymbol{X}_{vv}&=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{X}_v+N\boldsymbol{N},\\
\boldsymbol{N}_u&=\beta_1^1\boldsymbol{X}_u+\beta_1^2\boldsymbol{X}_v,\\
\boldsymbol{N}_v&=\beta_2^1\boldsymbol{X}_u+\beta_2^2\boldsymbol{X}_v,
\end{aligned} \tag{10.5}$$

其中系数 β_i^j 和 Γ_{ij}^k 由(10.2)和(10.4)式给出.

上面方程的前三个称为 Gauss 方程, 后两个称为 Weingarten 方程, 量 Γ_{ij}^k 称为第二类 Christoffel 记号. 注意在(10.4)中, Γ_{ij}^k 仅依赖于第一基本系数和它们的导数, 而 β_i^j 却依赖于第一和第二基本系数, 再定义 $\Gamma_{21}^1=\Gamma_{12}^1$ 和 $\Gamma_{21}^2=\Gamma_{12}^2$. 于是对所有 $i, j, k=1, 2$ 有

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k.$$

例 10.1 对旋转曲面 $\boldsymbol{X}=(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g(u)\boldsymbol{e}_3$, $u>0$, 我们验证(10.2)和(10.4)式是正确的.

解: 由

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_u&=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+g'\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{X}_\theta&=-(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{N}&=-(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}}(g'(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+g'(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3),\\
\boldsymbol{X}_{uu}&=g''\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{X}_{u\theta}=-(\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{X}_{\theta\theta}&=-(u\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(u\sin\theta)\boldsymbol{e}_2,
\end{aligned}$$

得

$$E=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u=1+g'^2, \quad F=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_\theta=0, \quad G=\boldsymbol{X}_\theta\cdot\boldsymbol{X}_\theta=u^2,$$

$$L=\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=g''(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad M=\boldsymbol{X}_{u\theta}\cdot\boldsymbol{N}=0,$$

$$N=\boldsymbol{X}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{N}=ug'(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

应用(10.2)和(10.4)算得

$$\begin{aligned}
&\beta_1^1=-g''(1+g'^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \beta_1^2=\beta_2^1=0, \quad \beta_2^2=-u^{-1}g'(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}},\\
&\Gamma_{11}^1=g'g''/(1+g'^2), \quad \Gamma_{11}^2=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2=0, \quad \Gamma_{12}^2=u^{-1},\\
&\Gamma_{22}^1=-u/(1+g'^2).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{X}_\theta+L\boldsymbol{N}&=g'g''(1+g'^2)^{-1}\boldsymbol{X}_u+g''(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{N}\\
&=g''\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{X}_{uu},
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{12}^{1}X_u+\Gamma_{12}^{2}X_\theta+MN=u^{-1}X_\theta=-(\sin\theta)e_1+(\cos\theta)e_2=X_{u\theta},$$

$$\Gamma_{22}^{1}X_u+\Gamma_{22}^{2}X_\theta+NN=-u(1+g'^2)^{-1}X_u+ug'(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}}N$$
$$=-(u\cos\theta)e_1-(u\sin\theta)e_2=X_{\theta\theta},$$

$$\beta_1^1X_u+\beta_1^2X_\theta=-g''(1+g'^2)^{-\frac{3}{2}}X_u=-g''(1+g'^2)^{-\frac{3}{2}}((\cos\theta)e_1+(\sin\theta)e_2+g'e_3)$$
$$=N_u,$$

$$\beta_2^1X_u+\beta_2^2X_\theta=-u^{-1}g'(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}}X_\theta=-g'(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}}((\sin\theta)e_1-(\cos\theta)e_2)$$
$$=N_\theta.$$

这就是所要的结果.

2. 方程的相容性和高斯定理

给出 u, v 的足够高类的函数 E, F, G, L, M, N; 我们研究是否存在一个曲面 $X=X(u, v)$. 它的第一和第二基本系数就是 E, F, G 和 L, M, N. 一般地说,除了满足某些"相容性"条件外,回答是否定的. 这些"相容性"条件是由这样的事实引起:如果 $X(u, v)$ 是 C^3 类函数,则 X 的三阶混合偏导数与微分的顺序无关; 即是

$$(X_u)_{uv}=(X_u)_{vu},\quad (X_v)_{uv}=(X_v)_{vu}.\tag{10.6}$$

在问题 10.28 中,我们证明

定理 10.2 设 $X=X(u, v)$ 是类 $\geqslant 2$ 的曲面片, 使得 Gauss-Weingarten 方程的系数是 C^1 类,则混合偏导数 $X_{uuv}, X_{uvu}, X_{vvu}$ 存在且满足(10.6)的充分必要条件是第一和第二基本系数满足相容性方程(10.7)和(10.8).

$$\begin{aligned}L_v-M_u&=L\Gamma_{12}^1+M(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)-N\Gamma_{11}^2,\\ M_v-N_u&=L\Gamma_{22}^1+M(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)-N\Gamma_{12}^2\end{aligned}\tag{10.7}$$

和

$$\begin{aligned}LN-M^2=&F[(\Gamma_{22}^2)_u-(\Gamma_{12}^2)_v+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2]\\ &+E[(\Gamma_{22}^1)_u-(\Gamma_{12}^1)_v+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1-\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1].\end{aligned}\tag{10.8}$$

相容性方程可以写成各种各样的解析形式, 在这个形式中, 前两个方程(10.7)称为 Mainardi-Codazzi 方程, 后一个方程(10.8)称为高斯方程. 高斯方程特别有趣, 前面讲过 Γ_{ij}^k 只依赖于第一基本系数和它们的偏导数. 因此 $LN-M^2$ 只依赖于 E, F, G 和它们的偏导数, 但是另一方面高斯曲率 $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$ 这个原来要用第二基本形式来定义的高斯曲率,却只依赖于第一基本形式的系数. 这是曲面理论最重要的结果之一、并且我们将看到它有许多重要的推论. 于是我们有:

定理 10.3 高斯的著名定理, 在类 $\geqslant 3$ 的曲面上的高斯曲率只是第一基本形式的系数(和它们的偏导数)的函数.

3. 曲面的基本定理

定理 10.4 曲面的基本定理, 设 E, F, G 是 u, v 的 C^2 类函数. L, M, N 是 u, v 的 C^1 类函数,这些函数都定义在包含(u_0, v_0)的开集上,对所有(u, v),使得

(i) $EG-F^2>0,\ E>0,\ G>0.$

(ii) E, F, G, L, M, N 满足相容性方程(10.7)和(10.8).

则在(u_0, v_0)的邻域,存在一个 C^3 类曲面片 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u, v)$. 它以 E, F, G, L, M, N 为第一和第二基本系数,且除了空间的位置差别外满足这条件的曲面 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u, v)$是唯一的.

以给定的 E, F, G, L, M, N 为曲面的第一第二基本系数的曲面的存在性的证明, 在附录 2 中给出. 我们现在证明唯一性.

设坐标片 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u, v)$和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(u, v)$定义在包含$(u_0, v_0)$的连通开集 U 上, 且对所有(u, v),系数 $E=E^*$, $F=F^*$, $G=G^*$, $L=L^*$, $M=M^*$, $N=N^*$. 我们假设曲面通过平移和旋转, 使得点 $\boldsymbol{X}^*(u_0, v_0)$和对应点 $\boldsymbol{X}(u_0, v_0)$重合. 且切向量 $\boldsymbol{X}^*_u(u_0, v_0)$和 $\boldsymbol{X}^*_v(u_0, v_0)$分别和 $\boldsymbol{X}_u(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{X}_v(u_0, v_0)$重合,这是可以做到的. 因为向量 $\boldsymbol{X}^*_u$, $\boldsymbol{X}^*_v$ 的长度以及它们之间的交角是用 E^*, F^*, G^* 来确定的. E^*, F^*, G^* 和 E, F, G 在(u_0, v_0)相等. 现在设 $u=u(t)$, $v=v(t)$是连结(u_0, v_0)和 U 中任意点(u, v)的正则弧. 研究函数 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(u(t), v(t))$, $\boldsymbol{X}_u(t)=\boldsymbol{X}_u(u(t), v(t))$, $\boldsymbol{X}_v(t)=\boldsymbol{X}_v(u(t), v(t))$. 求导得

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{X}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{X}_v\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{d\boldsymbol{X}_u}{dt}=\boldsymbol{X}_{uu}\frac{du}{dt}+\boldsymbol{X}_{uv}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d\boldsymbol{X}_v}{dt}=\boldsymbol{X}_{vu}\frac{du}{dt}+\boldsymbol{X}_{vv}\frac{dv}{dt}.$$

应用(10.5)的前三个方程和 $N=\dfrac{\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v}{|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v|}=\dfrac{\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$, 我们得到

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{X}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{X}_v\frac{dv}{dt},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{X}_u}{dt}=&\left(\Gamma^1_{11}\frac{du}{dt}+\Gamma^1_{12}\frac{dv}{dt}\right)\boldsymbol{X}_u+\left(\Gamma^2_{11}\frac{du}{dt}+\Gamma^2_{12}\frac{dv}{dt}\right)\boldsymbol{X}_v\\&+\left(L\frac{du}{dt}+M\frac{dv}{dt}\right)(\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v)(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{X}_v}{dt}=&\left(\Gamma^1_{12}\frac{du}{dt}+\Gamma^1_{22}\frac{dv}{dt}\right)\boldsymbol{X}_u+\left(\Gamma^2_{12}\frac{du}{dt}+\Gamma^2_{22}\frac{dv}{dt}\right)\boldsymbol{X}_v\\&+\left(M\frac{du}{dt}+N\frac{dv}{dt}\right)(\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v)(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=a(t)\boldsymbol{X}_u+b(t)\boldsymbol{X}_v,\\&\frac{d\boldsymbol{X}_u}{dt}=c(t)\boldsymbol{X}_u+d(t)\boldsymbol{X}_v+e(t)\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v,\\&\frac{d\boldsymbol{X}_v}{dt}=f(t)\boldsymbol{X}_u+g(t)\boldsymbol{X}_v+h(t)\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v,\end{aligned}\tag{10.9}$$

其中 $a(t)=\dfrac{du}{dt}$, $b(t)=\dfrac{dv}{dt}$, $c(t)=\Gamma^1_{11}\dfrac{du}{dt}+\Gamma^1_{12}\dfrac{dv}{dt}$, 等等.

注意上面方程是以函数 $\boldsymbol{X}(t)$, $\boldsymbol{X}_u(t)$, $\boldsymbol{X}_v(t)$为未知数的一阶常微分方程组, 系数 $a(t)$, $b(t)$等仅依赖于曲线 $u(t)$, $v(t)$和第一第二基本系数 E, F, G, L, M, N 以及 E, F, G 沿 $u=u(t)$, $v=v(t)$的导数, 因为对所有(u, v), $E=E^*$, $F=F^*$, $G=G^*$, $L=L^*$, $M=M^*$, $N=N^*$. 对应的函数 $\boldsymbol{X}^*(t)=\boldsymbol{X}^*(u(t), v(t))$, $\boldsymbol{X}^*_u(t)=\boldsymbol{X}^*_u(u(t), v(t))$, $\boldsymbol{X}^*_v(t)=\boldsymbol{X}^*_v(u(t), v(t))$, 沿坐标片 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(u, v)$满足同一个微分方程组(10.9). 初始值也相同, 即

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}(u_0, v_0)=\boldsymbol{X}^*(u_0, v_0)=\boldsymbol{X}^*(t_0),$$

$$\boldsymbol{X}_u(t_0)=\boldsymbol{X}_u(u_0, v_0)=\boldsymbol{X}^*_u(u_0, v_0)=\boldsymbol{X}^*_u(t_0),$$

$$X_v(t_0)=X_v(u_0,v_0)=X^*_v(u_0,v_0)=X^*_v(t_0).$$

由常微分方程的唯一性定理得到沿曲线 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 对所有 t, $X(t)=X^*(t)$, 因此坐标片 $X=X(u,v)$ 和 $X=X^*(u,v)$ 重合, 这就证明了定理.

例 **10.2** 求基本系数为 $E=1$, $F=0$, $G=\sin^2 u$, $L=1$, $M=0$, $N=\sin^2 u$, $0<u<\pi$ 的曲面.

解: 从(10.2)和(10.4)得到

$$\beta^1_1=-1,\ \beta^2_1=\beta^1_2=0,\ \beta^2_2=-1,\ \Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{22}=0,$$

$$\Gamma^2_{12}=\cot u,\ \Gamma^1_{22}=-\sin u\cot u.$$

于是 Gauss-Weingarten 方程为

$$X_{uu}=N,\ X_{uv}=(\cot u)X_v,\ X_{vv}=-(\sin u\cos u)X_u+\sin^2 u)N,$$

$$N_u=-X_u,\ N_v=-X_v.$$

从第一和第四个方程我们得到

$$X_{uuu}=-X_u,$$

积分得

$$X=a(v)\sin u+b(v)\cos u+c(v).$$

从第二个方程我们得到

$$X_{uv}=a'\cos u-b'\sin u=(\cot u)X_v=a'\cos u+b'\cos u\cot u+c'\cot u,$$

于是

$$b'(\sin u+\cos u\cot u)=-c'\cot u,$$

即

$$b'=-c'\cos u.$$

因为 b' 和 c' 仅是 v 的函数, 得到

$$b'=c'=0.$$

因此

$$b=\text{常向量},\quad c=\text{常向量}.$$

从第一和第三个方程, 我们得到

$$X_{vv}=a''\sin u=-(\sin u\cos u)X_u+(\sin^2 u)X_{uu}=-a\sin u,$$

因而

$$a''=-a.$$

积分得

$$a=d\cos v+e\sin v,\quad \text{其中 } d=\text{常向量},\quad e=\text{常向量}.$$

于是

$$X=d\cos v\sin u+e\sin v\sin u+b\cos u+c.$$

再证明向量 d, e, b 作成标准正交基.

因为

$$\begin{aligned}|X-c|^2&=(d\cdot d)\cos^2 v\sin^2 u+2(d\cdot e)\cos v\sin v\sin^2 u\\&+2(d\cdot b)\cos v\sin u\cos u+(e\cdot e)\sin^2 v\sin^2 u\\&+2(e\cdot b)\sin v\sin u\cos u+(b\cdot b)\cos^2 u\\&=\cos^2 v\sin^2 u+\sin^2 v\sin^2 u+\cos^2 u=1,\end{aligned}$$

即是, X 在中心为 c 半径为 1 的球面上, 为了证明 d, e, b 作成标准正交基. 注意到

$$\begin{aligned}X_v\cdot X_v=G=\sin^2 u=(d\cdot d)\sin^2 v\sin^2 u-2(d\cdot e)\sin v\cos v\sin^2 u\\+(e\cdot e)\cos^2 v\sin^2 u,\end{aligned}$$

即

$$1=(d\cdot d)\sin^2 v-2(d\cdot e)\sin v\cos v+(e\cdot e)\cos^2 v,$$

因而

$$e\cdot e=1,\ d\cdot e=0,\ d\cdot d=1.$$

利用上式我们得到

$$X_v\cdot X_u=F=0=(b\cdot d)\sin v\sin^2 u-(e\cdot b)\cos v\sin^2 u.$$

因而

$$b\cdot d=e\cdot b=0.$$

最后

$$X_u\cdot X_u=E=1=\cos^2 v\cos^2 u+\sin^4 v\cos^2 v+(b\cdot b)\sin^2 u,$$

于是

$$b\cdot b=1.$$

这就是所要的结果. 因此具有给定基本系数的曲面是半径为 1 的球面.

4. 曲面的某些整体定理

我们证明球面是类 $\geqslant 3$ 连通、闭的和它上面所有点都是球性脐点的曲面. 假设 S 是类 $\geqslant 3$ 连通, 闭的且其上每一点都是球性脐点的曲面. 设 P 是 S 上的任意点. $X=X(u, v)$ 是 S 上包含 P 的连通片. 前面讲过在球性脐点, 每一个方向的法曲率 $\varkappa=$ 常数 $\neq 0$, 所以片上的每一个方向是主方向, 于是在片上的每条曲线, 特别是参数曲线是曲率线. 根据 Rodrigue 公式得到

$$N_u=-\varkappa X_u \quad 和 \quad N_v=-\varkappa X_v.$$

注意, 在固定点沿每个方向 $\varkappa$ 是常数, 但不知道当片上一点变到另一点时, $\varkappa$ 是否仍为常数, 为了证明 $\varkappa$ 在点变动时仍为常数. 我们假定 $X(u, v)$ 是 C^3 类. 并计算 $N_{uv}=-\varkappa X_{uv}-\varkappa_v X_u$ 和 $N_{vu}=-\varkappa X_{vu}-\varkappa_u X_v$, 代入得

$$\varkappa_v X_u-\varkappa_u X_v=0.$$

而在每一点, X_u 和 X_v 线性无关, 于是

$$\varkappa_v=0 \quad 和 \quad \varkappa_u=0.$$

因此, 在片上 $\varkappa=$ 常数, 于是, S 上属于片的每一点 $\varkappa=$ 常数 $\neq 0$. 现在研究 P 固定, Q 是 S 上任一其他点, 因为 S 是连通的, 在 S 上存在连结 P 和 Q 的正则弧 Γ: $X=X(t)$, 因为 S 上每个点都是球性脐点, S 上每条曲线都是曲率线, 于是再应用 Rodrigue 公式, 沿 Γ, $\dfrac{dN}{dt}=-\varkappa\dfrac{dX}{dt}$, 注意到在包含 P 的片上 $\varkappa=$ 常数, 因此, 在 Γ 的每一点 $\varkappa=$ 常数, 积分得到 $N=-\varkappa X+c$, 即

$$\left|X-\frac{c}{\varkappa}\right|=\frac{1}{|\varkappa|} \quad (c=常向量).$$

于是 X, 特别地 Q 在中心为 $\dfrac{c}{\varkappa}$ 半径为 $\dfrac{1}{|\varkappa|}$ 的球面上, 因为 Q 任意, 得到 S 在 Σ 上, 因为 Σ 是连通的且 S 是闭的. 根据定理 8.5 得到 $S=\Sigma$. 这就证明了以下定理:

定理 10.5 连通, 闭的, 类 $\geqslant 3$ 且其上的点都是球性脐点的曲面是球面.

同理可证

定理 10.6 连通, 闭的, 类 $\geqslant 2$ 且其上的点都是平点的曲面是平面.

上面定理的证明留给读者作为练习(问题 10.38).

在问题 10.10 中, 我们证明

定理 10.7 (Liebmann) 充分高类, 连通, 紧致且其上高斯曲率为常数的曲面是球面.

注意, 从定理 10.7 我们得到球面的一个重要性质, 它将在下一章祥细地加以研究, 这性质就是若存在一个由曲面 Σ 到曲面 S 的连续映射 f, 这个映射是局部一对一的且保持第一基本形式. 即对 Σ 上每一点 P, 存在一个包含 P 的片 $X=X(u, v)$, 使得 f 是 $X=X(u, v)$ 到 S 上的 $X=X^*(u, v)$ 的一一映射, 且使第一基本系数在对应点相等. 注意, 正如问题

9.6 所证明的，两个曲面的表达式不需要相同。这是因为曲面由它的第一和第二基本系数所唯一确定。如果 Σ 是球面，则 S 也必定是同一半径的球面。因为对球面 Σ，它的高斯曲率 $K=\frac{1}{R^2}$ 是常数，其中 R 是 Σ 的半径，且因高斯曲率只是第一基本系数的函数。由此得到 S 也有常数高斯曲率 $K=\frac{1}{R^2}$，又因为球面 Σ 是连通，紧致且映射 f 是从 Σ 到 S 的连续映射，由此得到 S 是连通，紧致的。从定理 10.7 得到 S 也是半径为 $R=\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的球面。

5. 记 号

使用张量和张量记号，曲面论的公式可以极大的简化，然而这样做需要改变记号，要把向量的分量的下标改为上标。于是在 E^3 中的向量就写成

$$\boldsymbol{X}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+x^3\boldsymbol{e}_3.$$

在参数平面上一点的坐标写成 (u^1, u^2)，坐标片写成 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u^1, u^2)$。$\boldsymbol{X}$ 的偏导数写成

$$\boldsymbol{X}_1=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^1},\quad \boldsymbol{X}_2=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^2},\quad \boldsymbol{X}_{12}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial u^1\partial u^2},\quad \boldsymbol{X}_{22}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial u^2\partial u^2},\quad \text{等等}.$$

由此得到切向量为

$$d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1du^1+\boldsymbol{X}_2du^2,$$

第一基本形式为

$$\begin{aligned}I=d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_1du^1du^1+2\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2du^1du^2+\boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{X}_2du^2du^2\\&=g_{11}du^1du^1+g_{12}du^1du^2+g_{21}du^2du^1+g_{22}du^2du^2\\&=\sum_{i,k}g_{ik}du^idu^k,\end{aligned}\tag{10.10}$$

其中 $g_{11}=\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_1=E$，$g_{12}=g_{21}=\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2=F$ 且 $g_{22}=\boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{X}_2=G$ 表示第一基本系数，$i, k=1.2$。

我们也用 g 表示 I 的判别式，即

$$g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=g_{11}g_{22}-g_{21}g_{12}=EG-F^2.$$

引进量

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g},\quad g^{12}=g^{21}=\frac{-g_{12}}{g}=\frac{-g_{21}}{g},\quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g}.\tag{10.11}$$

在问题 10.12 中，我们证明

$$\sum_k g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j=\begin{cases}1 & 若\ i=j,\\ 0 & 其他情况下,\end{cases}\tag{10.12}$$

即是，矩阵 (g^{ij}) 是矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵。矩阵积

$$\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

最后，法向量 $\boldsymbol{N}$ 的微分为向量

$$d\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_1du^1+\boldsymbol{N}_2du^2.$$

第二基本形式为

$$\begin{aligned} II &= -d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{N}_1 du^1 du^1 - \boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{N}_2 du^1 du^2 - \boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{N}_1 du^2 du^1 - \boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{N}_2 du^2 du^2 \\ &= b_{11} du^1 du^1 + b_{12} du^1 du^2 + b_{21} du^2 du^1 + b_{22} du^2 du^2 \\ &= \sum_{i,k} b_{ik} du^i du^k, \end{aligned} \tag{10.13}$$

其中

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{X}_{11}\cdot\boldsymbol{N} = L, \\ b_{12} = b_{21} &= -\boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{N}_1 = -\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{X}_{12}\cdot\boldsymbol{N} = \boldsymbol{X}_{21}\cdot\boldsymbol{N} = M, \\ b_{22} &= -\boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{X}_{22}\cdot\boldsymbol{N} = N \end{aligned} \tag{10.14}$$

表示第二基本系数.

我们又定义

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = LN - M^2 \tag{10.15}$$

省略和式记号约定如下:

和式

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a_{i\alpha} b^\alpha = a_{i1}b^1 + a_{i2}b^2 + a_{i3}b^3.$$

注意上式的左边,在 $a_{i\alpha}b^\alpha$ 中 α 作为上标和下标恰好出现一次,在这种情况下,我们省略记号 $\sum$, 简写为 $a_{i\alpha}b^\alpha$. 于是

$$a_{i\alpha}b^\alpha = \sum_\alpha a_{i\alpha}b^\alpha = a_{i1}b^1 + a_{i2}b^2 + a_{i3}b^3.$$

指数 α 取遍计算的附标称为求和或哑指标,哑指标在计算中是可以改变的. 即

$$a_{i\alpha}b^\alpha = a_{i\beta}b^\beta = a_{i\gamma}b^\gamma.$$

指标 i 称为自由指标. 它不能改变,最后,在偏导数 $\dfrac{\partial\theta^i}{\partial u^j}$ 或 $\boldsymbol{X}_j = \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^j}$ 中,指标 i 看作上标, j 看作下标.

例 10.3 (a) 设 $f=f(x^1, x^2, x^3)$ 且 $x^i = x^i(u^1, u^2)$, $i=1, 2, 3$, f 对 u^i 的偏导数的链法则是

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^i} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^i} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^i} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i},\ i=1, 2.$$

因为 α 作为 $\dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ 中的下指标又作为 $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$ 的上指标出现,所以上式可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}.$$

(b), 设 $S = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, 因为 α. β 作为上指标和下指标都各出现一次, S 是二重和,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \\ &= a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + a_{13}x^1x^3 + a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 \\ &\quad + a_{23}x^2x^3 + a_{31}x^3x^1 + a_{32}x^3x^2 + a_{33}x^3x^3. \end{aligned}$$

例 10.4 使用省略和式记号, 我们可以把切向量写成 $d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_\alpha du^\alpha$, 第一基本形式写成 $I = \boldsymbol{X}_\alpha\cdot\boldsymbol{X}_\beta du^\alpha du^\beta$, 法向量 $\boldsymbol{N}$ 的微分写成 $d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_\alpha du^\alpha$. 第二基本形式写成

$$II = -\boldsymbol{X}_\alpha\cdot\boldsymbol{N}_\beta du^\alpha du^\beta = \boldsymbol{X}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{N} du^\alpha du^\beta = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

Gauss-Weingarten方程(10.5)写成

$$X_{11}=\Gamma_{11}^{\alpha}X_{\alpha}+b_{11}N,\quad X_{12}=\Gamma_{12}^{\alpha}X_{\alpha}+b_{12}N,$$

$$X_{22}=\Gamma_{22}^{\alpha}X_{\alpha}+b_{22}N,\quad N_1=\beta_1^{\alpha}X_{\alpha}\quad N_2=\beta_2^{\alpha}X_{\alpha},$$

或简写成

$$X_{ij}=\Gamma_{ij}^{\alpha}X_{\alpha}+b_{ij}N,\quad N_i=\beta_i^{\alpha}X_{\alpha},\quad i,\ j=1.2.$$

6 流形初步

张量除了应用于 E^3 中的曲面之外，还有许多应用。现在我们引入初等曲面的广义概念如下：

我们假设一对象 P 的抽象集合 M，P 称为"点"。它与 n 个实数组(u^1, u^1, …, u^n)的集合 S 建立一一对应，则(u^1, u^2, …, u^n)称为 P 的坐标。M 中的点与集合 S 中 n 数组之间的对应称为 M 的坐标系，记做 $P(u^1, u^2, \cdots, u^n)$。类似于在曲面片 $X=X(u^1, u^2)$上确定的一个从片上的点到 u^1u^2 平面上的点之间的一一对应。M 上任一其他的坐标系 $P(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \cdots, \bar{u}^n)$确定另一个 n 个实数组的集合 $\bar{S}$。S 和 $\bar{S}$ 两个集合之间确定一个一一对应关系$(u^1, u^2, \cdots, u^n)\leftrightarrow(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \cdots, \bar{u}^n)$。这个对应称为坐标变换。这个对应可以写作 $\bar{u}^i=\bar{u}^i(u^1, \cdots, u^n)$，$i=1, \cdots, n$。它的逆变换为 $u^i=u^i(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$。这里 $\bar{u}^i$ 是 $\bar{S}$ 上的实变实值函数。u^i 是S 上的实变实值函数。这些变换和曲面片上的参数变换相对应，即和

$$\bar{u}^1=\bar{u}^1(u^1,\ u^2),\quad \bar{u}^2=\bar{u}^2(u^1,\ u^2)$$

(它的逆变换 $u^1=u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $u^2=u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$)相对应。这变换存在于两个坐标片的交集上。

我们假定在 n 个实数集合 S 上确定了坐标系，集合 S 是开的，这就是说若对每一个有序实数组$(u_0^1, \cdots, u_0^n)\in S$，存在一个实数 $\varepsilon>0$，使得对所有满足

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(u^i-u_0^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \text{ 的}(u^1, \cdots, u^n)$$

都在 S 中。

我们也假定变换 $\bar{u}^i=\bar{u}^i(u^1, \cdots, u^n)$和它的逆变换 $u^i=u^i(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$有连续偏导数 $\dfrac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^j}$ 和 $\dfrac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^j}$，$i, j=1, \cdots, n$。且 Jacobi 不为零，即

$$\frac{\partial(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)}=\det\left(\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^j}\right)\neq 0$$

和

$$\frac{\partial(u^1, \cdots, u^n)}{\partial(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)}=\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^j}\right)\neq 0.$$

在问题 10.17 中，我们证明由于 $\bar{u}^i$ 和 u^i 互为反函数，故有

$$\frac{\partial\bar{u}^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}=\delta_i^j. \tag{10.16}$$

一个定义在 S 上的实变实值函数 $\bar{u}^i(u^1, \cdots, u^n)$，在点$(u_0^1, \cdots, u_0^n)$称为连续。如果任给 $\varepsilon>0$，可找 $\delta>0$，使当$[\sum_i(u^i-u_0^i)^2]^{\frac{1}{2}}<\delta$ 就有

$$[\sum_i(\bar{u}^i(u^1, \cdots, u^n)-\bar{u}^i(u_0^1, \cdots, u_0^n))^2]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon.$$

称函数 $\bar{u}^i(u^1, \cdots, u^n)$在 S 上连续，如果它在 S 上的每一点$(u_0^1, \cdots, u_0^n)$都连续。它在$(u_0^1, \cdots, u_0^n)$的偏导数定义为下式的极限，即

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}(u_0^1, \cdots, u_0^n)=\lim_{k\to 0}\frac{\bar{u}^i(u_0^1, \cdots, u_0^j+k, \cdots, u_0^n)-\bar{u}^i(u_0^1, \cdots, u_0^n)}{k}.$$

抽象集合 M 和它上面所定义的容许坐标系的全体一起，称为 n 维基本坐标流形。

例 10.5 (a)在 E^3 中的正则简单(不相交)曲线是1维基本坐标流形.

(b) 在 E^3 中的初等曲面(被一个坐标曲面片所覆盖)是2维基本坐标流形.

(c) 在 E^3 中定义坐标变换 $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$, $i=1, 2, 3$. 它的逆变换 $x^i=x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$, $i=1, 2, 3$, 变换的雅可比

$$\frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}\neq 0 \text{ 和 } \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)}\neq 0.$$

变换属 C^1 类. E^3 和所有坐标系 $P(x^1, x^2, x^3)$一起是3维基本坐标流形.

7. 张 量

在坐标流形上一点 P 的张量 T, 可以看作具有以下两个性质附属于 P 的确定的几何"对象". 这两个性质是

(i) 对于在流形上的每一个坐标系 $P(u^1, \cdots, u^n)$, T 是用数量 C 的集合来表示, C 称 T 对坐标系 $P(u^1, \cdots, u^n)$的分量.

(ii) 如果 $P(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$是流形上的另一个坐标系, T 对于 $P(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$的分量 $\bar{C}$ 和 T 对 $P(u^1, \cdots, u^n)$的分量 C, 用确定的变换法则相联系, 这个变换法则依赖于坐标变换 $\bar{u}^i=\bar{u}^i(u^1, \cdots, u^n)$, $i=1, \cdots, n$, 和它的逆变换 $u^i=u^i(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$, $i=1, \cdots, n$.

在曲面上一点 P 的张量的一个重要例子就是对含 P 的坐标曲面片 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u^1, u^2)$的分量是第一基本系数 g_{ij}, $i, j=1, 2$, 如果 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$是另一包含 P 的坐标曲面片, 它的第一基本系数是 $\bar{g}_{ij}$, 则由(9.2)式和(9.3)式得到 g_{ij}, $\bar{g}_{ij}$ 符合以下变换法则

$$\bar{g}_{ij}=g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j}, \quad \alpha, \beta=1, 2. \tag{10.17}$$

这个张量称为曲面在 P 点的协变度量张量.

就上面所讨论的度量张量而言, 张量 T 通常依赖于流形上的点 P, $\boldsymbol{T}(P)$的分量是 P 点坐标$(u^1, \cdots, u^n)$的函数, 这个函数给流形上的每一点 P, 规定一个张量 $T(P)$, $\boldsymbol{T}(P)$称为张量场.

张量按照它们的变换规律作如下分类:

(i) 一个张量如果它有 n 个分量 $A^1, \cdots, A^n$, 这些分量的变换规律为:

$$\bar{A}^i=A^\alpha\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha}, \quad \alpha, i=1, \cdots, n. \tag{10.18}$$

称这张量为一阶逆变张量或逆变向量.

(ii) 一个张量如果它有 n 个分量 $A_1, \cdots, A_n$, 这些分量的变换规律为:

$$\bar{A}_i=A_\alpha\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}, \quad \alpha, i=1, \cdots, n. \tag{10.19}$$

称这张量为一阶协变张量或协变向量.

(iii) 一个张量如果有 n^2 个分量 A^{ij}, $i, j=1, \cdots, n$, 这些分量的变换规律为:

$$\bar{A}^{ij}=A^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta}, \quad \alpha, \beta, i, j=1, \cdots, n. \tag{10.20}$$

称这张量为2阶逆变张量,

(iv) 一个张量如果它有 n^2 个分量 A_{ij}, $i, j=1, \cdots, n$, 这些分量的变换规律为:

$$\overline{A}_{ij}=A_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j},\ \alpha,\ \beta,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n. \tag{10.21}$$

称这张量为 2 阶协变张量.

(v) 一个张量如果它有 n^{r+s} 个分量 $A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$, $i_k, j_m=1, \cdots, n$, 这些分量的变换规律为:

$$\overline{A}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\left[\det\left(\frac{\partial u_i}{\partial \bar{u}_j}\right)\right]^N A^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial \bar{u}^{i_r}}{\partial u^{\alpha_r}}\frac{\partial u^{\beta_1}}{\partial \bar{u}^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}. \tag{10.22}$$

称这张量为 r 阶逆变 S 阶协变、权为 N 的混合张量, 上面四类张量是(v)的特殊情况.

在(10.22)中, 如果 $\dfrac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}$ 的雅可比行列式的指数 N 等于零, 则称这张量为**绝对张量**.

若 $S=0$, 则张量纯粹是逆变的.

若 $r=0$, 则张量纯粹是协变的.

$r+S$ 称为张量的阶.

注意上面的(i)(ii)(iii)和(iv)都是绝对张量.

我们再定义,

(vi) 数量是零阶张量.

最后, 我们注意, 一般张量的变换规律是可传递的. 例如, 研究变换规律 $\overline{\overline{A}}^i=\overline{A}^\alpha\dfrac{\partial \bar{\bar{u}}^i}{\partial \bar{u}^\alpha}$, 它表示逆变向量在坐标系 $P(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$ 和 $P(\bar{\bar{u}}^1, \cdots, \bar{\bar{u}}^n)$ 中的分量之间的关系. 用(10.18)式代入并应用链法则得到

$$\overline{\overline{A}}^i=\left(A^\beta\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\right)\frac{\partial \bar{\bar{u}}^i}{\partial \bar{u}^\alpha}=A^\beta\left(\frac{\partial \bar{\bar{u}}^i}{\partial \bar{u}^\alpha}\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\right)=A^\beta\frac{\partial \bar{\bar{u}}^i}{\partial u^\beta}.$$

它恰是向量在坐标系 $P(\bar{\bar{u}}^1, \cdots, \bar{\bar{u}}^n)$ 和 $P(u^1, \cdots, u^n)$ 中的分量之间的变换规律.

例 10.6 (a) 设 $f(x^1, x^2, x^3)$ 是 E^3 中定义在开集 U 上的 C^1 类实值函数, 若 $x^i=x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$, $i=1, 2, 3$ 是容许的坐标变换, 则从链法则得到在每一点

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i},\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

于是, 从(10.19)式我们看到 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $i=1, 2, 3$ 是 U 上的协变向量场(或一阶协变张量场)的分量, 这个协变向量场称为 f 的*梯度*.

(b) 比较(10.17)和(10.21)式得到, 以曲面的第一基本系数 g_{ik} 为分量的协变度量张量场是 2 阶绝对协变张量场.

(c) 前章讲过(见(9.11)式)第二基本系数 b_{ij} 如同 g_{ij} 一样变换, 即是在两坐标曲面片 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u^1, u^2)$ 和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^*(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ 的交集上, 有

$$\bar{b}_{ij}=b_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j}.$$

于是第二基本系数也是曲面上 2 阶绝对协变张量的分量.

(d) 设 $\bar{u}^i=\bar{u}^i(u^1, \cdots, u^n)$ 是 n 维坐标流形上容许的坐标变换, 研究在一点的和 $\delta^\beta_\alpha\dfrac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta}\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}$, 因为这个和只在 $\alpha=\beta$ 时出现, 由(10.16)式, 我们有

$$\delta_\alpha^\beta \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i} = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i} = \delta_i^j = \bar{\delta}_i^j.$$

从(10.22)式得到 Kronecker 记号 δ_i^j 是一阶逆变一阶协变的二阶混合绝对张量. 注意这个张量的分量,对流形上每一个坐标系都相同.

(e) 对曲面上两个坐标曲面片的交集上的点,令

$$A^{ij} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta},$$

其中 g^{ij} 由(10.11)式确定,研究和

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ik} A^{kj} &= g_{\gamma\sigma} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^k} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} \\ &= \left(\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\alpha} \right) g_{\gamma\sigma} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} \\ &= \delta_\alpha^\sigma g_{\gamma\sigma} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} = g_{\gamma\alpha} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} \\ &= \delta_\gamma^\beta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} = \delta_i^j = \bar{\delta}_i^j. \end{aligned}$$

因为 $\bar{g}_{ik} A^{kj} = \delta_i^j$,得到

$$\bar{g}^{ij} = A^{ij} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta}.$$

于是从(10.20)式我们看到: g^{ij} 是曲面上的 2 阶绝对逆变张量场的分量, 这个张量称为**逆变度量张量**.

(f) 研究作如下定义的 27 个数量 e^{ijk}, $i, j, k = 1, 2, 3$.

$$e^{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{当指标 } i, j, k \text{ 中有两个相同时}, \\ 1, & \text{当 } i, j, k \text{ 为 } 1, 2, 3 \text{ 的偶排列时}, \\ -1, & \text{当 } i, j, k \text{ 为 } 1, 2, 3 \text{ 的奇排列时}. \end{cases}$$

例如 $e^{112} = 0$, $e^{212} = 0$, $e^{123} = 1$, $e^{213} = -1$, $e^{231} = 1$.

我们讲过

$$\det(a_i^j) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \sum \pm a_i^1 a_j^2 a_k^3,$$

其中当 i, j, k 是 1, 2, 3 的偶排列时取 +. 当 i, j, k 是 1, 2, 3 的奇排列时取 −.

但是另一方面,从 e^{ijk} 的定义得到

$$\det(a_i^j) = \sum_{\alpha\beta\gamma} e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^1 a_\beta^2 a_\gamma^3 = e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^1 a_\beta^2 a_\gamma^3,$$

其中求和取遍所有的 α, β, γ, 此外,注意到

$$e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^p a_\beta^q a_\gamma^r = \begin{cases} +\det(a_i^j), & \text{当 } p、q、r \text{ 是 } 1, 2, 3 \text{ 的偶排列时}, \\ -\det(a_i^j), & \text{当 } p、q、r \text{ 是 } 1, 2, 3 \text{ 的奇排列时}. \end{cases}$$

于是

$$e^{pqr} \det(a_i^j) = e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^p a_\beta^q a_\gamma^r.$$

现在设 $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2, u^3)$ 是 3 维坐标流形上的坐标变换,则从上面得到

$$e^{pqr} \det\left(\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \right) = e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^q}{\partial u^\beta} \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial u^\gamma},$$

则
$$\bar{e}^{pqr}=e^{pqr}=\left[\det\left(\frac{\partial\bar{u}^j}{\partial u^k}\right)\right]^{-1}e^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\beta}\frac{\partial\bar{u}^r}{\partial u^\gamma}$$
$$=\det\left(\frac{\partial u^j}{\partial\bar{u}^i}\right)e^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\beta}\frac{\partial\bar{u}^r}{\partial u^\gamma}.$$
得到 e^{ijk} 是1权3阶逆变张量的分量，注意 e_{ijk}, $i, j, k=1, 2, 3$，其中 $e_{ijk}=e^{ijk}$ 是 -1 权3阶协变张量的分量，这个证明留给读者作为练习。

一个张量的分量关于两个逆变指标(上指标)或关于两个协变指标(下指标)称为对称的，如果当这两个指标交换时，分量仍保持相同。例如 A^{ijk}_{pq}，如果对所有 i 和 k, $A^{ijk}_{pq}=A^{kji}_{pq}$，则 A^{ijk}_{pq} 关于第一和第三指标是对称的。

一个张量的分量关于两个逆变指标或关于两个协变指标称为反对称的，如果当这两个指标交换时，分量变号。例如 A^{ijk}_{pq}，如果对所有 i 和 k, $A^{ijk}_{pq}=-A^{kji}_{pq}$，则 A^{ijk}_{pq} 关于第一和第三逆变指标是反对称的。

一个张量如果它对所有逆变指标对和所有协变指标对都对称，则称这张量为对称张量。

一个张量如果它对所有逆变指标对和所有协变指标对都是反对称的，则称这个张量为反对称张量。

在问题10.19中，我们证明：如果一个张量的分量对于一个坐标系关于某一个指标对是对称的，则这个张量的分量关于其他坐标系关于同一个指标对也是对称的。因此关于指标对对称的性质是张量的属性。对反对称张量上面论述同样也真。

例 10.7 (a) 逆变和协变度量张量都是对称张量，因为 $g^{ij}=g^{ji}$, $i, j=1, 2$ 和 $g_{ij}=g_{ji}$, $i, j=1, 2$.

(b) Kronecker 记号可以作如下扩充
$$\delta^{ij}_{pq}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=p,\ j=q \text{ 且 } i\neq j,\\ -1, & \text{当 } i=q,\ j=p \text{ 且 } i\neq j\ (i, j, p, q=1, \cdots, n),\\ 0, & \text{其他情况.}\end{cases}$$
在问题10.14中，我们证明 δ^{ij}_{pq} 是2阶逆变2阶协变4阶绝对张量的分量，很显然，关于它的逆变指标是反对称的。因为若 $i=p$, $j=q$ 且 $i\neq j$, $\delta^{ji}_{pq}=-1$ 且 $\delta^{ij}_{pq}=1$，因此 $\delta^{ji}_{pq}=-\delta^{ij}_{pq}$。若 $i=q$, $j=p$ 且 $i\neq j$，则 $\delta^{ij}_{pq}=-1$, $\delta^{ji}_{pq}=1$ 且 $\delta^{ji}_{pq}=-\delta^{ij}_{pq}$，其他情况下 $\delta^{ij}_{pq}=0$, $\delta^{ji}_{pq}=0$ 和 $\delta^{ji}_{pq}=-\delta^{ij}_{pq}$.

类似地可以验证关于它的协变指标也是反对称的。

(c) 上面还可以作如下推广：
$$\delta^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_m}=\begin{cases}1, & \text{当 } i_1, \cdots, i_m \text{ 互异，且 } j_1, \cdots, j_m \text{ 是 } i_1, \cdots, i_m \text{ 的偶排列;}\\ -1, & \text{当 } i_1, \cdots, i_m \text{ 互异，且 } j_1, \cdots, j_m \text{ 是 } i_1, \cdots, i_m \text{ 的奇排列;}\\ 0, & \text{其他情况.}\end{cases}$$
例如
$$\delta^{1245}_{1122}=0,\ \delta^{1134}_{1234}=0,\ \delta^{5678}_{1231}=0,\ \delta^{2134}_{1234}=-1,\ \delta^{2314}_{1234}=+1,$$
$$\delta^{3465}_{3456}=-1,\ \delta^{4356}_{4356}=1.$$
可以证明 $\delta^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_m}$ 是 m 阶逆变 m 阶协变反对称绝对张量的分量。

8. 张量代数

(a) *加法*. 设 $A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ 和 $B^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ 是两个同权同阶逆变和协变的张量 A, B 的分量，在问题

10.18 中，我们证明

$$C^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}+B^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}.$$

用 A 和 B 的对应分量相加，得到一个和 A, B 同权同阶逆变和协变的张量 C 的分量，张量 C 称为 A 与 B 的和.

(b) 张量的外积

如果一个 $p+q$ 阶张量 B 的分量 $B^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q}$，用一个 $r+s$ 阶的张量 A 的分量 $A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 去乘，得到一个 $n^{r+s+p+q}$ 个数的集合

$$C^{i_1\cdots i_r\alpha_1\cdots\alpha_p}_{j_1\cdots j_s\beta_1\cdots\beta_q}=A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}B^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q}.$$

容易证明 $C^{i_1\cdots\alpha_p}_{j_1\cdots\beta_q}$ 是张量 C 的分量，张量 C 是 $r+p$ 阶逆变 $s+q$ 阶协变，权为 N_1+N_2 的张量，其中 N_1 是 A 的权，N_2 是 B 的权，张量 C 称为 A 与 B 的外积. 作为特别情况，A 可以是 0 阶张量，即 $A=$数量.

(c) 短缩

设 $A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 是 r 阶逆变 s 阶协变权为 N 的张量 A 的分量，n^{r+s-2} 个数的集合

$$B^{i_2\cdots i_r}_{j_2\cdots j_s}=A^{\alpha i_2\cdots i_r}_{\alpha j_2\cdots j_s}.$$

它是用第一个逆变指标和第一个协变指标恒等并且求和得到，可以证明它是张量 B 的分量. 张量 B 是 $r-1$ 阶逆变 $s-1$ 阶协变权为 N 的张量. 张量 B 称为张量 A 的短缩. 这样一个短缩张量可以由一个逆变指标和一个协变指标的任一选择得到. 即

$$B^{i_2\cdots i_r}_{j_2\cdots j_s}=A^{\alpha i_2\cdots i_r}_{\alpha j_2\cdots j_s}=A^{\beta i_2\cdots i_r}_{\beta j_2\cdots j_s}.$$

例 **10.8**. (a) 设 A^{ij} 是任意一个 2 阶逆变张量的分量，且设 $B^{ij}=B^{ji}$，注意 B^{ij} 也是 2 阶逆变张量的分量，因为

$$B^{\alpha\beta}\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial\bar u^j}\right)^N\frac{\partial\bar u^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\bar u^j}{\partial u^\beta}=A^{\beta\alpha}\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial\bar u^j}\right)^N\frac{\partial\bar u^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\bar u^j}{\partial u^\beta}$$

$$=A^{\beta\alpha}\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial\bar u^j}\right)^N\frac{\partial\bar u^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial\bar u^i}{\partial u^\alpha}=\bar A^{ji}=\bar B^{ij}.$$

现在研究用下式定义的张量

$$C^{ij}=\frac{1}{2}(A^{ij}+B^{ij}),$$

$$D^{ij}=\frac{1}{2}(A^{ij}-B^{ij}),$$

这里

$$C^{ji}=\frac{1}{2}(A^{ji}+B^{ji})=\frac{1}{2}(B^{ij}+A^{ij})=C^{ij},$$

$$D^{ji}=\frac{1}{2}(A^{ji}-B^{ji})=\frac{1}{2}(B^{ij}-A^{ij})=-D^{ij}.$$

于是 C^{ij} 是对称张量，D^{ij} 是反对称张量，

而

$$C^{ij}+D^{ij}=A^{ij},$$

所以每一个 2 阶逆变张量是一个 2 阶对称张量和一个 2 阶反对称张量的和.

(b) $e^{11}=e_{11}=0$, $e^{12}=e_{12}=1$, $e^{21}=e_{21}=-1$, 且 $e^{22}=e_{22}=0$. 这里 e^{ij} 和 e_{ij} 的定义类似于例 10.6(f)中的 e^{ijk} 和 e_{ijk}. 现在研究外积.

$$A^{ij}_{pq}=e^{ij}e_{pq},$$

注意假定 p, q 不同，若 $i=p$ 且 $j=q$ 则 $A^{ij}_{pq}=1$，若 $i=q$ 且 $j=p$，则 $A^{ij}_{pq}=-1$，其他情况下 $A^{ij}_{pq}=0$. 即是由例 10.7(b)得到

$$A^{ij}_{pq}=e^{ij}e_{pq}=\delta^{ij}_{pq}.$$

再缩短得

$$\delta^{\alpha j}_{\alpha q}=e^{\alpha j}e_{\alpha q}=e^{1j}e_{1q}+e^{2j}e_{2q}=\left\{\begin{matrix}1, & 若\ j=q, \\ 0, & 其他情况\end{matrix}\right\}=\delta^j_q.$$

9. 张量在曲面论方程中的应用

我们研究高斯方程

$$\boldsymbol{X}_{ij}=\Gamma^\alpha_{ij}\boldsymbol{X}_\alpha+b_{ij}\boldsymbol{N}\quad(\alpha,\ i,\ j=1,\ 2). \tag{10.23}$$

上式两边和 $\boldsymbol{X}_k$ 作数量积得到

$$\boldsymbol{X}_{ij}\cdot\boldsymbol{X}_k=\Gamma^\alpha_{ij}(\boldsymbol{X}_\alpha\cdot\boldsymbol{X}_k)=\Gamma^\alpha_{ij}g_{\alpha k}.$$

方程 $\Gamma_{ijk}\equiv(\boldsymbol{X}_{ij}\cdot\boldsymbol{X}_k)$ 称为第一类 Christoffel 记号，应用 $g_{i\alpha}g^{\alpha j}=\delta^j_i$ 进一步得到

$$\Gamma_{ij\beta}g^{\beta k}=\Gamma^\alpha_{ij}g_{\alpha\beta}g^{\beta k}=\Gamma^\alpha_{ij}\delta^k_\alpha=\Gamma^k_{ij}.$$

于是得到第一类克氏记号 Γ_{ijk} 与第二类克氏记号 Γ^k_{ij} 的关系式为：

$$\Gamma_{ijk}=g_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{ij}\quad 和\quad \Gamma^k_{ij}=g^{k\alpha}\Gamma_{ij\alpha}. \tag{10.24}$$

在问题 10.24 中，我们证明

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right], \tag{10.25}$$

因此

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{k\alpha}\left[\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha}\right]. \tag{10.26}$$

注意克氏记号的变换规律含有参数的二阶偏导数，因而不是张量的分量。在问题 10.27 中，我们证明

定理 10.8 克氏记号的变换规律为

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}=\left[\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\overline{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^j}+\frac{\partial^2u^\gamma}{\partial\overline{u}^i\partial\overline{u}^j}\right]\frac{\partial\overline{u}^k}{\partial u^\gamma}$$

$$\overline{\Gamma}_{ijk}=\left[\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\overline{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^j}+g_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2u^\alpha}{\partial\overline{u}^i\partial\overline{u}^j}\right]\frac{\partial u^\gamma}{\partial\overline{u}^k}.$$

我们研究 Weingarten 方程

$$\boldsymbol{N}_i=\beta^\alpha_i\boldsymbol{X}_\alpha,\ \alpha,\ i=1,\ 2. \tag{10.27}$$

(10.27) 两边和 $\boldsymbol{X}_j$ 作数量积，我们得到第二基本系数 b_{ij} 满足

$$-b_{ij}=\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{X}_j=\beta^\alpha_i\boldsymbol{X}_\alpha\cdot\boldsymbol{X}_j=\beta^\alpha_i g_{\alpha j}.$$

若我们定义 $b^j_i=b_{i\alpha}g^{\alpha j}$，就得到

$$b^j_i=b_{i\gamma}g^{\gamma j}=-\beta^\alpha_i g_{\alpha\gamma}g^{\gamma j}=-\beta^\alpha_i\delta^j_\alpha=-\beta^j_i.$$

于是 Weingarten 方程可以写成

$$\boldsymbol{N}_i=-b^\alpha_i\boldsymbol{X}_\alpha,\ i=1,\ 2, \tag{10.28}$$

其中 b^j_i 和 b_{ij} 的关系式为

$$b^j_i=g^{\alpha j}b_{i\alpha}\quad 和\quad b_{ij}=g_{i\alpha}b^\alpha_j, \tag{10.29}$$

这里 b_{ij} 是 2 阶绝对协变张量的分量，b^j_i 是 1 阶协变 1 阶逆变 2 阶绝对张量的分量。

我们现在定义第二类 Riemmann 记号 R_{mijk}

$$R_{mijk}=b_{ik}b_{jm}-b_{ij}b_{km}, \tag{10.30}$$

它和第一类 Riemmann 记号 R^p_{ijk} 的关系为

$$R^p_{ijk}=g^{\alpha p}R_{2ijk}. \tag{10.31}$$

我们看到 R_{mijk} 是 4 阶绝对张量的分量，R^p_{ijk} 是 1 阶逆变 3 阶协变的 4 阶绝对混合张量的分量，分别称 R_{mijk} 为协变黎曼曲率张量．称 R^p_{ijk} 为混合黎曼曲率张量．由(10.29)和(10.31)式得到

$$R^p_{ijk}=g^{\alpha p}(b_{ik}b_{j\alpha}-b_{ij}b_{k\alpha})=b_{ik}b^p_j-b_{ij}b^p_k. \tag{10.32}$$

注意在(10.30)中，R_{mijk} 关于前两个指标和后两个指标都是反对称的．即

$$R_{imjk}=-R_{mijk} \text{ 和 } R_{mikj}=R_{mijk}. \tag{10.33}$$

所以 $R_{imjk}=0$ 的条件是前两个指标或后两个指标相同，这样，只有 4 个分量异于零．它们是

$$R_{1212}=R_{2121}=b_{22}b_{11}-b_{12}b_{21}=LN-M^2=b \tag{10.34}$$

和

$$R_{1221}=R_{2112}=b_{12}b_{21}-b_{22}b_{11}=-(LN-M^2)=-b. \tag{10.35}$$

虽然协变黎曼曲率张量是用第二基本形式的系数来定义(见(10.30))，但是实际上它可以只用第一基本形式的系数来表示，即可以只用度量张量和它们的偏导数来表示，在问题(10.29)中我们证明：

定理 10.9

$$R_{mijk}=\frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma_{ikm}-\frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma_{ijk}+\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma_{mk\alpha}-\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma_{mj\alpha}.$$

因为克氏记号只依赖于度量张量和它们的偏导数，所以协变黎曼曲率张量也只依赖于度量张量和它们的偏导数．注意这个结果等价于高斯的最著名的定理．因为从(10.34)得到高斯曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{b}{g}=\frac{R_{1212}}{g}.$$

§10.2 问题及其解答

1. 曲　面　论

10.1 证明 Monge(蒙日)片 $\boldsymbol{X}=u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+f(u,\ v)\boldsymbol{e}_3$ 的 Gauss-Weingarten 方程是

$$g\boldsymbol{X}_{uu}=pr\boldsymbol{X}_u+qr\boldsymbol{X}_v+rg^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{N},$$

$$g\boldsymbol{X}_{uv}=ps\boldsymbol{X}_u+qs\boldsymbol{X}_v+sg^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{N},$$

$$g\boldsymbol{X}_{vv}=pt\boldsymbol{X}_u+qt\boldsymbol{X}_v+tg^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{N},$$

$$g^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{N}_u=(spq-rq^2-r)\boldsymbol{X}_u+(rpq-sp^2-s)\boldsymbol{X}_v,$$

$$g^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{N}_v=(tpq-sq^2-s)\boldsymbol{X}_u+(spq-tp^2-t)\boldsymbol{X}_v,$$

其中，　$p=f_u,\ q=f_v,\ r=f_{uu},\ s=f_{uv},\ t=f_{vv},\ g=1+p^2+q^2.$

证：$\boldsymbol{X}_u=\boldsymbol{e}_1+p\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{e}_2+q\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{X}_{uu}=r\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{X}_{uv}=s\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{X}_{vv}=t\boldsymbol{e}_3.$

$$E=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u=1+p^2,\ F=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v=pq,\ G=\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v=1+q^2,$$

$$EG-F^2=1+p^2+q^2=g,\ N=\frac{X_u\times X_v}{|X_u\times X_v|}=-\frac{pe_1+qe_2-e_3}{g^{\frac{1}{2}}},$$

$$L=X_{uu}\cdot N=\frac{r}{g^{\frac{1}{2}}},\quad M=X_{uv}\cdot N=\frac{s}{g^{\frac{1}{2}}},\quad N=X_{vv}\cdot N=\frac{t}{g^{\frac{1}{2}}},$$

$$E_u=2pr,\ E_v=2ps,\ F_u=ps+qr,\ F_v=pt+qs,$$

$$G_u=2qs,\ G_v=2qt.$$

由(10.2)和(10.4)式我们得到

$$\Gamma_{11}^1=\frac{pr}{g},\quad \Gamma_{12}^1=\frac{ps}{g},\quad \Gamma_{22}^1=\frac{pt}{g},$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{qr}{g},\quad \Gamma_{12}^2=\frac{qs}{g},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{qt}{g},$$

$$\beta_1^1=(spq-rq^2-r)/g^{\frac{3}{2}},\quad \beta_2^1=(tpq-sq^2-s)/g^{\frac{3}{2}},$$

$$\beta_1^2=(rpq-sp^2-s)/g^{\frac{3}{2}},\quad \beta_2^2=(spq-tp^2-t)/g^{\frac{3}{2}}.$$

从而得证.

10.2 利用 Weingarten 方程,证明 $III-2HII+KI=0$, 其中第三基本形式 $III=dN\cdot dN$, H 为中曲率, K 为高斯曲率.

证: 由(10.2)式得到

$$\begin{aligned}N_u\cdot N_u&=(\beta_1^1X_u+\beta_1^2X_v)\cdot(\beta_1^1X_u+\beta_1^2X_v)\\&=\frac{(MF-LG)^2E}{(EG-F^2)^2}+\frac{2(MF-LG)(LF-ME)F}{(EG-F^2)^2}+\frac{(LF-ME)^2G}{(EG-F^2)^2}\\&=\frac{(-2LMF+L^2G+EM^2)(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2}\\&=\frac{(EN-2MF+LG)L-(LN-M^2)E}{EG-F^2}\\&=2HL-KE.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}N_u\cdot N_v&=(\beta_1^1X_u+\beta_1^2X_v)\cdot(\beta_2^1X_u+\beta_2^2X_v)\\&=\frac{(MF-LG)(NF-MG)E}{(EG-F^2)^2}+\frac{(NF-MG)(LF-ME)F}{(EG-F^2)^2}\\&\quad+\frac{(MF-LG)(MF-NE)F}{(EG-F^2)^2}+\frac{(LF-ME)(MF-NE)G}{(EG-F^2)^2}\\&=\frac{(MEN-M^2F+LGM-FLN)(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2}\\&=\frac{(EN-2MF+LG)M}{EG-F^2}-\frac{(LN-M^2)F}{EG-F^2}\\&=2HM-KF.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_v\cdot N_v&=(\beta_2^1X_u+\beta_2^2X_v)\cdot(\beta_2^1X_u+\beta_2^2X_v)\\&=\frac{(NF-MG)^2E}{(EG-F^2)^2}+\frac{2(NF-MG)(MF-NE)F}{(EG-F^2)^2}+\frac{(MF-NE)^2G}{(EG-F^2)^2}\\&=\frac{(EN^2-2MFN+M^2G)(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2}\\&=\frac{(EN-2MF+LG)N}{EG-F^2}-\frac{(LN-M^2)G}{EG-F^2}\end{aligned}$$

$$=2HN-KG$$

由此得到

$$\begin{aligned}III&=d\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{N}_u du+\boldsymbol{N}_v dv)\cdot(\boldsymbol{N}_u du+\boldsymbol{N}_v dv)\\&=\boldsymbol{N}_u\cdot\boldsymbol{N}_u du^2+2\boldsymbol{N}_u\cdot\boldsymbol{N}_v du\,dv+\boldsymbol{N}_v\cdot\boldsymbol{N}_v dv^2\\&=(2HL-KE)du^2+2(2HM-KF)du\,dv+(2HN-KG)dv^2\\&=2H(L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2)-K(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)\\&=2HII-KI.\end{aligned}$$

这就是所要的结果.

10.3 证明 Christoffel 记号 Γ_{ij}^k, 由(10.4)式所确定.

证: 注意到

$$\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{uu}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u)_u=\frac{1}{2}E_u,$$

$$\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{uv}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u)_v=\frac{1}{2}E_v,$$

$$\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_{vv}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v)_v=\frac{1}{2}G_v,$$

$$\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_{uv}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v)_u=\frac{1}{2}G_u,$$

利用上式得到

$$F_u=(\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v)_u=\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_v+\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{uv}=\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_v+\frac{1}{2}E_v,$$

$$F_v=(\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v)_v=\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_v+\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{vv}=\frac{1}{2}G_u+\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{vv}.$$

因此

$$\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_{uu}=F_u-\frac{1}{2}E_v,\quad \boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{vv}=F_v-\frac{1}{2}G_u.$$

由高斯方程和上式得到

$$\frac{1}{2}E_u=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{uu}=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v=\Gamma_{11}^1E+\Gamma_{11}^2F,$$

$$F_u-\frac{1}{2}E_v=\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_{uu}=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v=\Gamma_{11}^1F+\Gamma_{11}^2G,$$

$$\frac{1}{2}E_v=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{uv}=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v=\Gamma_{12}^1E+\Gamma_{12}^2F,$$

$$\frac{1}{2}G_u=\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_{uv}=\Gamma_{12}^1X_v\cdot\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{12}^2X_v\cdot\boldsymbol{X}_v=\Gamma_{12}^1F+\Gamma_{12}^2G,$$

$$F_v-\frac{1}{2}G_u=\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{vv}=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v=\Gamma_{22}^1E+\Gamma_{22}^2F,$$

$$\frac{1}{2}G_v=\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_{vv}=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_u+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v=\Gamma_{22}^1F+\Gamma_{22}^2G.$$

对 Γ_{11}^1 和 Γ_{11}^2 解前两个方程, 对 Γ_{12}^1 和 Γ_{12}^2 解中间两个方程, 对 Γ_{22}^1 和 Γ_{22}^2 解后两个方程, 得到

$$\Gamma_{11}^1=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{12}^1=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{11}^2=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}.$$

这就是所要的结果.

10.4 证明

$$K(EG-F^2)^2=[\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v][\boldsymbol{X}_{vv}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]-[\boldsymbol{X}_{uv}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]^2.$$

证:

$$L=\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v}{|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v|}=\frac{[\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]}{|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v|},$$

$$M=\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=\frac{[\boldsymbol{X}_{uv}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]}{|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v|},$$

$$N=\boldsymbol{X}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=\frac{[\boldsymbol{X}_{vv}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]}{|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v|},$$

于是

$$LN-M^2=\frac{[\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v][\boldsymbol{X}_{vv}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]-[\boldsymbol{X}_{uv}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]^2}{|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v|^2},$$

$$|\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v|^2=(\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v)\cdot(\boldsymbol{X}_u\times\boldsymbol{X}_v)=(\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u)(\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v)-(\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v)^2$$
$$=EG-F^2.$$

因此

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{[\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v][\boldsymbol{X}_{vv}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]-[\boldsymbol{X}_{uv}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v]^2}{(EG-F^2)^2}.$$

10.5 利用上题结果,证明

$$K(EG-F^2)^2=\left(F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}\right)(EG-F^2)$$

$$+\begin{vmatrix}0 & F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v\\ \frac{1}{2}E_u & E & F\\ F_u-\frac{1}{2}E_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}.$$

注意这是高斯定理的直接证明.

证: 注意到

$$[\boldsymbol{abc}][\boldsymbol{def}]=\begin{vmatrix}d_1 & d_2 & d_3\\ e_1 & e_2 & e_3\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}d_1 & d_2 & d_3\\ e_1 & e_2 & e_3\\ f_1 & f_2 & f_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{f} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{f} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f}\end{vmatrix},$$

于是从问题 10.4 和问题 10.3 的计算, 得到

$$K(EG-F^2)^2=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_{vv} & \boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{vv} & \boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_{vv}\\ \boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_u & \boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u & \boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_u\\ \boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_v & \boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v & \boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v\end{pmatrix}$$

$$-\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_{uv} & \boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_{uv} & \boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_{uv}\\ \boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_u & \boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u & \boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_u\\ \boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_v & \boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_v & \boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_{vv} & F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v\\ \frac{1}{2}E_u & E & F\\ F_u-\frac{1}{2}E_v & F & G\end{pmatrix}$$

$$-\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_{uv} & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{pmatrix}.$$

因为两个行列式有公共的子式$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}$，由此得到

$$K(EG-F^2)^2=(\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_{vv}-\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_{uv})(EG-F^2)$$

$$+\begin{vmatrix}0 & F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v\\ \frac{1}{2}E_u & E & F\\ F_u-\frac{1}{2}E_v & F & G\end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}.$$

在问题 10.3 中，我们得到

$$\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_v=F_u-\frac{1}{2}E_v \text{ 和 } \boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_v=\frac{1}{2}G_u,$$

因此
$$\left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)_v=(\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_v)_v=\boldsymbol{X}_{uuv}\cdot\boldsymbol{X}_v+\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_{vv},$$

$$\left(\frac{1}{2}G_u\right)_u=(\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_v)_u=\boldsymbol{X}_{uvu}\cdot\boldsymbol{X}_v+\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_{uv}.$$

代入得到

$$\boldsymbol{X}_{uu}\cdot\boldsymbol{X}_{vv}-\boldsymbol{X}_{uv}\cdot\boldsymbol{X}_{uv}=\left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)_v-\frac{1}{2}G_{uu}=F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}.$$

这就证明了所要的结果。

10.6 如果片上的参数曲线是曲率线，证明 Codazzi-Mainardi 方程(10.7)为

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(\kappa_2-\kappa_1),\qquad \frac{\partial \kappa_2}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(\kappa_1-\kappa_2),$$

其中 κ_1, κ_2 是主曲率.

证：当参数曲线是曲率线时，$F=M=0$，方程(10.7)简化为

$$L_v=L\Gamma^1_{12}-N\Gamma^2_{11}=\frac{LGE_v}{2EG}+\frac{NEE_v}{2EG}=\frac{1}{2}E_v\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right),$$

和
$$N_u=-L\Gamma^1_{22}+N\Gamma^2_{12}=\frac{LGG_u}{2EG}+\frac{MEG_u}{2EG}=\frac{1}{2}G_u\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right),$$

即
$$\left(\frac{L}{E}\right)_v=\frac{E_v}{2E}\left(\frac{N}{G}-\frac{L}{E}\right)\quad 和\quad \left(\frac{N}{G}\right)_u=\frac{G_u}{2G}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right).$$

但从定理 9.13 知，如果参数曲线是曲率线，$\kappa_1=\dfrac{L}{E}$, $\kappa_2=\dfrac{N}{G}$，这就得到所要的结果.

10.7 证明在 E^3 中不存在类 $\geqslant 2$ 紧致且高斯曲率 $K\leqslant 0$ 的曲面.

证：用反证法，假若不然，即设存在类 $\geqslant 2$ 紧致且处处 $K\leqslant 0$ 的曲面 S，现在研究实值函数 $f(P)=|\boldsymbol{X}|^2=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 表点 P，证明 f 在 S 上连续(留给读者作为练习)，因此从定理 6.9，f 有最大值. 可设在 S 上某一点 P_0，$f(P_0)=|\boldsymbol{X}|^2=r^2$ 为最大值. 注意 $r>0$，否则，因为 $f\geqslant 0$ 且 r^2 是它的最大值，在 S 上，有 $f\equiv 0$. S 将由一个点 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 组成，这是不可能的. 现在设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u,v)$ 是 S 上包含 P_0 的片，且 u, v 参数曲线的方向是在 P_0 点的主方向，因为

$$f(P)=f(\boldsymbol{X}(u,v))\text{在 } P_0 \text{ 有最大值},$$

在 P_0，
$$\frac{\partial f}{\partial u}=2\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}_u=0\quad 且\quad \frac{\partial f}{\partial v}=2\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}_v=0;$$

在 P_0，又
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=2\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u+2\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}_{uu}\leqslant 0,$$

且
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=2\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v+2\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}_{vv}\leqslant 0.$$

由前两个方程得到在 P_0 点，$\boldsymbol{X}$ 垂直于 $\boldsymbol{X}_u$ 和 $\boldsymbol{X}_v$. 因此在 P_0，

$$N=\pm\frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}|}=\pm\frac{\boldsymbol{X}}{r}.$$

可设 $N=\dfrac{\boldsymbol{X}}{r}$，代入上面第二组的两个方程，得到在 P_0，

$$\boldsymbol{X}_u\cdot\boldsymbol{X}_u+rN\cdot\boldsymbol{X}_{uu}\leqslant 0$$

且
$$\boldsymbol{X}_v\cdot\boldsymbol{X}_v+rN\cdot\boldsymbol{X}_{vv}\leqslant 0,$$

即
$$E+rL\leqslant 0$$

且
$$G+rN\leqslant 0,$$

即
$$\frac{L}{E}\leqslant -\frac{1}{r}\quad 且\quad \frac{N}{G}\leqslant -\frac{1}{r}.$$

因为 u, v 参数曲线的方向是在 P_0 的主方向，由定理 9.11 得到

$$\kappa_1=\frac{L}{E}\quad 且\quad \kappa_2=\frac{N}{G}$$

因此，在 P_0，$K=\kappa_1\cdot\kappa_2=\dfrac{LN}{EG}\geqslant\dfrac{1}{r^2}>0$，这与在 S 上 $K\leqslant 0$ 的假设矛盾. 命题得证.

10.8 证明$f(P)=[\varkappa_1(P)-\varkappa_2(P)]^2$是曲面上的连续函数.

证：回忆在曲面S上一点P的主曲率依赖于包含P的片的定向，当N的指向改变时主曲率变号，于是除曲面定了向外，不能确定$\varkappa_1(P)$和$\varkappa_2(P)$它们本身作为S处处连续的函数. 注意到f和$\varkappa_1$, $\varkappa_2$的变号无关，因而是S的内在性质，它和包含P的坐标曲面片无关.

要证明f在点P_0连续，我们设$X=X(u, v)$是包含P_0的坐标曲面片，因为$\varkappa_1$, $\varkappa_2$是第一和第二基本系数的连续函数，$f(X(u, v))$是u, v的连续函数，于是任给$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使当$(u, v)\in S_{\delta_1}(u_0, v_0)$就有

$$|f(X(u, v))-f(X(u_0, v_0))|<\varepsilon.$$

由问题8.13知$S_{\delta_1}(u_0, v_0)$在S中的象M是S和E^3中的开集0的交，由此得到在E^3中存在一个$S_\delta(X_0)$，使得$S_\delta(X_0)\cap S\subset M$，于是对$X\in S_\delta(X_0)\cap S$，就有$|f(X)-f(X_0)|<\varepsilon$. 这就证明了$f$在$P_0$连续. 证毕.

10.9 证明Hilbert引理：若P_0是充分高类的曲面上的一点，且

(i) $\varkappa_1(P_0)$是局部极大，

(ii) $\varkappa_2(P_0)$是局部极小，

(iii) $\varkappa_1(P_0)>\varkappa_2(P_0)$，

则
$$K(P_0)\leqslant 0.$$

证：因为$\varkappa_1(P_0)\neq\varkappa_2(P_0)$，$P_0$不是脐点，于是由定理9.10知，存在一个包含$P_0$的坐标曲面片$X=X(u, v)$使对这个片的参数曲线是曲率线. 由问题10.6得到

$$\frac{\partial\varkappa_1}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(\varkappa_2-\varkappa_1) \quad 和 \quad \frac{\partial\varkappa_2}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(\varkappa_1-\varkappa_2).$$

微分得到

$$\frac{\partial^2\varkappa_1}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{EE_{vv}-E_v^2}{E^2}\right)(\varkappa_2-\varkappa_1)+\frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(\varkappa_2-\varkappa_1)_v,$$

$$\frac{\partial^2\varkappa_2}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{GG_{uu}-G_u^2}{G^2}\right)(\varkappa_1-\varkappa_2)+\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(\varkappa_1-\varkappa_2)_u.$$

因为$\varkappa_1$, $\varkappa_2$是在P_0的极值，故在P_0，$\dfrac{\partial\varkappa_1}{\partial v}=\dfrac{\partial\varkappa_2}{\partial u}=0$，$\varkappa_1\neq\varkappa_2$，于是从上面前两个方程得到在$P_0$，$E_v=G_u=0$，代入第二组两个方程得到

$$\frac{\partial^2\varkappa_1}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{E_{vv}}{E}(\varkappa_2-\varkappa_1) \quad 和 \quad \frac{\partial^2\varkappa_2}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{G_{uu}}{G}(\varkappa_1-\varkappa_2).$$

因为$\varkappa_1$是在P_0的极大值，故在P_0，$\dfrac{\partial^2\varkappa_1}{\partial v^2}\leqslant 0$. 又在$P_0$，$\varkappa_1>\varkappa_2$，和$E>0$，因此从上面第一个方程得到在$P_0$，$E_{vv}\geqslant 0$. 因为$\varkappa_2$是在$P_0$的极小值，故在$P_0$，$\dfrac{\partial^2\varkappa_2}{\partial u^2}\geqslant 0$，又$G>0$，因此在$P_0$，$G_{uu}\geqslant 0$. 最后因为参数曲线是曲率线，故$F=M=0$，在$P_0$，$E_v=0$，$G_u=0$，由问题10.5得到在$P_0$，

$$K=-\frac{1}{2}\frac{E_{vv}+G_{uu}}{EG}.$$

因为$E_{vv}\geqslant 0$，$G_{uu}\geqslant 0$，得到

$$K\leqslant 0.$$

这就是所要的结果.

10.10 证明定理10.7. 充分高类，连通，紧致，常数高斯曲率的曲面是球面.

证：设S是连通，紧致，常数高斯曲率的曲面，由问题10.7知，S上所有点$K\leqslant 0$是不

可能的，因此我们可设 K=常数>0，现在若能证明 S 上每一点都是球性脐点，则从定理 10.5 得到 S 是球面，这就完成了定理的证明.

为了证明 S 上每一点都是球性脐点，研究函数

$$f(P)=[\varkappa_1(P)-\varkappa_2(P)]^2.$$

由问题 10.8 知 $f(P)$ 是 S 上的连续函数. 因为 S 是紧致的. 则 f 必在 S 上某一点 P_0 达到绝对极大值，现在设在 P_0, $f>0$, 因为 f 在 P_0 连续则存在某一个邻域 $S(P_0)$ 使得 $f>0$. 因为在 $S(P_0)$, $f=(\varkappa_1-\varkappa_2)^2>0$, $\varkappa_1\neq\varkappa_2$, 又因为在 $S(P_0)$,

$$K=\varkappa_1\varkappa_2>0,$$

故 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 在 $S(P_0)$ 同号，于是可设在 $S(P_0)$, $\varkappa_1>\varkappa_2>0$, 因为在 $S(P_0)$, $\varkappa_1-\varkappa_2>0$, $(\varkappa_1-\varkappa_2)^2$ 在 P_0 有极大值. 由此得到 $\varkappa_1-\varkappa_2$ 在 P_0 有局部极大值. 因为 $K=\varkappa_1\varkappa_2$=常数>0, 当 $\varkappa_1$ 增加时 $\varkappa_2$ 减少，由此得到在 P_0, $\varkappa_1$ 是局部极大值，$\varkappa_2$ 是局部极小值. 于是，我们看出若在 P_0, $f>0$, 则

(i) $\varkappa_1$ 在 P_0 为局部极大值，

(ii) $\varkappa_2$ 在 P_0 为局部极小值，

(iii) 在 P_0, $\varkappa_1>\varkappa_2$.

由问题(10.9)得到在 P_0, $K\leqslant 0$. 但这与在 S 上 $K>0$ 的假设矛盾，于是在 P_0, f 不是正的. 但 f 在 P_0 取极大值，且对所有 P, $f(P)\geqslant 0$. 因此在 S 上，$f\equiv 0$, 可见在 S 上每一点 $\varkappa_1=\varkappa_2$. 因为主曲率是法曲率在 P 点的极值. 因为 $K>0$, 由此得到在每一点 P, 法曲率 $\varkappa_n$=常数$\neq 0$, 即 S 上每一点都是球性脐点，因此 S 是球面.

2. 张 量

10.11 如果 $v^i=a^i_\alpha u^\alpha$ 和 $w^i=b^i_\alpha v^\alpha$, 证明 $w^i=b^i_\alpha a^\alpha_\beta u^\beta$.

证：记 $v^\alpha=\sum_\beta a^\alpha_\beta u^\beta$, 因此

$$w^i=\sum_\alpha b^i_\alpha v^\alpha=\sum_\alpha b^i_\alpha\sum_\beta a^\alpha_\beta u^\beta=\sum_\alpha\sum_\beta b^i_\alpha a^\alpha_\beta u^\beta=b^i_\alpha a^\alpha_\beta u^\beta.$$

10.12 证明 $g_{i\alpha}g^{\alpha j}=\delta^j_i$, α, i, $j=1$, 2, 其中 g^{ij} 用(10.11)式来定义.

证：

$$g_{1\alpha}g^{\alpha 1}=g_{11}g^{11}+g_{12}g^{21}=\frac{g_{11}g_{22}}{g}-\frac{g_{12}g_{12}}{g}=\frac{g}{g}=1,$$

$$g_{1\alpha}g^{\alpha 2}=g_{11}g^{12}+g_{12}g^{22}=\frac{-g_{11}g_{12}}{g}+\frac{g_{12}g_{11}}{g}=0,$$

$$g_{2\alpha}g^{\alpha 1}=g_{21}g^{11}+g_{22}g^{21}=\frac{g_{21}g_{22}}{g}-\frac{g_{22}g_{12}}{g}=0,$$

$$g_{2\alpha}g^{\alpha 2}=g_{21}g^{12}+g_{22}g^{22}=\frac{-g_{21}g_{21}}{g}+\frac{g_{22}g_{11}}{g}=\frac{g}{g}=1,$$

因而

$$g_{i\alpha}g^{\alpha j}=\begin{cases}1, & \text{如果 } i=j,\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}=\delta^j_i.$$

10.13. 证明 $\delta^{pq}_{ij}=\delta^p_i\delta^q_j-\delta^q_i\delta^p_j$, 其中 δ^{pq}_{ij} 的定义见例 10.7(b).

证：设 $A^{pq}_{ij}=\delta^p_i\delta^q_j-\delta^q_i\delta^p_j$, 显然如果 $i=j$, 则 $A^{pq}_{ij}=0$. 现设 $i\neq j$, $p\neq i$, 则除了 $p=j$ 和 $q=i$ 此时 $A^{pq}_{ij}=-1$ 外，$\delta^p_i=0$ 且 $A^{pq}_{ij}=0$, 若 $i\neq j$ 且 $p=i$, 则 $\delta^q_i=0$. 因而除了 $q=j$ 此时 $A^{pq}_{ij}=1$ 外，$A^{pq}_{ij}=0$, 于是

$$A^{pq}_{ij}=\begin{Bmatrix} 1,\text{若 } i\neq j,\ p=i,\ q=j, \\ -1,\text{若 } i\neq j,\ q=i,\ p=j, \\ 0,\text{其他情况} \end{Bmatrix}=\delta^{pq}_{ij}.$$

问题得证.

10.14 证明上题中的 δ^{pq}_{ij} 是 2 阶逆变 2 阶协变绝对张量的分量.

证:

$$\begin{aligned}
&\delta^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\gamma}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\sigma}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\\
&=(\delta^\gamma_\alpha\delta^\sigma_\beta-\delta^\gamma_\beta\delta^\sigma_\alpha)\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\gamma}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\sigma}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\\
&=\left(\delta^\gamma_\alpha\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\gamma}\right)\left(\delta^\sigma_\beta\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\sigma}\right)\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\right)-\left(\delta^\gamma_\beta\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\gamma}\right)\left(\delta^\sigma_\alpha\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\sigma}\right)\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\right)\\
&=\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}-\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\beta}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\\
&=\left(\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\right)\left(\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\right)-\left(\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\right)\left(\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\right)\\
&=\delta^p_i\delta^q_j-\delta^p_j\delta^q_i=\delta^{pq}_{ij}=\bar{\delta}^{pq}_{ij}.
\end{aligned}$$

于是 δ^{pq}_{ij} 是 2 阶逆变 2 阶协变的绝对张量的分量.

另一方法是

积 $\delta^p_i\delta^q_j$ 和 $\delta^p_j\delta^q_i$ 是 1 阶逆变 1 阶协变混合绝对张量的外积. 因此它们是 2 阶逆变 2 阶协变绝对张量的分量. 由此得到差

$$\delta^{pq}_{ij}=\delta^p_i\delta^q_j-\delta^p_j\delta^q_i$$

是 2 阶逆变 2 阶协变绝对张量的分量.

10.15 证明绝对混合张量的分量 A^i_j 的短缩 A^α_α,是数量不变量.

证: 因为 $\bar{A}^i_j=A^\beta_\alpha\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\dfrac{\partial\bar{u}^j}{\partial u^\beta}$,有 $\bar{A}^\gamma_\gamma=A^\beta_\alpha\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^\gamma}\dfrac{\partial\bar{u}^\gamma}{\partial u^\beta}$,由(10.16)式知 $\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^\gamma}\cdot\dfrac{\partial\bar{u}^\gamma}{\partial u^\beta}=\delta^\alpha_\beta$,因此 $\bar{A}^\gamma_\gamma=A^\beta_\alpha\delta^\alpha_\beta=A^\alpha_\alpha$. 这就是所要的结果.

10.16 如果 $\bar{A}^{pq}_{ij}$ 是 2 阶逆变 2 阶协变权为 N 的张量的分量, 证明短缩 $A^{\alpha q}_{\alpha j}$ 是 1 阶逆变 1 阶协变权为 N 的混合张量的分量.

证: 因为

$$\bar{A}^{pq}_{ij}=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^j}\right)\right]^N A^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{u}^p}{\partial u^\gamma}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\sigma}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j},$$

有

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\eta q}_{\eta j}&=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^j}\right)\right]^N A^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{u}^\eta}{\partial u^\gamma}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\sigma}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^\eta}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\\
&=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^j}\right)\right]^N A^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}\delta^\alpha_\gamma\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\sigma}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^j}\right)\right]^N A^{\alpha\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{u}^q}{\partial u^\sigma}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}
\end{aligned}$$

即是

$A^{\alpha q}_{\alpha j}$ 符合权为 N 的绝对混合张量的变换规律,问题得证.

10.17 如果 $\bar{u}^i=\bar{u}^i(u^1,\cdots,u^n)$, $i=1,\cdots,n$,是在 n 维坐标流形上容许的坐标交换, $u^i=u^i(\bar{u}^1,\cdots,\bar{u}^n)$是它的逆变换,证明

$$\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}=\delta^j_i.$$

证：从链法则

$$\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial \bar{u}^i}=\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^i}+\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^i}+\cdots+\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^n}\frac{\partial u^n}{\partial \bar{u}^i}=\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i},$$

而
$$\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial \bar{u}^i}=\left\{\begin{matrix}1, 若\ i=j,\\ 0, 其他情况\end{matrix}\right\}=\delta^j_i,$$

于是
$$\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}=\delta^j_i.$$

10.18 如果 $A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 和 $B^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 是两个同阶逆变和同阶协变同权的张量 A 和 B 的分量，证明

$$C^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}+B^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$$

是和 A 与 B 同阶逆变同阶协变同权的张量的分量.

证：

$$\begin{aligned}\bar{C}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}&=\bar{A}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}+\bar{B}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\\&=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\right)\right]^N A^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}+\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\right)\right]^N B^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}\\&=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\right)\right]^N [A^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}+B^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}]\frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}\\&=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\right)\right]^N C^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}.\end{aligned}$$

这就是所要的结果.

10.19 如果张量的分量 $A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 关于指标 i_1, i_2 对称，证明分量被变换为

$$\bar{A}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\right)\right]^N A^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial u^{j_s}},$$

它们关于指标 i_1, i_2 也是对称的.

证：

$$\begin{aligned}\bar{A}^{i_2 i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}&=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\right)\right]^N A^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\frac{\partial \bar{u}^{i_2}}{\partial u^{\alpha_1}}\frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}\\&=\left[\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\right)\right]^N A^{\alpha_2\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{\alpha_2}}\frac{\partial \bar{u}^{i_2}}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}\\&=A^{i_1 i_2\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}.\end{aligned}$$

10.20 如果 $J=C^{ij}A_iB_j$ 是关于任意两个协变向量的分量 A_i 和 B_i 的数量不变量，证明 C^{ij} 是 2 阶绝对逆变张量的分量.

证：对任意 A_i 和 B_j，给出和 $C^{ij}A_iB_j=\bar{C}^{\alpha\beta}\bar{A}_\alpha\bar{B}_\beta$，因此

$$\begin{aligned}C^{ij}A_iB_j=\bar{C}^{\alpha\beta}\bar{A}_\alpha\bar{B}_\beta&=\bar{C}^{\alpha\beta}A_\gamma\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha}B_\sigma\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\beta}\\&=\bar{C}^{\alpha\beta}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\beta}A_\gamma B_\sigma.\end{aligned}$$

使系数相等，得到

$$C^{ij}=\bar{C}^{\alpha\beta}\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^\beta}.$$

这就证明了 C^{ij} 是 2 阶绝对张量的分量.

10.21 如果 A_{ij} 和 B_{ij} 是对称张量的分量且 x_i 和 y_i 是逆变向量的分量，使得

$$(A_{ij}-\varkappa_1 B_{ij})x^i=0,\ (A_{ij}-\varkappa_2 B_{ij})y^i=0,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n,\ \varkappa_1\neq\varkappa_2.$$

证明 $A_{ij}x^i x^j=B_{ij}x^i x^j=0$ 且 $\varkappa_1$ 是数量不变量.

证：因为 $(A_{ij}-\varkappa_1 B_{ij})x^i=0$，对所有 j 有

$$(A_{ij}-\varkappa_1 B_{ij})x^i y^j=0.$$

同理从第二个方程得到

$$(A_{ij}-\varkappa_2 B_{ij})y^i x^j=0.$$

因为 A_{ij} 和 B_{ij} 对称，

$$(A_{ij}-\varkappa_2 B_{ij})x^i y^j=0.$$

代入得到

$$(\varkappa_1-\varkappa_2)B_{ij}x^i y^j=0.$$

因为 $\varkappa_1\neq\varkappa_2$，由此得到 $B_{ij}x^i y^j=0$.

因此

$$A_{ij}x^i y^j=0.$$

要证 $\varkappa_1$ 是数量不变量，我们设 $\bar{z}^i$ 是任意逆变向量的分量. 我们研究和

$$\begin{aligned}(\bar{A}_{ij}-\varkappa_1\bar{B}_{ij})\bar{x}^i\bar{z}^j&=(A_{\alpha\beta}-\varkappa_1 B_{\alpha\beta})\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}x^\gamma\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^\gamma}z^\sigma\frac{\partial\bar{u}^j}{\partial u^\sigma}\\&=(A_{\alpha\beta}-\varkappa_1 B_{\alpha\beta})x^\gamma z^\sigma\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^\gamma}\right)\left(\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\frac{\partial\bar{u}^j}{\partial u^\sigma}\right)\\&=(A_{\alpha\beta}-\varkappa_1 B_{\alpha\beta})x^\gamma z^\sigma\delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\sigma\\&=(A_{\alpha\beta}-\varkappa_1 B_{\alpha\beta})x^\alpha z^\beta.\end{aligned}$$

因为对所有 β，$(A_{\alpha\beta}-\varkappa_1 B_{\alpha\beta})x^\alpha=0$，故

$$(\bar{A}_{ij}-\varkappa_1\bar{B}_{ij})\bar{x}^i\bar{z}^j=0.$$

但因 $\bar{z}^i$ 是任意的，因此对所有 j，

$$(\bar{A}_{ij}-\varkappa_1\bar{B}_{ij})\bar{x}^i=0.$$

于是 $\varkappa_1$ 是数量不变量.

3. 张量的应用

10.22 证明切向量 $d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_\alpha du^\alpha$ 的分量 du^i, $i=1, 2$, 如同逆变向量的分量的变换规律，称它们为 $d\boldsymbol{X}$ 的逆变分量.

证：设 $u^i=u^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $i=1, 2$, 是容许的参数变换，它的逆变换是 $u^i=u^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $i=1, 2$，则由链法则得到

$$\boldsymbol{X}_\alpha=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial u^\alpha}=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\bar{u}^1}\frac{\partial\bar{u}^1}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\bar{u}^2}\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial u^\alpha}=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^\alpha}.$$

由此得到

$$d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_\alpha du^\alpha=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\bar{u}^i}\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^\alpha}du^\alpha=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\bar{u}^i}\partial\bar{u}^i$$

因此

$$d\bar{u}^i=du^\alpha\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^\alpha},$$

问题得证.

10.23 证明

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki}.$$

证：对 u^k 微分 $g_{ij}=\boldsymbol{X}_i\cdot\boldsymbol{X}_j$，得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\boldsymbol{X}_{ik}\cdot\boldsymbol{X}_j+\boldsymbol{X}_i\cdot\boldsymbol{X}_{jk}.$$

由定义
$$\Gamma_{ijk}=\boldsymbol{X}_{ij}\cdot\boldsymbol{X}_k,$$
因此
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki}.$$

10.24 证明
$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right].$$

证：由上题知
$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}=\Gamma_{jik}+\Gamma_{kij},$$
$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}=\Gamma_{kji}+\Gamma_{ijk},$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki}.$$
因为对所有 $i,\ j,\ k$，$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{jik}$，由此得到
$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=2\Gamma_{ijk}.$$

10.25 证明 $\dfrac{\partial g}{\partial u^i}=2g\Gamma^{\alpha}_{\alpha i}$.

证：
$$\frac{\partial g}{\partial u^i}=\frac{\partial}{\partial u^i}(g_{11}g_{22}-(g_{12})^2)=\frac{\partial g_{11}}{\partial u^i}\,g_{22}+g_{11}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^i}-2g_{12}\,\frac{\partial g_{12}}{\partial u^i}$$
$$=g\left[g^{11}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^i}+g^{22}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^i}+2g^{12}\,\frac{\partial g_{12}}{\partial u^i}\right]=gg^{\alpha\beta}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^i},$$
其中我们用了(10.11)式，由问题 10.23 得到
$$\frac{\partial g}{\partial u^i}=gg^{\alpha\beta}(\Gamma_{\alpha i\beta}+\Gamma_{\beta i\alpha})=g(g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha i\beta}+g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta i\alpha})$$
$$=g(\Gamma^{\alpha}_{\alpha i}+\Gamma^{\beta}_{\beta i})=2g\Gamma^{\alpha}_{\alpha i},$$
其中，我们应用了 $\Gamma^k_{ij}=g^{k\alpha}\Gamma_{ij\alpha}$，且用 α 代换哑指标 β.

10.26 证明
$$R_{mijk}=g_{\alpha m}R^{\alpha}_{ijk}.$$

证：由(10.31)式得到
$$g_{\alpha m}R^{\alpha}_{ijk}=g_{\alpha m}g^{\beta\alpha}R_{\beta ijk}=\delta^{\beta}_{m}R_{\beta ijk}=R_{mijk}.$$

10.27 证明第一类 Christoffel 记号按照下面规律变换：
$$\overline{\Gamma}_{ijk}=\left\{\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\,\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}+g_{\alpha\gamma}\,\frac{\partial^2u^\alpha}{\partial\bar{u}^i\partial\bar{u}^j}\right\}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^k}.$$

证：已经讲过 g_{jk} 是 2 阶协变张量的分量，于是
$$\bar{g}_{jk}=g_{\beta\gamma}\,\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\,\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^k}.$$
对 $\bar{u}^i$ 微分得到
$$\frac{\partial\bar{g}_{jk}}{\partial\bar{u}^i}=\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial\bar{u}^i}\,\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\,\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^k}+g_{\beta\gamma}\,\frac{\partial^2u^\beta}{\partial\bar{u}^i\partial\bar{u}^j}\,\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^k}+g_{\beta\gamma}\,\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\,\frac{\partial^2u^\gamma}{\partial\bar{u}^i\partial\bar{u}^k}$$
$$=\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\,\frac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}\,\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^k}+g_{\alpha\gamma}\,\frac{\partial^2u^\alpha}{\partial\bar{u}^i\partial\bar{u}^j}\,\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^k}+g_{\alpha\gamma}\,\frac{\partial^2u^\alpha}{\partial\bar{u}^i\partial\bar{u}^k}\,\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^j},$$
其中我们用了链法则 $\dfrac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial\bar{u}^i}=\dfrac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\,\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}$，改变哑指标，同时用了 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$.

同理可得
$$\frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial \bar{u}^j}=\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^k}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}+g_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^j\partial \bar{u}^k}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^i}+g_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^i\partial \bar{u}^j}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^k},$$
$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{u}^k}=\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^k}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^j}+g_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^k\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^j}+g_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^k\partial \bar{u}^j}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^i}.$$
由(10.25)得到
$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ijk}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{u}^i}+\frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial \bar{u}^j}-\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{u}^k}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right]\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^k}+g_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^i\partial \bar{u}^j}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^k}\\&=\left\{\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j}+g_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^i\partial \bar{u}^j}\right\}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^k}.\end{aligned}$$

10.28 证明定理 10.2: 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u, v)$ 是类 $\geqslant 2$ 的坐标曲面片，它使 Gauss-Weingarten 方程的系数是 C^1 类，则混合偏导数 $\boldsymbol{X}_{uuv}$, $\boldsymbol{X}_{uvu}$, $\boldsymbol{X}_{vuv}$, $\boldsymbol{X}_{vvu}$ 存在且满足方程(10.6)的充分必要条件是第一和第二基本系数满足相容性方程(10.7)和(10.8).

证: 因为假设高斯方程 $\boldsymbol{X}_{ij}=\Gamma^\alpha_{ij}\boldsymbol{X}_\alpha+b_{ij}\boldsymbol{N}$ 的系数是 C^1 类. 我们可计算 3 阶偏导数
$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{X}_{ij}}{\partial u^k}=\boldsymbol{X}_{ijk}&=(\Gamma^\alpha_{ij})_k\boldsymbol{X}_\alpha+\Gamma^\alpha_{ij}\boldsymbol{X}_{\alpha k}+(b_{ij})_k\boldsymbol{N}+b_{ij}\boldsymbol{N}_k\\&=(\Gamma^\alpha_{ij})_k\boldsymbol{X}_\alpha+\Gamma^\alpha_{ij}[\Gamma^\beta_{\alpha k}\boldsymbol{X}_\beta+b_{\alpha k}\boldsymbol{N}]+(b_{ij})_k\boldsymbol{N}+b_{ij}(-b^\alpha_k\boldsymbol{X}_\alpha)\\&=[(\Gamma^\alpha_{ij})_k+\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta k}-b_{ij}b^\alpha_k]\boldsymbol{X}_\alpha+[\Gamma^\alpha_{ij}b_{\alpha k}+(b_{ij})_k]\boldsymbol{N}.\end{aligned}$$
注意我们用了 Weingarten 方程 $\boldsymbol{N}_i=-b^\alpha_i\boldsymbol{X}_\alpha$.

同理
$$\boldsymbol{X}_{ikj}=[(\Gamma^\alpha_{ik})_j+\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j}-b_{ik}b^\alpha_j]\boldsymbol{X}_\alpha+[\Gamma^\alpha_{ik}b_{\alpha j}+(b_{ik})_j]\boldsymbol{N}.$$
3 阶偏导数与微分顺序无关的充分必要条件是
$$\boldsymbol{X}_{ijk}=\boldsymbol{X}_{ikj},\ i,\ j,\ k=1,\ 2.$$
即
$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_{ijk}-\boldsymbol{X}_{ikj}=&[(\Gamma^\alpha_{ij})_k-(\Gamma^\alpha_{ik})_j+\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta k}-\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j}-b_{ij}b^\alpha_k+b_{ik}b^\alpha_j]\boldsymbol{X}_\alpha\\&+[\Gamma^\alpha_{ij}b_{\alpha k}+(b_{ij})_k-\Gamma^\alpha_{ik}b_{\alpha j}-(b_{ik})_j]\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$
因为 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{N}$ 线性无关，方程等价于

(a) $(\Gamma^\alpha_{ij})_k-(\Gamma^\alpha_{ik})_j+\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta k}-\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j}-b_{ij}b^\alpha_k+b_{ik}b^\alpha_j=0,\ \alpha,\ i,\ j,\ k=1,\ 2.$

(b) $\Gamma^\alpha_{ij}b_{\alpha k}+(b_{ij})_k-\Gamma^\alpha_{ik}b_{\alpha j}-(b_{ik})_j=0,\ i,\ j,\ k=1,\ 2.$

我们首先研究方程(b)，注意如果 $j=k$，方程显然满足，如果 j 和 k 交换，左边只变号，于是(b)等价于用取 $i=1$, $j=1$, $k=2$ 和 $i=2$, $j=1$, $k=2$ 得到的两个方程:
$$(b_{11})_2-(b_{12})_1=\Gamma^\alpha_{12}b_{\alpha 1}-\Gamma^\alpha_{11}b_{\alpha 2},\quad (b_{21})_2-(b_{22})_1=\Gamma^\alpha_{22}b_{\alpha 1}-\Gamma^\alpha_{21}b_{\alpha 2}.$$
如果我们展开上式的右边并用 $b_{11}=L$, $b_{12}=b_{21}=M$, $b_{22}=N$, $u=u^1$, $v=u^2$ 我们得到 Mainardi-Codazzi 方程(10.7)
$$L_v-M_u=\Gamma^1_{12}L+(\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})M-\Gamma^2_{11}N,$$
$$M_v-N_u=\Gamma^1_{22}L+(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})M-\Gamma^2_{12}N.$$
现在研究上面的方程(a). 利用(10.32)，它可写作

(c) $R^\alpha_{ijk}=(\Gamma^\alpha_{ik})_j-(\Gamma^\alpha_{ij})_k+\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j}-\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta k},\ \alpha,\ i,\ j,\ k=1,\ 2.$

从(10.31)式和问题 10.26，上式等价于
$$R_{pijk}=g_{\alpha p}R^\alpha_{ijk}=g_{\alpha p}(\Gamma^\alpha_{ik})_j-g_{\alpha p}(\Gamma^\alpha_{ij})_k+g_{\alpha p}\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j}-g_{\alpha p}\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta k}.$$
由 R_{pijk} 的反对称性质(见(10.33)式)和(10.34)式(10.35)式得到与上面方程等价的一个方程

$$R_{1212}=g_{\alpha 1}(\Gamma^\alpha_{22})_1-g_{\alpha 1}(\Gamma^\alpha_{21})_2+g_{\alpha 1}\Gamma^\beta_{22}\Gamma^\alpha_{\beta 1}-g_{\alpha 1}\Gamma^\beta_{21}\Gamma^\alpha_{\beta 2}.$$

展开合并同类项得到

$$R_{1212}=g_{11}\{(\Gamma^1_{22})_1-(\Gamma^1_{21})_2+\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{21}-\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22}\}$$
$$+g_{21}\{(\Gamma^2_{22})_1-(\Gamma^2_{21})_2+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}-\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12}\}.$$

如果我们用 $g_{11}=E$, $g_{21}=F$, $u^1=u$, $u^2=v$, $\Gamma^i_{12}=\Gamma^i_{21}$, 由(10.34)式知

$$R_{1212}=LM-N^2.$$

我们得到

$$LM-N^2=E\{(\Gamma^1_{22})_u-(\Gamma^1_{12})_v+\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12}-\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}\}$$
$$+F\{(\Gamma^2_{22})_u-(\Gamma^2_{12})_v+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}\}.$$

这便是第三相容性方程(10.8).

10.29 证明定理 10.9:

$$R_{mijk}=(\Gamma_{ikm})_j-(\Gamma_{ijm})_k+\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma_{mk\alpha}-\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma_{mj\alpha}.$$

证: 由问题 10.28 的(c)知

$$R^\alpha_{ijk}=(\Gamma^\alpha_{ik})_j-(\Gamma^\alpha_{ij})_k+\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j}-\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta k}.$$

由问题 10.26 知

$$R_{mijk}=g_{\alpha m}R^\alpha_{ijk}=g_{\alpha m}(\Gamma^\alpha_{ik})_j-g_{\alpha m}(\Gamma^\alpha_{ij})_k+g_{\alpha m}\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j}-g_{\alpha m}\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta k}.$$

现在 $\qquad g_{\alpha m}(\Gamma^\alpha_{ik})_j=(g_{\alpha m}\Gamma^\alpha_{ik})_j-(g_{\alpha m})_j\Gamma^\alpha_{ik}=(\Gamma_{ikm})_j-(\Gamma_{\alpha jm}+\Gamma_{mj\alpha})\Gamma^\alpha_{ik},$

其中我们用了(10.24)式和问题(10.23)的结果.

同理

$$g_{\alpha m}(\Gamma^\alpha_{ij})_k=(\Gamma_{ijm})_k-(\Gamma_{\alpha km}+\Gamma_{mk\alpha})\Gamma^\alpha_{ij},$$
$$g_{\alpha m}\Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j}=\Gamma^\beta_{ik}g_{\alpha m}\Gamma^\alpha_{\beta j}=\Gamma^\beta_{ik}\Gamma_{\beta jm},$$
$$g_{\alpha m}\Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta k}=\Gamma^\beta_{ij}\Gamma_{\beta km}.$$

代入上式得到

$$R_{mijk}=(\Gamma_{ikm})_j-\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma_{\alpha jm}-\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma_{mj\alpha}-(\Gamma_{ijm})_k+\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma_{\alpha km}+\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma_{mk\alpha}+\Gamma^\beta_{ik}\Gamma_{\beta jm}-\Gamma^\beta_{ij}\Gamma_{\beta km}.$$

这就是所要的结果.

§10.3 补 充 题

1. 曲 面 论

10.30 对柱面 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{y}(u)+v\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g}=$常向量, $|\boldsymbol{g}|=1$, 求它的 Christoffel 记号, 答案: $\Gamma^1_{11}=\dfrac{\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{y}''}{|\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}|^2}$, $\Gamma^2_{11}=-\dfrac{(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}')(\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{y}'')}{|\boldsymbol{y}'\times\boldsymbol{g}|^2}$, 其他 $\Gamma^k_{ij}=0$.

10.31 验证函数

$$E=1+4u^2,\ F=-4uv,\ G=1+4v^2,\ L=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$
$$M=0,\ N=-2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

满足相容性方程(10.7)和(10.8).

10.32 应用 Weingarten 方程, 证明 $\boldsymbol{N}_u\times\boldsymbol{N}_v=(EG-F^2)K\boldsymbol{N}$.

10.33 对基本系数为 $E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=-1$, $M=0$, $N=0$ 的曲面, 求 Gauss-

Weingarten 方程的解。

答案：半径为 1 的圆柱面。

10.34 由 Weingarten 方程推出 Rodrigue 公式。

10.35 如果片上的参数曲线是正交曲线族，证明

$$K=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right].$$

10.36 证明 $f(P)=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}$ 是曲面上 P 点的连续函数.

10.37 证明主曲率 $\varkappa_1(P)$ 和 $\varkappa_2(P)$ 是定向曲面上 P 点的连续函数.

10.38 证明定理 10.6：闭的连通类 $\geqslant 2$ 且其上都是平点的曲面是平面.

10.39 证明球面是连通，紧致且有正常数高斯曲率和常数中曲率的曲面.

2. 张 量

10.40 如果 A_i 和 B_j 是两个协变向量的分量，证明外积 $C_{ij}=A_iB_j$ 是 2 阶协变张量的分量.

10.41 证明 $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}=e^{ijk}a_i^1a_j^2a_k^3$，其中 e^{ijk} 的定义见例 10.6.

10.42 证明 $\delta_{ij}^{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}=A_{ij}-A_{ji}$.

10.43 如果 A^{ij} 是绝对逆变张量的分量且 $A_{i\alpha}A^{\alpha j}=\delta_i^j$，证明 $A^{\alpha j}$ 是绝对协变张量的分量. 这两个张量叫做互为共轭的张量.

10.44 如果 A^{ij} 和 A_{ij} 是对称共轭张量的分量，x_i 是协变向量的分量，证明 $A_{ij}x^ix^j=A^{ij}x_ix_j$，其中 $x_i=A^{i\alpha}X_\alpha$.

10.45 证明 $e_{ijk}=e^{ijk}$ 是权为 -1 的 3 阶协变张量的分量，其中 e^{ijk} 的定义见例 10.6(f).

10.46 设 $e^{ii}=0$，$e_{12}=\sqrt{g}$，$e_{21}=-\sqrt{g}$，$e_{22}=0$，其中 $g=g_{11}g_{22}-(g_{12})^2$，证明 e_{ij}，i，$j=1$，2，是反对称协变张量的分量，使得 $\bar{e}_{11}=0$，$\bar{e}_{12}=\sqrt{\bar{g}}$，$e_{21}=-\sqrt{\bar{g}}$，$e_{22}=0$.

10.47 设 $e^{ij}=e_{\alpha\beta}g^{i\alpha}g^{j\beta}$，其中 $e_{\alpha\beta}$ 的定义同上题，证明 $e^{11}=0$，$e^{12}=\dfrac{1}{\sqrt{g}}$，$e^{21}=\dfrac{-1}{\sqrt{g}}$，$e^{22}=0$.

10.48 证明 $b_i^\beta b_{\beta j}-b_j^\beta b_{\beta i}=0$，$i$，$j=1$，2.

10.49 证明 $\bar{\Gamma}_{ij}^k=\left[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}\dfrac{\partial u^\beta}{\partial\bar{u}^j}+\dfrac{\partial^2u^\gamma}{\partial\bar{u}^i\partial\bar{u}^j}\right]\dfrac{\partial\bar{u}^k}{\partial u^\gamma}$.

10.50 证明 $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial u^k}=-g^{\alpha j}\Gamma_{\alpha k}^i-g^{\alpha i}\Gamma_{\alpha k}^j$.

10.51 证明

$$R_{112}^1=R_{221}^2=-R_{121}^2=-R_{212}^2=F\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

$$R_{212}^1=-R_{221}^1=G\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

$$R_{121}^2=-R_{121}^2=E\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

其他情况 $R^p_{ijk}=0$.

10.52 证明 $R^p_{ijk}=\dfrac{\partial\Gamma^p_{ik}}{\partial u^j}-\dfrac{\partial\Gamma^p_{ij}}{\partial u^k}+\Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^p_{\alpha j}-\Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^p_{\alpha k}$.

10.53 证明 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log g}{\partial u^1}=\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log g}{\partial u^2}=\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{22}$.

第十一章 内蕴几何

§11.1 基本内容

1. 曲面的映射

设 S 是 C^m 类曲面，S^* 是 C^n 类曲面，$\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 的映射，如图 11-1 所示．若对于 S 上每个定义在 U 上的坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，从它的定义域 U 到 S^* 的复合映射 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(u, v)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 是 $C^r(r\leqslant \mathrm{Min}(m, n))$ 类正则参数表示，则 $\boldsymbol{f}$ 称为 S 到 S^* 的 C^r 类正则可微映射．我们知道若 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(u, v)$ 是 C^r 类正则参数表示，其应满足：

(i) $\boldsymbol{x}^*$ 在 U 上属于 C^r 类；

(ii) $\boldsymbol{x}_u^*\times\boldsymbol{x}_v^*\neq\mathbf{0}$，对于 U 中所有 (u, v)．

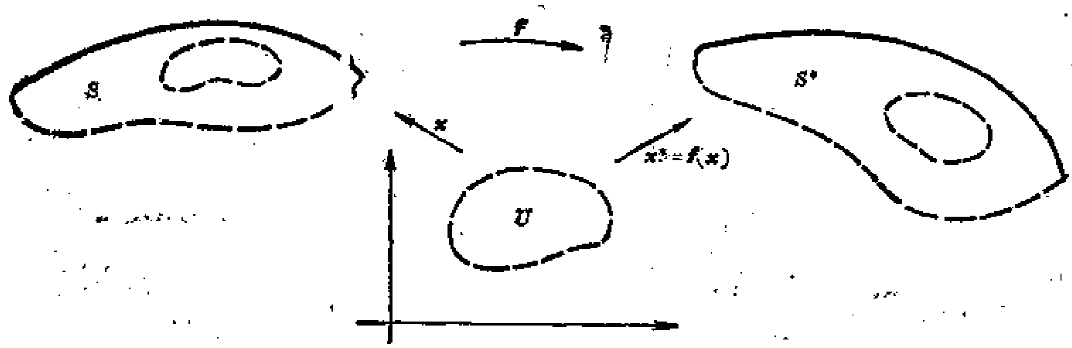


图 11-1

在问题 11.3 中我们将证明，若 S 到 S^* 的映射 $\boldsymbol{f}$ 使得 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$，对于 S 的某个基的每一个坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，是 C^r 类正则参数表示，则 $\boldsymbol{f}$ 将使得 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$，对于 S 上所有坐标曲面片，是 C^r 类正则参数表示．因此，应用上述定义时，只要在能够覆盖住 S 的那些坐标曲面片上，对 $\boldsymbol{f}$ 进行检查就行了．

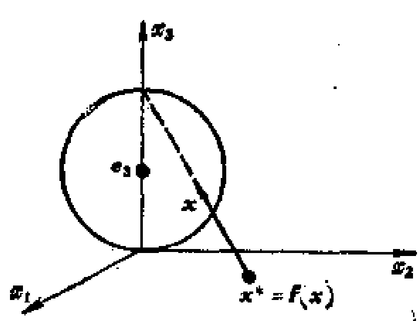


图 11-2

例 11.1 (a) 设 S 是半径为 1，中心在 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{e}_3$，并在北极刺了一个孔的球面，$S^*$ 是 x_1x_2 平面，如图 11-2 所示．设 $\boldsymbol{f}$ 是把球面上点 $\boldsymbol{x}$ 沿过北极的直线投射到 S^* 的映射．映射 $\boldsymbol{f}$ 称为 S 到 S^* 的球极平面投射．易证

$$\boldsymbol{x}=\frac{2}{2-x_3}(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2).$$

我们可以在 $\boldsymbol{x}=(\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2+(\cos\phi+1)\boldsymbol{e}_3,\quad (0<\phi<\pi)$，令 $0<\theta<3\pi/2$ 和 $\pi/2<\theta<5\pi/2$，得到两个坐标曲面片，连同覆盖南极的 Mongo 片

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\left(1-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right)\boldsymbol{e}_3,\quad x_1^2+x_2^2<1,$$

构成 S 的一个藉. 在前两个坐标曲面片上

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\theta,\ \phi))=\frac{2}{1-\cos\phi}((\cos\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_2),$$
$$0<\phi<\pi,$$

这里 $\boldsymbol{x}^*$ 是 C^∞ 类的,且

$$|\boldsymbol{x}_\theta^*\times\boldsymbol{x}_\phi^*|=4\sin\phi/(1-\cos\phi)^2\neq 0.$$

在 Monge 片上

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(x_1,\ x_2))=\frac{2}{1+(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}}(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)$$

也是 C^∞ 类的,且

$$|\boldsymbol{x}_{x_1}^*\times\boldsymbol{x}_{x_2}^*|=4/(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}[1+(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}]\neq 0.$$

因此,刺孔球面到平面上的球极平面投射是 C^∞ 类正则可微映射.

(b) 设 S 是 x_1x_2 平面, S^* 是以 x_3 轴为轴,半径等于 1 的圆柱面. 函数

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(\cos x_1)\boldsymbol{e}_1+(\sin x_1)\boldsymbol{e}_2+x_2\boldsymbol{e}_3$$

定义一个 S 到 S^* 上的映射,它把平面缠绕到柱面上,使得直线: $x_1=$常数,映射到圆柱的母线上,直线: $x_2=$常数,映射到圆柱的横截圆上. 这里 $\boldsymbol{x}=\theta\boldsymbol{e}_1+\phi\boldsymbol{e}_2$ 是覆盖 S 的坐标曲面片,在其上,

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\theta,\ \phi))=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+\phi\boldsymbol{e}_3$$

显然是 C^∞ 类的,且

$$|x_\theta^*\times x_\phi^*|=|(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2|=1\neq 0.$$

于是 $\boldsymbol{f}$ 是平面到圆柱面上的 C^∞ 类正则可微映射.

我们知道(问题 8.12)正则参数表示是局部一一的和双连续的. 于是,若 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 的正则可微映射, P 是 S 上一点, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$是 S 上包含 P 的坐标曲面片,它使得 P 是$(u,\ v)$的像,则存在$(u,\ v)$的邻域 $\delta(u,\ v)$,在其上, $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u,\ v))$是 1-1 和双连续的,因而是 S^* 上包含 $\boldsymbol{f}(P)$的坐标曲面片,如图 11-3 所示. 因为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$,限制在 $S(u,\ v)$时,是 S 上的坐标曲面片,我们有

定理 11.1 若 $\boldsymbol{f}$ 是曲面 S 到曲面 S^* 的正则可微映射, 则对于 S 上每个点 P, 存在 S 上包含 P 的坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$,使得 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u,\ v))$是 S^* 上的坐标曲面片.

注意,对于 S 上每个坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$,映射 $\boldsymbol{f}$ 是复合映射 $\boldsymbol{x}^*\circ\boldsymbol{x}^{-1}$,这里 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u,\ v))$. 因为两个一一双连续映射的复合映射是一一双连续的,我们有:

系: 正则可微映射是局部一一双连续的,即若 $\boldsymbol{f}$ 是曲面 S 到曲面 S^* 的正则可微映

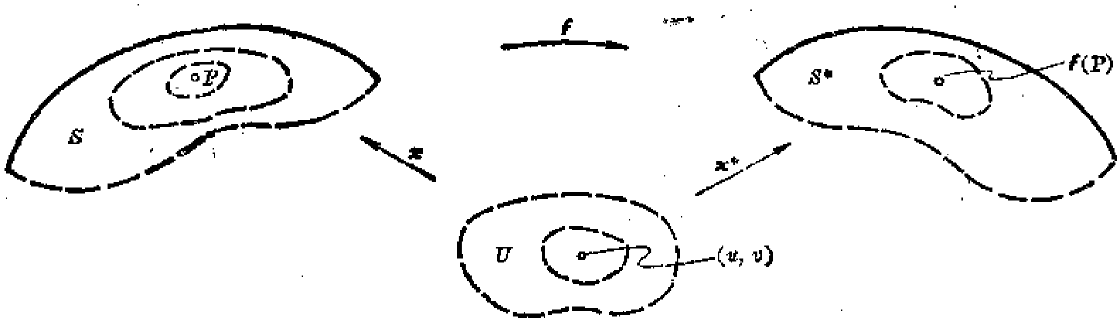


图 11-3

射，则，对 S 上每一点 P，存在 S 上包含 P 的坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，在其上，$\boldsymbol{f}$ 是到 S^* 的一一双连续映射.

最后，我们有

定理 11.2 若 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 的正则可微映射，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 是 S 上的 C^r 类正则曲线 C，则 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 是 S^* 上 C^r 类正则曲线.

上述定理的证明留给读者作练习.

注. 除非另有说明，所谓"曲面 S 到曲面 T 的 C^m 类映射"，我们指的是"S 到 T 的 C^m 类正则可微映射".

2. 等距映射，内蕴几何

曲面 S 到曲面 S^* 上的一一映射 $\boldsymbol{f}$ 称为*等距映射*或*等距*，若 S 上任意正则弧 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 的长等于它在 S^* 上的像 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 的长. 在问题 11.5 中我们将证明：若 $\boldsymbol{f}$ 是从 S 到 S^* 上的等距，则 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是从 S^* 到 S 的等距.

若存在从 S 到 S^* 上的等距，则 S 和 S^* 称为*等距的*. 从直观上看，平滑地和没有拉长地把一片纸卷成各种形状，这样得到的曲面显然都是等距的，如图 11.4 所示.

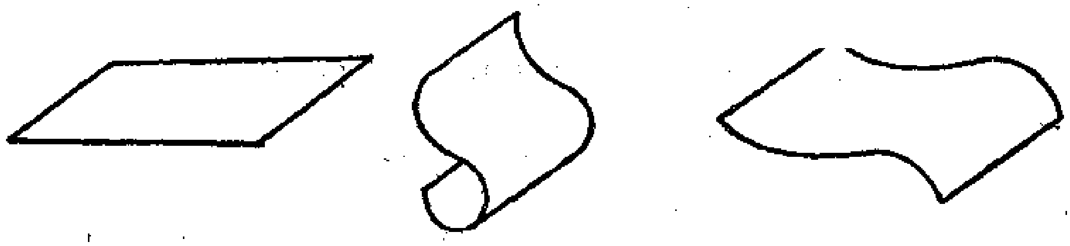


图 11-4

现假设 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 上的一一映射，使得 S 上每个坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 上的基本系数 E, F 和 G 等于它的像 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(u, v)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 的基本系数 E^*, F^* 和 G^*，则 $\boldsymbol{f}$ 是一个等距. 因为，假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, 是 S 上一任意弧 C，一般来说，C 不会只落在 S 上的一个坐标曲面片中. 但是，因为 C 是紧致的(紧致区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 的连续像)，它将由有限段端点接着端点的弧 C_i, $t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$, $i=0, \cdots, n-1$, 组成，使得每个 C_i 在同一曲面片 $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_i(u, v)$ 上. 我们知道，在一个坐标曲面片上，弧的长是第一基本形式的平方根的积分. 于是 C 的长 $L(C)$ 是

$$L(C)=\sum_i L(C_i)=\sum_i\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sqrt{E_i\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F_i\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G_i\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\right]$$

但是，对于所有 i，有 $E_i=E_i^*$, $F_i=F_i^*$ 和 $G_i=G_i^*$，其中 E_i^*, F_i^*, G_i^* 是 $\boldsymbol{x}_i^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(u, v))$ 的基本系数. 所以

$$\begin{aligned}L(C)&=\sum_i\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sqrt{E_i^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F_i^*\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G_i^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\right]\\&=\sum_i L(C_i^*)=L(C^*).\end{aligned}$$

于是，S 上任意弧 C 的长等于它在 S^* 上的像 C^* 的长，所以 $\boldsymbol{f}$ 是一个等距. 在问题 11.3 中，我们将证明它的逆命题成立. 这样就有

定理 11.3 S 到 S^* 的一一映射 $\boldsymbol{f}$ 是一个等距，当且仅当在 S 的每个坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=$

$x(u, v)$上第一基本系数

$$E=E^*,\ F=F^*,\ G=G^*,$$

其中E^*、F^*和G^*是x的像$x^*=f(x(u, v))$上的第一基本系数.

例 11.2 设S是旋转曲面

$$x^*=(\cos\theta\cosh v)e_1+(\sin\theta\cosh v)e_2+ve_3,\ 0<\theta<2\pi,\ -\infty<v<\infty.$$

S^*是正劈锥曲面

$$x=(u\cos\phi)e_1+(u\sin\phi)e_2+\phi e_3,\ 0<\phi<2\pi,\ -\infty<u<\infty.$$

设映射f把S上的点$x(\theta, v)$映到S^*上的点$x^*(\phi, u)$，其中$\phi=\theta$, $u=\sinh v$，即f是由x^{-1}到$\phi=\theta$, $u=\sinh v$，再到x^*的复合映射，如图11-5所示. 在带形$0<\theta<2\pi$, $-\infty<v<\infty$的任意一部分上，x是一坐标曲面片(双连续)，它在S^*的像

$$x^*=x^{**}(\theta, v)=f(x(\theta, v))=x^*(\theta, \sinh v)$$
$$=(\sinh v\cos\theta)e_1+(\sinh v\sin\theta)e_2+\theta e_3$$

是C^∞类的，且

$$x_\theta^{**}\times x_v^{**}=\cosh^2 v\neq 0.$$

于是，f是正则的和C^∞类的. f也是一一的和到上的，我们把它的证明留给读者作练习. 最后，容易计算

$$E=x_\theta\cdot x_\theta=\cosh^2 v=x_\theta^{**}\cdot x_\theta^{**}=E^{**},$$
$$F=x_\theta\cdot x_v=0=x_\theta^{**}\cdot x_v^{**}=F^{**},$$
$$G=x_v\cdot x_v=\cosh^2 v=x_v^{**}\cdot x_v^{**}=G^{**}.$$

于是由上述定理，f是S到S^*上的一个等距.

考虑例11.1(b)中把平面绕到圆柱面上的映射. 在直观上，我们看到平面上每一曲线的像是圆柱面上一等长的曲线. 但是这映射不是一一的，所以不是一个等距. 不过平面和圆柱面是局部等距的，也就是说，我们把S到S^*的局部等距映射定义为S到S^*的保持弧长但未必是一一的和到上的映射.

几何学的一个重要方面是研究曲面在给定的某一类——映射下保持不变的性质. 例如，曲面的拓扑性质是在一一双连续(拓扑)映射下保持不变的性质. 紧致性是曲面的拓扑

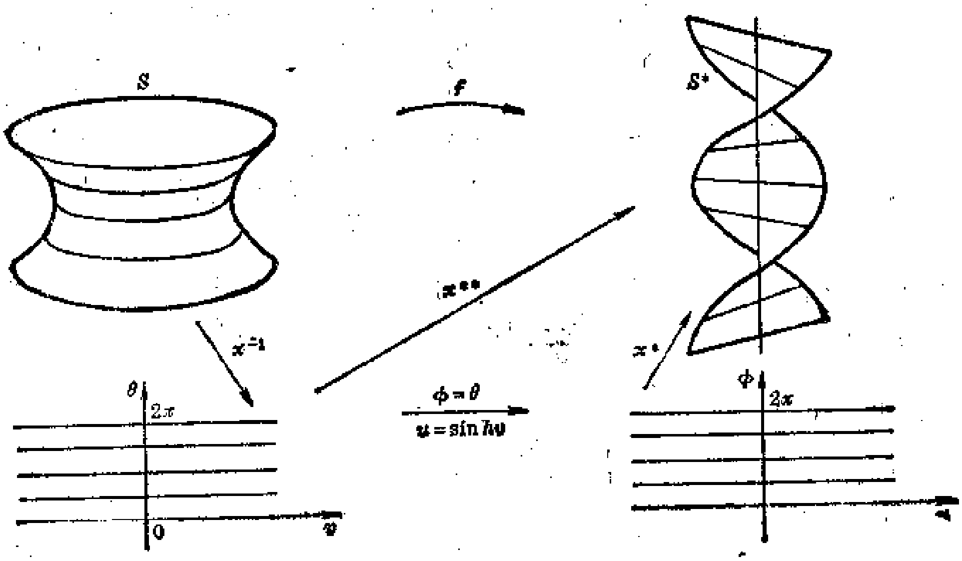


图 11-5

性质的一个例子．曲面在等距映射下保持不变的性质称为曲面的内蕴性质．曲面的全部内蕴性质称为曲面的内蕴几何．

由定理 11.3 曲面的一个性质是内蕴性质，当且仅当它仅仅依赖于第一基本形式．于是，可见 Gauss 曲率是曲面的内蕴性质．

设 P 和 Q 是曲面 S 上两点．从 P 到 Q 的*内蕴距离*，记为 $D(P, Q)$，定义为 S 上连接 P 和 Q 的所有可能的正则弧 C 的长 $L(C)$ 的下确界（最大下界）．显然，一曲面上两点间的内蕴距离总是存在的，因为实数集 $L(C)$ 是非空的（S 是连通且弧连通的），且下有界于 P 和 Q 之间的欧氏距离 $|P-Q|$．显然，曲面上两点间的距离是曲面的内蕴性质．在问题 11.6 中，我们将证明

定理 11.4 （i）$D(P, Q)=D(Q, P)$；

（ii）$D(P, R)\leqslant D(P, Q)+D(Q, R)$；

（iii）$D(P, Q)\geqslant 0$，$D(P, Q)=0$ 当且仅当 $P=Q$．

现给定 P 和 Q，若存在连接 P 和 Q 的正则弧 C，它的长等于 P 和 Q 之间的内蕴距离，则 C 称为 P 和 Q 之间的*极小长弧*．

由下确界定义可得，若 C 是 P 和 Q 之间的极小长弧，则它的长 $L(C)$ 满足：

（i）$L(C)\leqslant L(C')$，其中 C' 是任意别的连接 P 和 Q 的弧．（$L(C)=D(P, Q)$ 是一个下界）．

（ii）对于任意 $\varepsilon>0$，存在连接 P 和 Q 的正则弧 C'，使得 $L(C)+\varepsilon>L(C')$．（$L(C)=D(P, Q)$ 是最大的下界）．

显然，两点间的极小长弧也属于曲面的内蕴几何．

在平面中，$D(P, Q)$ 是欧氏距离，极小长弧总是存在唯一，并且就是 P 和 Q 之间的直线段．但是，一般地，如下面例 11.3(a) 所指出的，在一曲面上两个给定点之间未必存在一极小长弧，再如例 11.3(b) 所指出的，这样的弧如果存在的话也未必是唯一的．

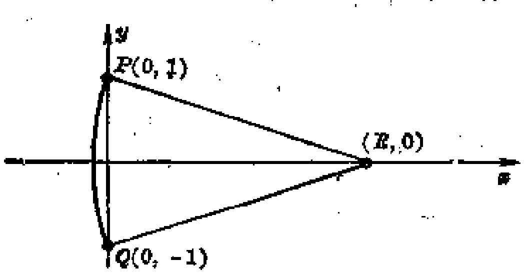


图 11-6

例 11.3 (a) 设 S 是去掉原点的 xy 平面，又设 $P=(0, 1)$，$Q=(0, -1)$，如图 11-6 所示．显然，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一连接 P 和 Q、其长小于 $2+\varepsilon$ 的弧，可以取一个中心在 $(R, 0)$，$R>0$ 的圆的间于 P 和 Q 的一段弧，只要 R 足够大的话．由于 P 和 Q 之间的任意弧的长必定大于或等于 2，于是 $D(P, Q)=2$．另一方面，在 S 中不存在其长等于 2 的连接 P 和 Q 的弧，因为必须避开原点．于是 S 上 P 和 Q 之间不存在一极小长弧．

(b) 设 S 是一个球面，直观上我们看到，每一条连接北极和南极的大圆弧是南北极之间的极小长弧．于是，在一曲面上两点之间可能有无限多条不同的极小长弧．

3. 测地曲率

假设 C 是曲面 S 上两点间一极小长弧．若 P 是 C 上一点，Q 是 C 上与 P 邻近一点，直观上，P 和 Q 之间那部分弧也是 P 和 Q 之间的极小长弧，而且 C 在 P 和 Q 之间的部分到 S 在 P 的切面的垂直投影 C^*，如图 11-7 所示，是 P 和 Q 在切面上的投影 Q^* 之间在切

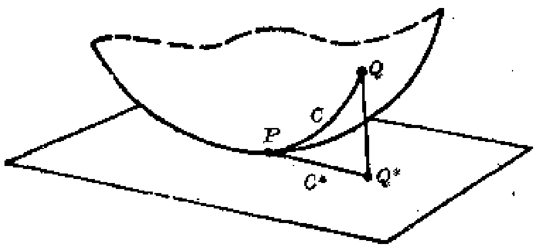


图 11-7

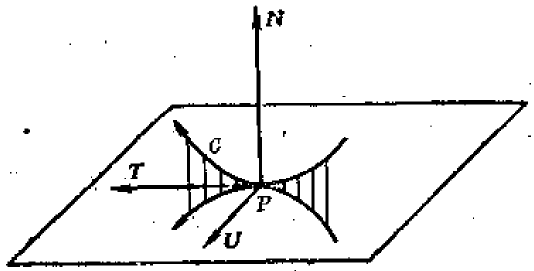


图 11-8

面上的极小长弧. 但是另一方面, C^* 又必须是直线或等价地说, 是零曲率曲线, 于是我们把在切面上的垂直投影的曲率向量是零的那些曲线作为极小长弧的候选者.

曲线 C 到其上一点 P 的切面上的投影在 P 的曲率向量称为 C 在 P 的**测地曲率向量**, 并记为 $\boldsymbol{k}_g$. 为计算 $\boldsymbol{k}_g$, 假设 S 是类 $\geqslant 2$ 的曲面, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是包含 P 的坐标曲面片, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(u(s), v(s))$ 是 C 的 C^2 类自然表示. 令 $\boldsymbol{T}$ 表示 C 在 P 的单位切向量, 在 P 的切平面上取一单位向量 $\boldsymbol{U}$, 使得 $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{N})$ 构成右手标准正交组, 如图 11-8 所示. 不失一般性, 可以假定 P 是原点, 则 C 在过 P 的切面的投影是 $\boldsymbol{x}^*=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}$. 求微商,

$$d\boldsymbol{x}^*/ds=(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}+(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U},$$

$$d^2\boldsymbol{x}^*/ds^2=(\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}+(\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U},$$

$$\boldsymbol{t}^*=\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|,$$

$$\boldsymbol{k}^*=\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds^*}=\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|$$

$$=\frac{\left(\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right)\dfrac{d^2\boldsymbol{x}^*}{ds^2}-\left(\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\cdot\dfrac{d^2\boldsymbol{x}^*}{ds^2}\right)\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|^4}.$$

在 P, $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{T}$, 于是

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T},\quad \left|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right|=1,$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}^*}{ds^2}=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}.$$

故此有

$$\boldsymbol{k}^*=\boldsymbol{k}_g=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}.$$

但 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 正交, 所以有公式

$$\boldsymbol{k}_g=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}. \tag{11.1}$$

作为(11.1)的一个推论, 我们看到事实上 $\boldsymbol{k}_g$ 是 C 在 P 的曲率向量 $\boldsymbol{k}$ 到切面上的垂直投影. 因为 $\boldsymbol{k}$ 垂直于 $\boldsymbol{T}$, 它到切面的垂直投影就是它到 $\boldsymbol{U}$ 上的投影 $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}$. 于是我们有

定理 11.5 曲线在 P 的测地曲率向量 $\boldsymbol{k}_g$ 是 C 在 P 的曲率向量 $\boldsymbol{k}$ 到在 P 的切面的向量投影.

由方程(11.1)和 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{T}=0$, 我们可记

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_g+\boldsymbol{k}_n=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N}, \tag{11.2}$$

其中 $\boldsymbol{k}_n=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N}$ 是 C 在 P 的法曲率向量. 因为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}_n$ 不依赖于曲面 S 和曲线 C 的

定向，所以 $\boldsymbol{k}_g$ 也是如此。

由 $\boldsymbol{k}_g=\varkappa_g\boldsymbol{U}$ 确定的纯量函数 $\varkappa_g$ 称为 C 在 P 的测地曲率。由方程(11.2)可得 $\varkappa_g=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}$，并且因为所选取的 $\boldsymbol{U}$ 使得 $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{N})$，即 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{N})$ 成右手正交组，我们有 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{t}$，所以 $\varkappa_g=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{t})$。于是有公式

$$\varkappa_g=(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{N}) \quad \text{或} \quad \varkappa_g=(\dot{\boldsymbol{x}},\ \ddot{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{N}). \tag{11.3}$$

注意，$\varkappa_g$ 依赖于 S 的定向（$\boldsymbol{N}$ 的指向）和 C 的定向（$\boldsymbol{t}$ 的指向）。

与 $\varkappa_n$ 同时依赖于第一和第二基本系数相反，测地曲率 $\varkappa_g$ 仅仅依赖于第一基本系数（以及它们的导数），因此是曲面的内蕴性质。这可以利用 E、F 和 G 直接求出 $\varkappa_g$ 得到证明。在问题 11.30 中我们将证明

$$\begin{aligned}\varkappa_g=\Big[&\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^3+(2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds}+(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\\&-\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^3+\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\Big]\sqrt{EG-F^2}.\end{aligned} \tag{11.4}$$

所以有

定理 11.6 曲面上沿一曲线 C 的测地曲率是曲面的内蕴性质。

注意，沿 u 参数曲线 $v=$常数，$dv/ds=0$ 和 $du/ds=1/\sqrt{E}$。沿 v 参数曲线 $u=$常数，$du/ds=0$ 和 $dv/ds=1/\sqrt{G}$。于是对于参数曲线的测地曲率，方程(11.4)变成

$$\begin{aligned}(\varkappa_g)_{v=\text{常数}}&=\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^3\sqrt{EG-F^2}=\Gamma_{11}^2\,\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}},\\(\varkappa_g)_{u=\text{常数}}&=-\Gamma_{22}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^3\sqrt{EG-F^2}=-\Gamma_{22}^1\,\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}.\end{aligned} \tag{11.5}$$

若参数曲线是正交的，则

$$F=0,\ \Gamma_{11}^2=-\frac{1}{2}E_v/G \quad \text{和} \quad \Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2}G_u/E.$$

于是

$$(\varkappa_g)_{v=\text{常数}}=-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}},\quad (\varkappa_g)_{u=\text{常数}}=\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}. \tag{11.6}$$

例 11.4 考虑抛物面

$$\boldsymbol{x}=(r\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(r\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+r^2\boldsymbol{e}_3,\ 0<r<\infty,\ -\infty<\theta<\infty.$$

我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_r&=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+2r\boldsymbol{e}_3,\\\boldsymbol{x}_\theta&=(-r\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(r\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\\E&=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_r=1+4r^2,\ F=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_\theta=0,\\G&=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=r^2,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{x}_r\times\boldsymbol{x}_\theta}{|\boldsymbol{x}_r\times\boldsymbol{x}_\theta|}=(1+4r^2)^{-1/2}[-2r(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-2r(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3].$$

θ 参数曲线 $r=r_0$ 是

$$\boldsymbol{x}=(r_0\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(r_0\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+r_0^2\boldsymbol{e}_3.$$

沿这曲线

$$\boldsymbol{x}'=(-r_0\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(r_0\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\ |\boldsymbol{x}'|=r_0.$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{t}=\boldsymbol{x}'/|\boldsymbol{x}'|=(-\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta)\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{t}'=(-\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2,\\&\boldsymbol{k}=\boldsymbol{t}'/|\boldsymbol{x}'|=r_0^{-1}[(-\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2],\\&\boldsymbol{N}=(1+4r_0^2)^{-1/2}[-2r_0(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-2r_0(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3],\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{t}=(1+4r_0^2)^{-1/2}[(-\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-2r_0\boldsymbol{e}_3],$$
$$\boldsymbol{k}_g=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}=r_0^{-1}(1+4r_0^2)^{-1}[(-\cos\theta)\boldsymbol{e}_1-(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2-2r_0\boldsymbol{e}_3],$$
$$\varkappa_g=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}=(1/r_0)(1+4r_0^2)^{-1/2}.$$

正如我们所期望的那样，$\varkappa_g$ 是不依赖于 θ 的．注意，上式与公式(11.6)是一致的．

$$(\varkappa_g)_{r=r_0}=\frac{G_r}{2G\sqrt{E}}\bigg|_{r=r_0}=\frac{2r}{2r^2\sqrt{1+4r^2}}\bigg|_{r=r_0}=(1/r_0)(1+4r_0^2)^{-1/2}.$$

4. 测地线

上一节我们把在其上测地曲率向量为零的曲线取作极小长弧的候选者．这里我们称满足 $\boldsymbol{k}_g=0$ 的曲线 C 为**测地线**．沿一直线有 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，于是有 $\boldsymbol{k}_g=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}=0$．若 C 不是直线，则由 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_g+\boldsymbol{k}_n$，得出 $\boldsymbol{k}_g=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_n=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N}$，或当且仅当密切面(它平行于 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{t}$)包含 S 的法线，于是有

定理 11.7 曲面上所有直线是测地线，一曲线是非直线的测地线当且仅当它在每一点的密切面垂直于曲面在该点的切面．

注意，渐近曲线是直线或其密切面与曲面的切面重合的曲线，而测地线是直线或其密切面与曲面的切面垂直的曲线．满足 $\boldsymbol{k}_n=\boldsymbol{0}$ 的曲线是渐近曲线，满足 $\boldsymbol{k}_g=\boldsymbol{0}$ 的曲线是测地线．

在问题 11.14 中，我们将证明

定理 11.8 C^2 类坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 上的 C^2 类曲线的自然表示

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(u(s),v(s))$$

是测地线，当且仅当 $u(s)$ 和 $v(s)$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{ds^2}+\Gamma_{11}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma_{12}^1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,\\&\frac{d^2v}{ds^2}+\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma_{12}^2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0.\end{aligned}\tag{11.7}$$

于是，我们把曲线 $\boldsymbol{x}(u(s),v(s))$ 作为通过任意一点 $\boldsymbol{x}(u_0,v_0)$ 沿任意方向 $(dv/ds)_0:(dv/ds)_0$ 的测地线的一个候选者，其中 $u(s)$，$v(s)$ 是方程(11.7)的满足初始条件

$$u(0)=u_0,\ v(0)=v_0,\ \frac{du}{ds}(0)=\left(\frac{du}{ds}\right)_0,\ \frac{dv}{ds}(0)=\left(\frac{dv}{ds}\right)_0$$

的解．若在方程(11.7)中，Γ_{ij}^k 是 C^1 类的，根据微分方程理论，在 $s=0$ 的一邻域内，确实存在满足给定初始条件的唯一解 $u(s)$，$v(s)$．但是，一般地来说，s 将不表示沿 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(s),v(s))$ 的弧长，所以不能从上述定理直接得出 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(s),v(s))$ 是测地线．在问题 11.15 中，我们将证明，若选取 $(du/ds)_0:(dv/ds)_0$ 使得

$$\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right|^2=E\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2+2F\left(\frac{du}{ds}\right)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0+G\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2=1,$$

则对于所有 s，有 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right|^2=1$，即 s 等于弧长，于是由上述定理 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(s),v(s))$ 是过 $\boldsymbol{x}(u_0,v_0)$ 沿给定方向 $(du/ds)_0:(dv/ds)_0$ 的唯一的测地线．

显然，只要对任意方向 $du_0:dv_0$，令 $(du/ds)_0=du_0/\lambda$ 和 $(du/ds)_0=dv_0/\lambda$，就可以求出满足上述方程的方向数 $(du/ds)_0:(dv/ds)_0$，这里 $\lambda=E_0du_0^2+2F_0du_0dv_0+G_0dv_0^2$．最后，若

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是$C^3$类的，则$\Gamma_{ij}^k$是$C^1$类的．于是有

定理 11.9 在类$\geqslant 3$的曲面上一点P的一邻域内，沿任意给定方向存在唯一一条测地线，并且它是C^3类的．

例 11.5 (a) 平面．在一平面上，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_g$．所以一曲线是测地线当且仅当它是直线，过每一点沿每一方向显然有一测地线通过．

(b) 球面．因为沿测地线的密切面平行$\boldsymbol{N}$，所以它们必定全部通过球心，但是由问题4.20，密切面过定点的曲线落在一平面上，于是球面上的测地线是大圆，反之大圆必是测地线．显然过任意一点沿每一方向有一测地线通过．

(c) 一般柱面．假设柱面的母线是沿一固定的单位向量$\boldsymbol{g}$的方向，曲线C是测地线当且仅当$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_n=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N}$，而在柱面上有$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{g}=0$，因此$C$是测地线当且仅当$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g}=0$或$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{g}=0$，或积分得$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{g}=$常数．由此可见，柱面上的测地线是一般螺线，其中包括母线本身，这时$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{g}=\pm 1$，和柱面的横截线，这时$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{g}=0$．

最后，假设$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是曲面上一坐标曲面片，它使得$u$参数曲线和$v$参数曲线正交，且第一基本系数仅依赖于一个参数，这时测地线总可用求积的方法得出，即在问题 11.17 中要证明的

定理 11.10 设$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是类$\geqslant 2$的曲面上一坐标曲面片，它使得$E=E(u)$，$F=0$，$G=G(u)$，则

(i) $u=$常数的v参数曲线是测地线；

(ii) $v=v_0$的u参数曲线是测地线当且仅当$G_u(u_0)=0$；

(iii) 形为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v(u))$的曲线是测地线当且仅当

$$v=\pm\int\frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}du \quad (C=\text{常数}).$$

5. 测地坐标

若在曲面上能引进有某些特殊性质的参数曲线作为坐标曲线那常常是有某种方便的．参数曲线是正交的且其中一族参数曲线是测地线的坐标曲面片称为*测地坐标系*．

在一曲面上可用无穷多种方法引进测地坐标．设$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(v)$，$a\leqslant v\leqslant b$，是类$\geqslant 3$的曲面上一任意$C^2$类弧$C_0$，由定理 11.9，过$C_0$的每一点$\boldsymbol{x}(v_0)$有唯一的一条垂直于$C_0$的测地线$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v_0)$通过，且在其上$u$等于弧长，$\boldsymbol{x}(0, v_0)=\boldsymbol{x}(v_0)$．见图 11-9．

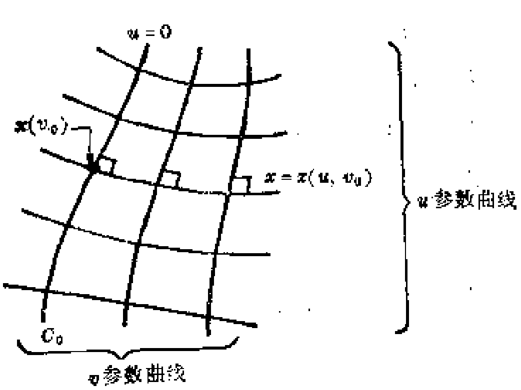


图 11-9

在问题 11.20 中，我们将证明，对于足够小的ε，函数$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，$-\varepsilon<u<\varepsilon$，$a<v<b$，是$C^2$类正则参数表示．

剩下只要证明u参数曲线与v参数曲线正交．考虑导数

$$F_u=(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v)_u=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{x}_v+\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_{uv}. \quad (11.8)$$

因为u是弧长，$E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=1$，所以$E_v=2\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{x}_u=0$，并且$\boldsymbol{x}_u$是$u$参数曲线上的单位切向量和$\boldsymbol{x}_{uu}$是$u$参数曲线的曲率向量．但在测地线上，曲率向量是沿曲面的法线方向的，于是

还有 $\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{x}_v=0$. 所以从方程(11.8), 可得 $F_u=0$, 因而沿 $v=$常数的测地线的所有点有 $F=$常数. 但是 $v=$常数的测地线与 C_0 正交, 即对于 $u=0$ 和每个 v 有 $F=0$. 所以 $F=0$, 因此 u 参数曲线与 v 参数曲线正交, 故 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是测地坐标系. 于是我们有

定理 11.11 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(v)$, $a\leqslant v\leqslant b$, 是类 $\geqslant 3$ 的曲面 S 上的任意一 C^3 类弧. 则 S 上存在 C^2 类测地坐标系 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$, $-\varepsilon<u<\varepsilon$, $a<v<b$, 使得 $\boldsymbol{x}(0, v)=\boldsymbol{x}(v)$, 并且 u 参数曲线是测地线的自然表示.

注意, 在上述结构中, 所有测地线在任意两正交轨线之间的距离是相等的, 这是因为每一测地线中参数是自然参数. 对于任意测地坐标系情况都是如此. 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是测地坐标系, 其中 u 参数曲线是测地线. 因为 u 参数曲线和 v 参数曲线正交, 方程(11.6)适用, 且 $(\kappa_g)_{v=\text{常数}}=-E_v/2E\sqrt{G}=0$. 所以 $E_v=0$ 或 $E=E(u)$. 而且 $F=0$. 于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 的第一基本形式是

$$I=E(u)du^2+G(u, v)dv^2.$$

现在沿测地线 $v=$常数, 有 $dv=0$, 所以测地线在正交轨线 $u=u_1$ 和 $u=u_2$ 之间的弧长是

$$S=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{I}=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{E(u)}du.$$

它不依赖于 v, 故不依赖于测地线.

由上述讨论可知, 弧长总是可以用下面的参数变换引进为测地坐标系的测地线的参数.

$$u^*=\int_{u_0}^{u}\sqrt{E(t)}\,dt,\quad v=v.$$

若这样做后, 即若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是测地坐标系, 其中 u 是测地线的自然参数, 则 $E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=1$, 且第一基本形式是

$$I=du^2+G(u, v)dv^2. \tag{11.9}$$

最后, 从问题 10.35 给出的 $F=0$ 时的 Gauss 曲率公式

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]. \tag{11.10}$$

我们立刻得出

定理 11.12 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$是类 $\geqslant 3$ 的曲面上一测地坐标系, 其中 u 参数曲线是测地线, 且 u 是自然参数, 则

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} \tag{11.11}$$

例 11.6

$$\boldsymbol{x}=(r\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(r\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+r^2\boldsymbol{e}_3,\ 1<r<3,\ -\infty<\theta<\infty,$$

是抛物面 $x_3=x_1^2+x_2^2$ 上一测地坐标系. 容易验证 $E=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_r=1+4r^2$, $F=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_\theta=0$, $G=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=r^2$. 于是参数曲线是正交的, 并因为从方程(11.6)有 $(\kappa_g)_{\theta=\text{常数}}=-E_\theta/2E\sqrt{G}=0$, r 参数曲线 $\theta=$常数是测地线. 若我们引进参数 $r^*=\int_2^r\sqrt{E}d\rho=\int_2^r\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho$ 代替 r, 坐标曲面片 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(\theta, r^*)=\boldsymbol{x}(\theta, r(r^*))$将是以 r^* 为自然参数的测地坐标系. 于是

$$E^*=\boldsymbol{x}_{r^*}^*\cdot\boldsymbol{x}_{r^*}^*=(\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_r)(dr/dr^*)^2=(\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_r)/(dr^*/dr)^2=1,$$

$$F^*=\boldsymbol{x}_{r^*}^*\cdot\boldsymbol{x}_\theta^*=(\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_\theta)(dr/dr^*)=0,$$

$$G^*=\boldsymbol{x}_\theta^*\cdot\boldsymbol{x}_\theta^*=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=r^2,$$

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G^*}}\frac{\partial^2\sqrt{G^*}}{\partial r^{*2}}=-\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dr^{*2}}=4/(1+4r^2),$$

其中 $r=r(r^*)$.

6. 测地极坐标

设 P 是类 $\geqslant 3$ 的曲面上一点, $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 是曲面在 P 的任意两正交切向量, 如图 11-10 所示. 由定理 11.9, 对于每个实数 θ_0, 过 P 沿切向量 $(\cos\theta_0)\boldsymbol{g}_1+(\sin\theta_0)\boldsymbol{g}_2$ 的方向, 存在唯一的有自然表示的测地线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\ \theta_0)$. 在问题 11.21 中, 我们将证明存在 $\varepsilon>0$, 使得对于 $0<r<\varepsilon$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\ \theta)$ 是 C^2 类正则参数表示, 因此是一测地坐标系, 称为在 P 的测地极坐标系. 我们还将证明, 对于 $0<r<\varepsilon$, $0\leqslant\theta<2\pi$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\ \theta)$ 是到 P 的一去心邻域上的一一映射. 于是过 P 的邻域中每一点有唯一的测地线与 P 相连. θ 参数曲线 $r=$ 常数称为测地圆, 对应的 r 值称为测地圆的半径.

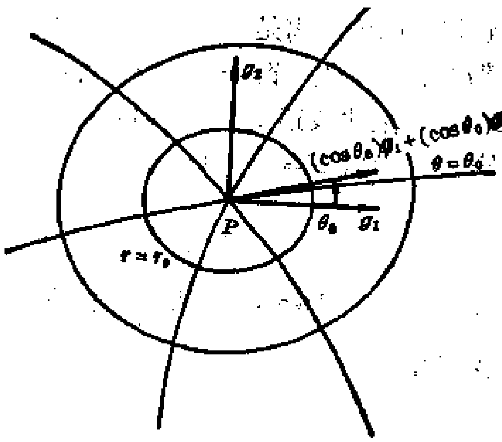


图 11-10

和一般的测地坐标的情形一样, 对于测地极坐标系 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\ \theta)$, $r>0$, 第一基本形式为

$$I=dr^2+G(r,\ \theta)d\theta^2. \tag{11.12}$$

测地极坐标系的一个简单例子是在 x_1x_2 平面的原点的极坐标系,

$$\boldsymbol{x}=r\cos\theta\boldsymbol{e}_1+r\sin\theta\boldsymbol{e}_2,\ r>0,\ -\infty<\theta<\infty.$$

显然 $\quad E=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_r=1,\ F=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_\theta=0$ 和 $G=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=r^2$,

因此 $I=dr^2+r^2d\theta^2$. 在问题 11.23 中, 我们将证明, 当 r 很小时, 在一般情形中的 $G(r,\ \theta)$ 的作用很象平面中的极坐标, 特别地, 我们将证明

定理 11.18 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\ \theta)$ 是在一足够高类的曲面上一点 P 的测地极坐标系, 则

$$\sqrt{G(r,\ \theta)}=r-\frac{1}{6}K(P)r^3+R(r,\ \theta), \tag{11.13}$$

其中 $$\lim\left(R(r,\ \theta)/r^3\right)=0,$$

$K(P)$ 是在 P 的高斯曲率.

例 11.7 参数表示

$$\boldsymbol{x}=[a\cos\theta\sin(r/a)]\boldsymbol{e}_1+[a\sin\theta\sin(r/a)]\boldsymbol{e}_2+[a\cos(r/a)]\boldsymbol{e}_3,$$

$$a>0,\ 0<r<\pi/2a,\ -\infty<\theta<\infty$$

是半径为 a 中心在原点的球面上的北极的测地极坐标系, 如图 11-11 所示. r 参数曲线 $\theta=\theta_0$ 是绕过北极的大圆, θ 参数曲线 $r=r_0$ 是极点附近的纬线. 容易计算出 $E=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_r=1$, $F=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_\theta=0$, $G=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=a^2\sin^2(r/a)$, 故有

$$I=dr^2+a^2\sin^2(r/a)d\theta^2.$$

因为 $$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

$$\sqrt{G}=a\sin(r/a)=r-r^3/6a^2+o(r^3),$$

这与方程(11.13)一致.

作为定理 11.13 的一个推论, 我们得出 Gauss 曲率的一些很有趣的和重要的解释. 因为沿测地圆 $r=$常数, 我们有 $dr=0$. 于是它的周长为积分

$$C(r)=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(r,\theta)}\,d\theta$$

$$=2\pi r-\frac{1}{3}K(P)\pi r^3+o(r^3). \qquad (11.14)$$

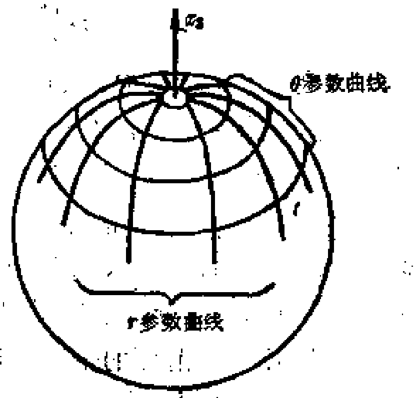


图 11-11

所以 $$K(P)=\frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r-C(r)}{r^3}\right)+o(1),$$

或者, 因为 $K(P)$不依赖于 r,

$$K(P)=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r-C(r)}{r^3}\right). \qquad (11.15)$$

于是我们看到高斯曲率可以用曲面的内蕴性质表示.

最后, 回忆曲面面积的公式 $\iint_R\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, 我们得到测地圆包围的曲面面积是

$$A(r)=\int_0^r\int_0^{2\pi}\sqrt{G}\,d\theta\,dr=\pi r^2-(\pi/12)K(P)r^4+o(r^4).$$

于是

$$K(P)=\lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\left(\frac{\pi r^2-A(r)}{r^4}\right). \qquad (11.16)$$

我们得到

定理 11.14 在类 $\geqslant 3$ 的曲面上一点 P 的 Gauss 曲率是

$$K(P)=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r-C(r)}{r^3}\right) \text{ 或 } K(P)=\lim\frac{12}{\pi}\left(\frac{\pi r^2-A(r)}{r^4}\right),$$

其中 r, $C(r)$, $A(r)$分别是以 P 为心的测地圆的半径、周长和所围曲面的面积.

7. 极小长弧

设 P 和 Q 是曲面上足够接近的两点, 在 P 存在一包含 Q 的测地极坐标系 $x=x(r,\theta)$, 如图 11-12 所示. 我们将证明含 Q 的测地线 $\theta=$常数是 P 和 Q 之间唯一的极小长弧.

假设 Q 在测地圆 $r=r_0$ 和测地线 $\theta=\theta_0$ 上, 且 $x=x(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, 是 S 上连接 P 和 Q 的弧 C. 现在我们假设 C 包含在 $x=x(r,\theta)$中, 于是 C 的长 $L(C)$是

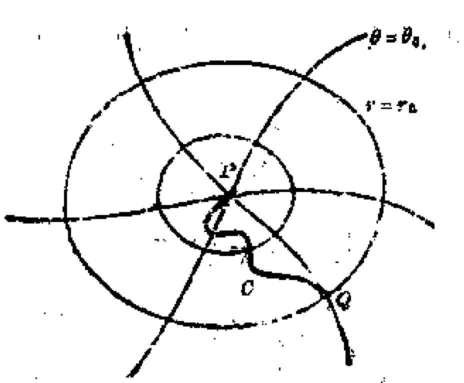


图 11-12

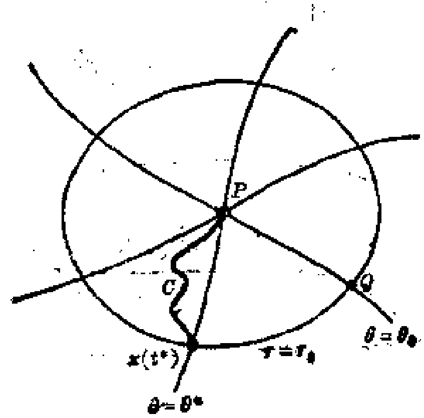


图 11-13

$$L(C)=\int_a^b\sqrt{(dr/dt)^2+G(r,\theta)(d\theta/dt)^2}\,dt.$$

因为 $G>0$, $$L(C)\geqslant\int_a^b\sqrt{(dr/dt)^2}\,dt\geqslant\int_a^b(dr/dt)\,dt=\int_0^{r_0}dr=r_0.$$

r_0 是测地线 $\theta=\theta_0$ 在 P 和 Q 之间的长，上式中的等号当且仅当 $d\theta/dt=0$ 或 $\theta=$常数时成立．故此测地线 $\theta=\theta_0$ 是 $x=x(r,\theta)$ 中连接 P 和 Q 的所有弧中唯一的极小长弧．事实上我们还可以证明这是 S 上在 P 和 Q 之间的所有正则弧中最短的一条．为此设 $x=x(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, 是从 P 到 Q 的弧 C, 它跑出了 $x=x(r,\theta)$, 如图 11-13 所示．可以证明在某点 $x=x(t^*)$, $t^*<t$, C 与测地圆 $r=r_0$ 相交，设交点坐标为 (r_0,θ^*)，并设 C 在区间 $a\leqslant t\leqslant t^*$ 的部分包含在 $x=x(r,\theta)$ 中，记为 C^*．于是 C^* 是 $x=x(r,\theta)$ 中含 P 和对应于 (r_0,θ^*) 的点 P^* 的正则弧．把前面的论证应用到 P 和 P^* 就有 $L(C^*)\geqslant r_0$，但是 $L(C)>L(C^*)$，所以 $L(C)>r_0$，而 r_0 是连接 P 和 Q 的测地线 $\theta=\theta_0$ 的长，于是有

定理 11.15 设 P 和 Q 是曲面上的点．若在 P 存在一包含 Q 的测地极坐标系，则存在由连接 P 和 Q 的测地线给出的这两点之间的唯一的极小长弧．

我们现在利用上述定理来证明：若 C 是 C^3 类曲面 S 上任意两点 P_1 和 P_2 之间的极小长弧，则 C 是测地线．假设 C 为 $x=x(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, P 是 C 上异于 P_1 和 P_2 的任意点．因为 S 是 C^3 类的，在 P 存在一测地极坐标系．现设 $\varepsilon>0$ 取得足够小，使得点 P_ε 和 $P_{-\varepsilon}$，它们分别对应于 $t+\varepsilon$ 和 $t-\varepsilon$，落在 $x=x(r,\theta)$ 中，如图 11-14 所示．令 C_ε 表示 C 在 P 和 P_ε 之间的部分．我们要证明 C 是 P 和 P_ε 之间的极小长弧．假设不然，即假设 Γ_ε 是 P 和 P_ε 之间的正则弧使得 $L(\Gamma_\varepsilon)$ 严格小于 $L(C_\varepsilon)$．具体地说，设 $L(\Gamma_\varepsilon)+\delta=L(C_\varepsilon)$．现在考虑在 C 上用 Γ_ε 替换 C_ε 而得到的弧 Γ，注意它在 P 和 P_ε 可能不是正则的，但是可以证明能够把这样一条弧变成在 P 和 P_ε 是比较圆滑的弧 C^*，而它的长与 Γ 的长至多相差 $\delta/2$．因为 $L(\Gamma)+\delta=L(C)$，所以 C^* 是 P_1 与 P_2 间一正则弧，其使得

$$L(C^*)+\delta/2\leqslant L(C)\quad\text{或}\quad L(C^*)<L(C).$$

但这是不可能的，因为 C 是 P_1 和 P_2 之间的正则极小长弧．故此 C_ε 是 P 和 P_ε 之间的极小长弧．同理，C 在 $P_{-\varepsilon}$ 和 P 之间的部分 $C_{-\varepsilon}$ 是 $P_{-\varepsilon}$ 和 P 之间的极小长弧．

但是作为定理 11.15 的一个结果，$C_{-\varepsilon}$ 和 C_ε 是测地线，并且分别落在 $\theta=\theta_{-\varepsilon}$ 和 $\theta=\theta_\varepsilon$ 的测地线上，其中 $C_{-\varepsilon}$ 是从 P 到 $P_{-\varepsilon}$, C_ε 从 P 到 P_ε，如图 11-15 所示．又因为 C 在 P 正则，于是 $\theta_{-\varepsilon}=\theta_\varepsilon+\pi$，即在 P 附近，C 是过 P 沿 θ 方向的唯一的测地线．因为 P 是 C 上任意一点，于是定理得证．所以有

定理 11.16 若 C 是类 $\geqslant3$ 的曲面上两点之间的极小长弧，则 C 是测地线．

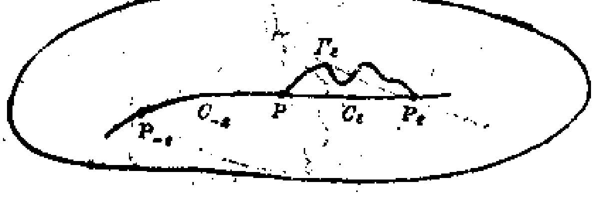


图 11-14

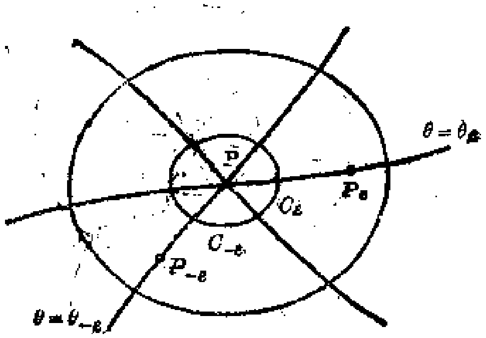


图 11-15

8. 常高斯曲率曲面

我们知道 Gauss 曲率 K 在等距映射下不变，于是在两个等距曲面的对应点的 Gauss 曲率是相同的，这命题的逆命题一般来说是不正确的，如问题 11.28 将证明的那样。但是如果两个曲面有同样的常 Gauss 曲率，我们将证明这两个曲面的任意两个足够小的邻域是等距的。为此假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\ \theta)$ 是有常 Gauss 曲率 K 的曲面上一点的测地极坐标系，由方程(11.11)和(11.13)得出 $\sqrt{G}=\sqrt{\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta}$ 满足常系数二阶线性微分方程

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sqrt{G}+K\sqrt{G}=0, \tag{11.17}$$

初始条件为

$$\lim_{r\to0}\sqrt{G}=0,\quad \lim_{r\to0}(\partial\sqrt{G}/\partial r)=1. \tag{11.18}$$

若 $K=0$，方程(11.17)的通解是 $\sqrt{G}=rC_1(\theta)+C_2(\theta)$。应用初始条件(11.18)得 $C_1=1$ 和 $C_2=0$，故 $G=r^2$。于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\ \theta)$ 的第一基本系数必定是 $E=1$，$F=0$ 和 $G=r^2$。若 $K>0$，则(11.17)的通解是

$$\sqrt{G}=C_1(\theta)\sin(r\sqrt{K})+C_2(\theta)\cos(r\sqrt{K}),$$

这里初始条件(11.18)意味着 $C_1=1/\sqrt{K}$ 和 $C_2=0$。于是在这种情形中，第一基本系数必定是 $E=1$，$F=0$ 和 $G=(1/K)\sin^2(r\sqrt{K})$。最后若 $K<0$，则(11.17)的通解是

$$\sqrt{G}=C_1(\theta)\sinh(r\sqrt{-K})+C_2(\theta)\cosh(r\sqrt{-K}).$$

应用初始条件得 $C_1=1/\sqrt{-K}$ 和 $C_2=0$。于是在这种情形中

$$E=1,\quad F=0\quad 和\quad G=(1/\sqrt{-K})\sinh r\sqrt{-K}.$$

我们看到在有常 Gauss 曲率 K 的曲面上的任意点 P，测地极坐标系的第一基本系数是唯一确定的且仅依赖于 K。但是另方面显然若 P^* 是任意有同样常 Gauss 曲率 K 的别的曲面上的任意一点，$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(r,\ \theta)$ 是在 P^* 的测地极坐标系，则由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(r,\ \theta))=\boldsymbol{x}^*(r,\ \theta)$ 给定的映射 $\boldsymbol{f}$ 是从 P 的一个邻域到 P^* 的一个邻域上的等距映射。于是得到

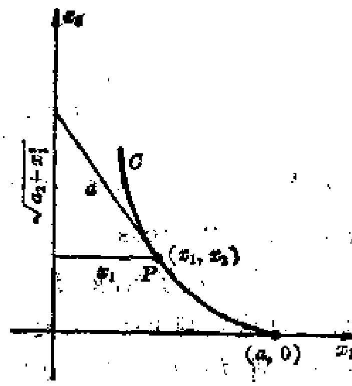


图 11-16

定理 11.17(Minding) 有同样常 Gauss 曲率的类 $\geqslant 3$ 的曲面的任意两个足够小的邻域是等距的。

球面是正常 Gauss 曲率曲面的例子。在例 **11.8** 中我们将构造一个称为伪球面的负常曲率曲面。

例 11.8 设 C 是 x_1x_3 平面中的曲线，其起点在 $x_1=a$，$x_3=0$，$a>0$，有如下性质：曲线在任意一点 P 的切线在切点 P 与 x_3 轴之间的线段的长为 a，如图 11-16 所示。C 称为曳物线，它是下述微分方程的解，

$$dx_3/dx_1=-\sqrt{a^2-x_1^2}/x_1,\quad x_3(a)=0.$$

伪半径为 a 的伪球面是由 C 绕 x_3 轴旋转生成的曲面。因此伪球面可以表示为

$$\boldsymbol{x}=(r\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(r\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+f(r)\boldsymbol{e}_3,\ 0<r<a,\ -\infty<\theta<\infty,$$

其中 $f'(r)=-\sqrt{a^2-r^2}/r$。这里有 $E=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_r=1+(f')^2=a^2/r^2$，$F=\boldsymbol{x}_r\cdot\boldsymbol{x}_\theta=0$ 和 $G=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=r^2$，所以从方程(11.10)得出 $K=-1/a^2$。故伪半径为 a 的伪球面有等于 $-1/a^2$ 的常 Gauss 曲率。

我们知道在一个测地坐标系上，对应于 $\theta=0$ 的方向的选择是完全任意的。于是由定理 11.17，常 Gauss 曲率曲面上两个不同点的邻域可以彼此等距地映射到对方上，使得其中一点的任意给定方向对应于在另一点的选定的方向。直观上，这意味着一个常 Gauss 曲率曲面的几何图形可以自由地移动和旋转而不改变曲线的长。因此正常和负常曲率曲面分别成了椭圆和双曲线几何的模型。这些模型把相应曲面的测地线当作那种几何的"直线"、平面 $(K=0)$，椭圆 $(K>0)$ 和双曲 $(K<0)$ 几何的主要区别在于"平行"公理。在欧氏几何中这公理指出过给定直线外任意一点存在唯一一条平行(不相交)线。在椭圆(球面)几何中不能作出平行线，因为任意两条"直线"(大圆)总是相交的。在双曲几何中存在无限多条"直线"平行于给定"直线"，如下例所示。

例 11.9 双曲平面

我们把 x_1x_2 平面中半径为 2 的圆的内部看作二维坐标流形。关于在原点的极坐标系，我们定义度量张量

$$g_{11}=E=1/(1-r^2/4)^2,\quad g_{12}=g_{21}=F=0,$$
$$g_{22}=G=r^2/(1-r^2/4)^2.$$

由方程(11.10)易计算得 $K=-1$。这个常 Gauss 曲率为 $K=-1$ 的"曲面"称为双曲平面。参照定理 11.10 可知测地线是 r 参数曲线，即过原点的欧氏直线，和曲线

$$\theta=\pm\int\frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}=\pm\int\frac{C(1-r^2/4)dr}{r\sqrt{r^2-C^2(1-r^2/4)^2}}\quad (C=\text{常数}).$$

若令 $u=a(1+r^2/4)/r$，其中 $a=C/\sqrt{1+C^2}$，则

$$1-u^2=[r^2-C^2(1-r^2/4)^2]/r^2(1+C^2),$$
$$du=-a(1-r^2/4)dr/r^2,$$
$$\theta=\pm\int\frac{C(1-r^2/4)dr}{r\sqrt{r^2-C^2(1-r^2/4)^2}}=\mp\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

积分得 $\quad\theta-\theta_0=\arccos u\quad$ 或 $\quad u=a(1+r^2/4)r=\cos(\theta-\theta_0)$，

或 $r^2+r_0^2-2r_0r\cos(\theta-\theta_0)=\rho^2$，其中 $r_0=2/a$ 和 $\rho^2=r_0^2-4$。这是中心在 (r_0,θ_0) 半径为 ρ 的圆的极坐标方程，如图 11-17(a)所示。注意 $r_0^2=\rho^2+4>4$，所以中心落在边界 $r=2$ 的外面，并且这圆与 $r=2$ 正交。于是双曲平面的"直线"(测地线)是过圆心的直线和与边界 $r=2$ 正交的圆，如图 11-17(b)所示。过不在"直线"C 上一点 P，存在无限多条 C 的"平行线"。

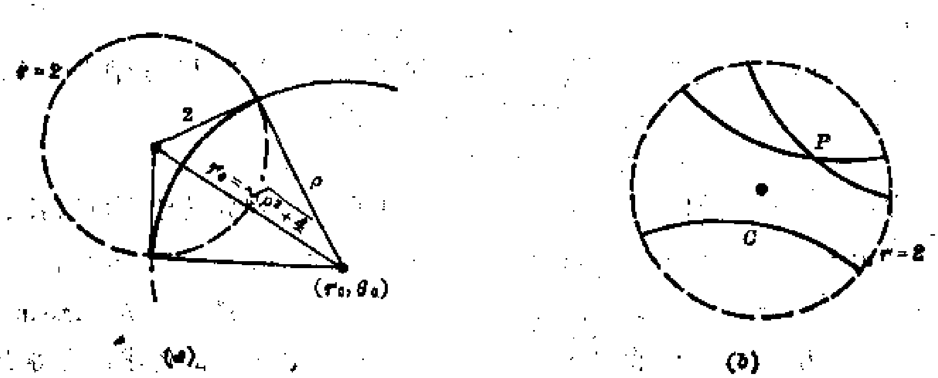


图 11-17

9. 高斯-邦尼特定理

一个首尾相接的 C^m 类正则弧的有限序列 C_i, $i=1, \cdots, n$, 如图 11-18 所示, 称为 C^m 类 Jordan 弧 C. 直观上, Jordan 弧 C 显然有单一的连续表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$, 它的分支 C_i 由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, 表示. 显然 Jordan 弧是可求长的, 它的长等于它的分支长的和. 我们把它的证明留给读者作为练习.

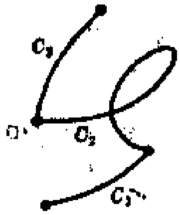


图 11-18

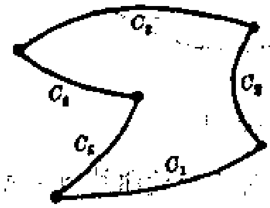


图 11-19

若一 Jordan 弧的端点重合, 称它为闭的. 一个简单闭 Jordan 弧或曲线多边形是除了端点外没有别的重点的闭 Jordan 弧, 如图 11-19 所示. 曲线多边形的一个正则分支称为多边形的边, 两条边之间的点称为多边形的顶点.

若 $C: u=u(t)$, $v=v(t)$ 是平面中一曲线多边形, 可以证明(Jordan 曲线定理) C 是一有界单连通区域 D 的边界, D 称为 C 的内部. (欧氏空间 E 中点集 D 称为单连通的, 若 D 中每一闭曲线多边形可以在 D 中连续地收缩为一点). 而且若 $P(u, v)$ 和 $Q(u, v)$ 是平面中包含曲线多边形 C 和它的内部 D 的开集 U 上的可微函数, 且若 C 绕 D 有正定向, 即若 C 的切向量的一个小的正旋转指向 D 内, 则可以证明(Green 定理)

$$\oint_C \left(P\,\frac{du}{dt}+Q\,\frac{dv}{dt}\right)dt=\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv, \tag{11.19}$$

其中 R 是闭集 $D\cup C$.

现在假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是曲面 S 上定义在开集 U 的一个坐标曲面片, 显然曲线 C: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(u(t), v(t))$ 是曲面片上一曲线多边形当且仅当 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 是 U 中曲线多边形. 若 C 是曲面片上一曲线多边形, 我们定义 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 上 C 的内部 W 为 U 中 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 的内部的像, 而且我们说 C 在曲面片上有正定向, 若 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 在参数平面中有正定向. 最后我们指出, 可以证明 C 在坐标曲面片上的内部 W 是曲面片的单连通子集当且仅当 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 的内部包含在 U 中, 如图 11-20 所示.

现在假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是类 $\geqslant 3$ 的曲面上一坐标曲面片, 其参数曲线正交. 设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(u(s), v(s))$$

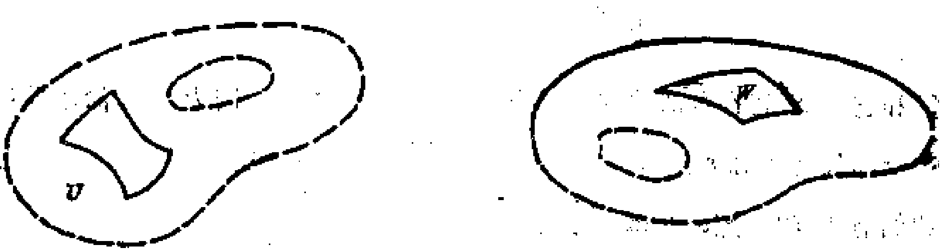


图 11-20

是 $x=x(u,v)$ 上的 C^2 类曲线多边形的自然表示，有正定向且它的内部是单连通的．设

$$g_1=x_u/|x_u|=x_u/\sqrt{E} \quad 和 \quad g_2=x_v/|x_v|=x_v/\sqrt{G}$$

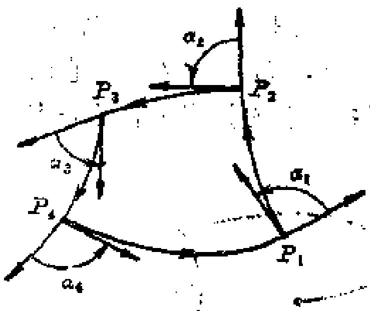


图 11-21

分别是 C 上沿 u 参数和 v 参数方向的单位切向量，$\theta(s)$ 是由 $t=(\cos\theta)g_1+(\sin\theta)g_2$ 确定的分段可微函数，其中 t 是沿 C 的单位切向量，如图 11-21 所示．注意 $\theta(s)$ 在 C 的每个顶点 P_i 有一个等于角 α_i 的跃度，$-\pi<\alpha_i<\pi$．角 α_i 称为 C 在 P_i 的外角．

在问题 11.19 中我们将证明（Liouville 公式）沿 C 的每条边，测地曲率为

$$\kappa_g=d\theta/ds+\kappa_1\cos\theta+\kappa_2\sin\theta, \tag{11.20}$$

其中 κ_1 和 κ_2 分别是参数曲线 $v=$常数和 $u=$常数的测地曲率．于是

$$\int_C\kappa_g\,ds=\int_C\frac{d\theta}{ds}ds+\int_C(\kappa_1\cos\theta+\kappa_2\sin\theta)ds.$$

现在

$$\cos\theta=t\cdot\frac{x_u}{\sqrt{E}}=\left(x_u\frac{du}{ds}+x_v\frac{dv}{ds}\right)\frac{x_u}{\sqrt{E}}=\frac{x_u\cdot x_u}{\sqrt{E}}\frac{du}{ds}=\sqrt{E}\frac{du}{ds} \tag{11.21a}$$

和

$$\sin\theta=t\cdot\frac{x_v}{\sqrt{G}}=\left(x_u\frac{du}{ds}+x_v\frac{dv}{ds}\right)\frac{x_v}{\sqrt{G}}=\frac{x_v\cdot x_v}{\sqrt{G}}\frac{dv}{ds}=\sqrt{G}\frac{dv}{ds}, \tag{11.21b}$$

其中我们利用了参数曲线正交、因而 $x_u\cdot x_v=0$ 的事实．代入上面的积分得到

$$\int_C\kappa_g\,ds=\int_C d\theta+\int_C\left(\kappa_1\sqrt{E}\frac{du}{ds}+\kappa_2\sqrt{G}\frac{dv}{ds}\right)ds.$$

从 Green 定理(11.19)得出

$$\int_C\kappa_g\,ds=\int_C d\theta+\iint_{R'}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\kappa_2\sqrt{G})-\frac{\partial}{\partial v}(\kappa_1\sqrt{E})\right]du\,dv,$$

其中 R' 是平面中 $u=u(s)$, $v=v(s)$ 的内部和边界．由方程(11.6)，

$$\begin{aligned}\int_C\kappa_g\,ds&=\int_C d\theta+\iint_{R'}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right]du\,dv\\&=\int_C d\theta+\iint_{R'}\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right]\sqrt{EG}\,du\,dv.\end{aligned}$$

故据 Gauss 曲率的公式(11.10)，

$$\int_C\kappa_g\,ds=\int_C d\theta-\iint_{R'}K\sqrt{EG}\,du\,dv.$$

于是有公式

$$\int_C\kappa_g\,ds=\int_C d\theta-\iint_R K\,ds,$$

其中 R 是 C 和它在 $\mathscr{S}$ 上的内部的并，剩下还要求 $\int_C d\theta$ 的值．因为 C 是简单曲线，可以证明沿 C，θ 的全部改变的总和是 2π，证明可在拓扑学教科书中找到．因为 $\int_C d\theta$ 是计算 θ 沿边的改变，我们有 $\int_C d\theta+\sum\alpha_i=2\pi$．于是

定理 11.18 Gauss-Bonnet 公式 设 C 是类 $\geqslant 3$ 的曲面的一个坐标曲面片上的 C^2 类

曲线多边形. 假设 C 有正定向且它在坐标曲面片上的内部是单连通的，则

$$\int_C \varkappa_g ds + \iint_R K\, dS = 2\pi - \sum_i \alpha_i, \tag{11.22}$$

其中 $\varkappa_g$ 是沿 C 的测地曲率，R 是 C 与它的内部的并，K 是 Gauss 曲率和 α_i 是 C 的外角.

例 11.10 假设 C 由构成一测地三角形的三条测地线组成. 因为在 C 上，$\varkappa_g=0$，Gauss-Bonnet 公式变成

$$\iint_R K\, ds = 2\pi - \sum_i \alpha_i.$$

若 $\beta_i = \pi - \alpha_i$，$i=1, 2, 3$，表示三角形的内角，如图 11-22 所示，则

$$\iint_R K\, ds = \sum_{i=1}^{3} \beta_i - \pi.$$

对于半径为 a 的球面，$K=1/a^2$，公式变为

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i = \pi + A/a^2,$$

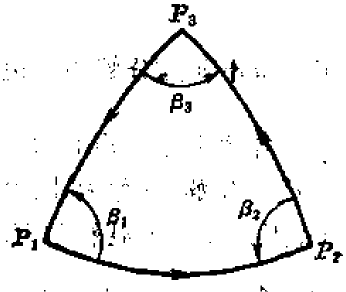


图 11-22

其中 A 是测地三角形的面积. 若 $K=-1$，伪球面，则 $\sum_{i=1}^{3}\beta_i = \pi - A/a^2$. 于是测地三角形内角和大于、小于或等于 π，取决于 Gauss 曲率是正的、负的或 0.

我们现在假设 S 是紧致(闭的和有界的)和可定向曲面. 可以证明这样的曲面可用有限个区域 R_i，$i=1, \cdots, n$，覆盖，其中每个 R_i 由曲线多边形 C_i 和它的内部 W_i 组成，若任意两个 R_i 搭接，它们或者有单一的公共边或者有一个公共的顶点，如图 11-23 所示，覆盖 $\{R_i, i=1, \cdots, n\}$ 称为 S 的多边形分解. 特别地，若取定一定向，则存在一个由正定向多边形组成的多边形分解，使得在任意两条搭接的边上定向是相反的，如图 11-24 所示.

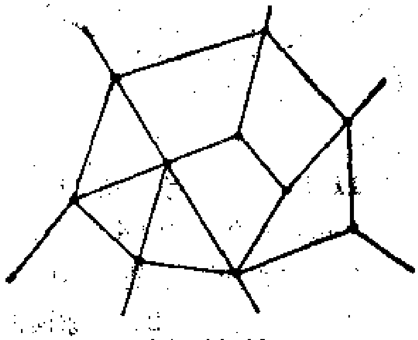


图 11-23

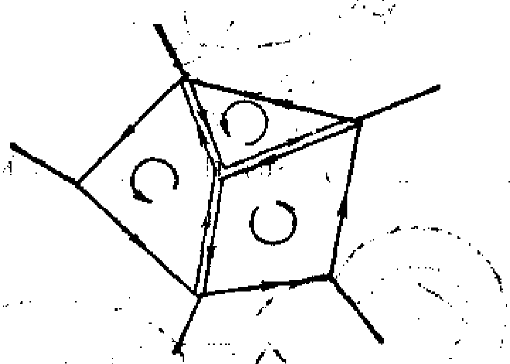


图 11-24

现在若把 Gauss-Bonnet 公式应用到这样一个覆盖的每个多边形 C_i 上，我们有

$$\int_{C_i} \varkappa_g ds + \iint_{R_i} K\, ds = 2\pi - k_i\pi + \sum_j \beta_{ij},$$

其中 k_i 是 C_i 的边数，$\beta_{ij} = \pi - \alpha_{ij}$，如上例，是在一个顶点的内角. 再把上面的方程对所有多边形 C_i 求和. 因为每一条边在所求和中用相反的定向覆盖两次，我们有

$$\sum_i \left[\int_{C_i} \varkappa_g ds\right] = 0.$$

于是

$$\iint_S K\,dS = 2\pi\sum_{i=1}^{n}1 - \pi\sum_{i=1}^{n}k_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_j \beta_{ij}.$$

因为每条边在和 $\sum_{i=1}^{n}k_i$ 中出现两次，并因为每个顶点给和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_j \beta_{ij}$ 添上 2π．最后我们有公式

$$\iint_S K\,dS = 2\pi(\alpha_2-\alpha_1+\alpha_0), \tag{11.23}$$

其中 $\alpha_2=n$ 是分解的多边形数，α_1 是边数，α_0 是顶点数，积分 $\iint_S K\,dS$ 称为 S 的全曲率．

作为上述方程的第一个推论，我们看到 $\chi=\alpha_2-\alpha_1+\alpha_0$ 仅依赖于曲面而不依赖于曲面的多边形分解，它称为曲面的 Euler 示性数． 而 Euler 示性数在曲面的一一双连续映射下不变，因为直观上显然曲面 S 的多边形分解映射到它的像的一个有同样多的多边形、边和顶点数的多边形分解上．因此对于这样的紧致可定向曲面，全曲率 $\iint_S K\,dS$ 事实上是拓扑不变量．

我们把方程(11.23)正式叙述为

定理 11.19 Gauss–Bonnet 定理．若 S 是 C^3 类可定向紧致曲面，则

$$\iint_S K\,dS = 2\pi\chi(s),$$

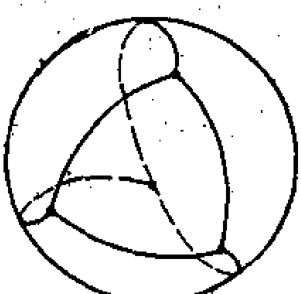


图 11-25

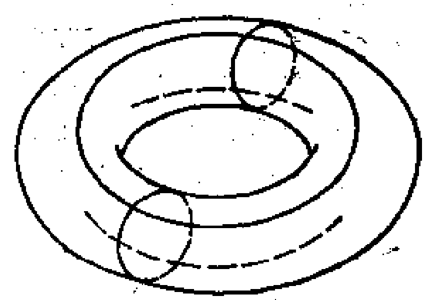


图 11-26

其中 K 是 S 的 Gauss 曲率，$\chi(s)$ 是 S 的 Euler 示性数．

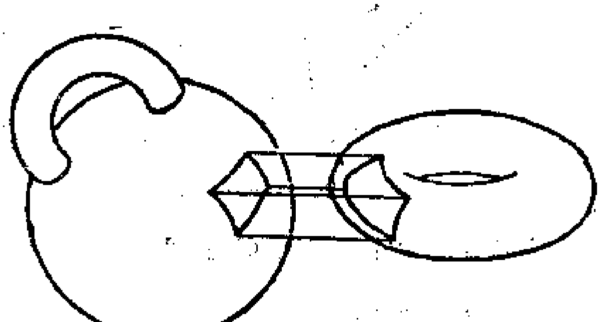


图 11-27

例 11.11 (a) 考察图 11-25 中球面的一个多边形分解，它由 4 个多边形，6 条边和 4 个顶点组成．于是球面的 Euler 示性数是 2，由方程(11.23)，球面的全曲率是4π．

(b) 在图 11-26 中我们看到环面的多边形分解由 4 个多边形， 8 条边和 4 个顶点组成，于是环面的 Euler 示性数是 0，全曲率也是 0．

(c) 环面是有一个环柄的球面的例子(见问题 11.30)． 如图 11-27 所示，有两个环柄的球面可以用有一个环柄的球面沿其一个多边形附贴上一个环面的方法得到，这使得两个曲面总的多边形数减去 2，总的边数减去那个多边形的边数，总的顶点数减去那个多边形

的顶点数. 因为一个多边形的边数与顶点数相同，所以有两个环柄的球面的 Euler 示性数是 −2. 一般地用加一个环柄到有 $P-1$ 个环柄的曲面上得到的曲面的 Euler 示性数比原来的曲面的 Euler 示性数小 2. 于是有 P 个环柄的曲面的 Euler 示性数的公式是 $\chi=2(1-P)$.

§11.2 问题及其解答

1. 曲面的映射

11.1 证明曲面 S 到曲面 S^* 的正则可微映射 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 的连续映射.

证：假设 $\boldsymbol{f}(P_0)=P_0^*$ 是 S^* 上一点，$S_\varepsilon(P_0^*)$ 是 P_0^* 的任一邻域，据定理 11.1. 的系，存在 S 上包含 P_0 的曲面片 D，在其上 $\boldsymbol{f}$ 是连续的. 于是存在一邻域 $S_{\delta_1}(P_0)$ 使得对于 $S_{\delta_1}(P_0)\cap D$ 中的 P，有 $\boldsymbol{f}(P)\in S_\varepsilon(P_0^*)$. 由问题 8.13，对于曲面 S 的曲面片 D 上任意一点 P_0，存在一邻域 $S_{\delta_2}(P_0)$ 使得 $S_{\delta_2}(P_0)\cap S\subset D$. 于是对于 $S_\delta(P_0)\cap S$ 中的 P，其中 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，有 P 在 $S_{\delta_1}(P_0)\cap D$ 中，因此 $\boldsymbol{f}(P)$ 在 $S_\varepsilon(P_0^*)$ 中. 由此得出 $\boldsymbol{f}$ 在 P_0 连续. 因为 P_0 是任意的，所以 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 的连续映射.

11.2 证明若 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 的正则可微映射，$\boldsymbol{g}$ 是 S^* 到 S^{**} 的正则可微映射，则复合映射 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^{**} 的正则可微映射.

证：设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 S 上定义在 U 上的一个坐标曲面片，要求证明

$$\boldsymbol{x}^{**}=(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}(u, v))$$

是 S^{**} 上一正则参数表示. 因为 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 的正则可微映射，由定理 11.1，对于 U 中每一点 (u, v) 存在一个邻域 $S(u, v)$，使得对于 $S(u, v)$ 中的 (u, v)，$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 是 S^* 上一坐标曲面片. 因为 $\boldsymbol{g}$ 是 S^* 到 S^{**} 中的正则可微映射，

$$\boldsymbol{x}^{**}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*(u, v))=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v)))=(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}(u, v)),$$

对于 $S(u, v)$ 中的 (u, v)，是 S^{**} 上的一个正则参数表示. 因为 (u, v) 是 U 中任意一点，$\boldsymbol{x}^{**}=(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}(u, v))$ 是 S^{**} 上定义在 U 上的正则参数表示. 证毕.

11.3 设 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 中的映射，使得对于 S 的一个坐标曲面片基中的每个坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，映射 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 是 C^r 类的正则参数表示. 证明 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 对于 S 上所有坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 C^r 类正则参数表示，因而 $\boldsymbol{f}$ 是 S 到 S^* 的 C^r 类正则可微映射.

证：设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是 S 上定义在 U 上的任意坐标曲面片. 要证明 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 是 S^* 上的正则参数表示，设 (u, v) 是 U 中任意一点，P 是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 上对应于 (u, v) 的点，设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(\theta, \phi)$ 是基中一包含 P 的坐标曲面片，由定理 8.8，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 与 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(\theta, \phi)$ 的交是 S 上定义在包含 (u, v) 的开集 W 上的曲面片，在其上 $\theta=\theta(u, v)$，$\phi=\phi(u, v)$ 是一个允许参数变换. 因为 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\theta(u, v), \phi(u, v)))$，其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\theta, \phi))$ 是正则参数表示. 因此 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 是定义在 W 上的正则参数表示. 因为 (u, v) 是 U 中任意一点，因此 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 是定义在 U 上的正则参数表示.

11.4 若 $\boldsymbol{f}$ 是曲面 S 到曲面 S^* 上的正则可微映射，证明 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 S^* 到 S 上的正则可微映射.

证：设 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(u, v)$ 是 S^* 的定义在 U 上的坐标曲面片，要证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}^*(u, v))$ 是

S 上的正则参数表示，和前一问题一样，只要证明 $x=f^{-1}(x^*(u, v))$ 对于 U 中任意一点 (u, v) 的某个邻域是正则参数表示. 令 P^* 表示 (u, v) 在 $x^*=x^*(u, v)$ 下的像，P 是 P^* 在 f^{-1} 下的像. 现在设 $x=x(\theta, \phi)$ 是 S 上包含 P 的坐标曲面片. 因为 f 是 S 到 S^* 的正则可微映射，$x^*=x^*(\theta, \phi)=f(x(\theta, \phi))$ 是 S^* 上包含 P^* 的正则参数表示，由定理 11.1 我们可以假定 $x^*=x^*(\theta, \phi)$ 是一坐标曲面片. 由定理 8.3.，在 S^* 上的坐标曲面片 $x^*=x^*(u, v)$ 和 $x^*=x^*(\theta, \phi)$ 的交是包含 P^* 的曲面片，在其上 $\theta=\theta(u, v)$，$\phi=\phi(u, v)$ 是允许参数变换，因而在交上 $x=f^{-1}(x^*(u, v))=x(\theta(u, v), \phi(u, v))$ 是 S 上的正则参数表示，证毕.

2. 等距映射

11.5 若 f 是曲面 S 到曲面 S^* 上的一个等距映射，证明 f^{-1} 是 S^* 到 S 上的一个等距映射.

证：由问题 11.4.，f^{-1} 是 S^* 到 S 上的正则可微映射，于是对于 S^* 上任意弧 C^*，$f^{-1}(C^*)$ 是 S 上正则弧，且因为 f 是 S 到 S^* 的等距映射.

$$L(f^{-1}(C^*))=L(f(f^{-1}(C^*)))=L(C^*),$$

其中 $L(C^*)$ 是 C^* 的长，这就证明了 f^{-1} 是从 S^* 到 S 上的一个等距.

11.6 证明定理 11.4：曲面上从点 P 到点 Q 的内蕴距离 $D(P, Q)$ 满足：

(i) $D(P, Q)=D(Q, P)$；

(ii) $D(P, R)\leqslant D(P, Q)+D(Q, R)$；

(iii) $D(P, Q)\geqslant 0$，$D(P, Q)=0$ 当且仅当 $P=Q$.

证：(i) 因为从 P 到 Q 的正则弧 C 的长 $L(C)$ 不依赖于 C 的定向，对于从 P 到 Q 的所有正则弧 C，数 $L(C)$ 的集合不依赖于 C 的定向. 于是 $D(P, Q)$，它是 $L(C)$ 的下确界，不依赖于 C 的定向，所以 $D(P, Q)=D(Q, P)$.

(ii) 因为 $D(P, Q)$ 是从 P 到 Q 的弧长的下确界，对于任意 $\varepsilon>0$，存在从 P 到 Q 的正则弧 C_1，使得 $L(C_1)\leqslant D(P, Q)+\varepsilon$. 由于同样理由，存在从 Q 到 R 的正则弧 C_2，使得 $L(C_2)\leqslant D(Q, R)+\varepsilon$. 现在用连接 C_2 和 C_1 的办法得到的弧一般来说在 Q 有一个"拐角"，因此不是从 P 到 R 的正则弧. 但是可以证明存在一条从 P 到 R 的正则弧 C，它无论怎样不好也只不过是稍微长一点而已，即存在一条从 P 到 R 的弧 C，使得

$$L(C)\leqslant L(C_1)+L(C_2)+\varepsilon.$$

因而得到 $D(P, R)\leqslant L(C)\leqslant L(C_1)+L(C_2)+\varepsilon\leqslant D(P, Q)+D(Q, R)+3\varepsilon$.

因为 ε 是任意的，我们有

$$D(P, R)\leqslant D(P, Q)+D(Q, R).$$

(iii) 因为 $L(C)\geqslant 0$，对于任意从 P 到 Q 的弧，$D(P, Q)\geqslant 0$. 若 $P=Q$，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个从 P 到 Q 的正则弧 C，使得 $L(C)\leqslant\varepsilon$. 因为对于任意 ε，$D(P, Q)\leqslant L(C)\leqslant\varepsilon$，因此 $D(P, Q)=0$. 反之，假设 $D(P, Q)=0$，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在一从 P 到 Q 的弧 C 使得 $L(C)\leqslant D(P, Q)+\varepsilon=\varepsilon$，但欧氏距离 $|P-Q|\leqslant L(C)$，因为 ε 是任意的，所以 $|P-Q|=0$ 或 $P=Q$.

11.7 设 f 是曲面 S 到曲面 S^* 的局部等距映射. 证明对于 S 上任意两点 P 和 Q，内蕴距离 $D(P, Q)=D(f(P), f(Q))$.

证：因为 $D(P, Q)$ 是 P 与 Q 之间的弧长的下确界，给定 $\varepsilon>0$，存在一连接 P 和 Q 的

弧 C，使得它的长满足 $L(C)\leqslant D(P,Q)+\varepsilon$。现设 $C^*=f(C)$，因为 f 是局部等距，$L(C^*)=L(C)$，于是

$$D(f(P),f(Q))\leqslant L(C^*)=L(C)\leqslant D(P,Q)+\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，故有

$$D(f(P),f(Q))\leqslant D(P,Q)$$

同理可证 $$D(P,Q)\leqslant D(f(P),f(Q)).$$

于是有 $$D(P,Q)=D(f(P),f(Q)).$$

11.8 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(s,v)=\boldsymbol{x}(s)+v\boldsymbol{t}(s)$，$v>0$，是没有拐点的自然表示的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的切线曲面的一支(见问题 8.19)，证明切线曲面上每一点的一个邻域可以等距地映射到平面的一个子集上.

证：由曲线基本定理，在平面 x_1x_2 中存在一曲线的自然表示 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(s)$，使得沿 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(s)$ 的曲率 $\kappa^*(s)$ 等于沿 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的曲率. 在切线曲面上给定一点 P 和包含 P 的一个坐标曲面片 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(s,v)$. 定义这坐标曲面片到平面中的映射 f 为

$$\boldsymbol{y}^*=f(\boldsymbol{y}(s,v))=f(\boldsymbol{x}(s)+v\boldsymbol{t}(s))=\boldsymbol{x}^*(s)+v\boldsymbol{t}^*(s),$$

其中 $\boldsymbol{y}_s^*=\dot{\boldsymbol{x}}^*+v\dot{\boldsymbol{t}}^*=\boldsymbol{t}^*+v\kappa^*\boldsymbol{n}^*$ 和 $\boldsymbol{y}_v^*=\boldsymbol{t}^*$ 是连续的，且 $|\boldsymbol{y}_s^*\times\boldsymbol{y}_v^*|=v\kappa^*\neq0$，因为 $v>0$ 和 $\kappa^*=\kappa\neq0$；所以 f 是正则可微映射. 由定理 11.1. 我们可以假定包含 P 的曲面片足够小，使得 f 是一一的. 现在沿坐标曲面片 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(s,v)$ 有

$$E=\boldsymbol{y}_s\cdot\boldsymbol{y}_s=(\boldsymbol{t}+v\kappa\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{t}+v\kappa\boldsymbol{n})=1+v^2\kappa^2,$$
$$F=\boldsymbol{y}_s\cdot\boldsymbol{y}_v=(\boldsymbol{t}+v\kappa\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{t})=1,\ G=\boldsymbol{y}_v\cdot\boldsymbol{y}_v=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1.$$

在 $\boldsymbol{y}^*=f(\boldsymbol{y}(s,v))=\boldsymbol{x}^*(s)+v\boldsymbol{t}^*(s)$ 上，我们有

$$E^*=\boldsymbol{y}_s^*\cdot\boldsymbol{y}_s^*=1+v^2(\kappa^*)^2,\ F^*=\boldsymbol{y}_s^*\cdot\boldsymbol{y}_v^*=1,$$
$$G^*=\boldsymbol{y}_v^*\cdot\boldsymbol{y}_v^*=1.$$

但 $\kappa=\kappa^*$，所以 $E=E^*$，$F=F^*$，$G=G^*$，由定理 11.3，f 是一个等距.

11.9 若 f 是从 S 到 S^* 上的一个等距，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 是 S 上一曲面片，证明 $E=E^*$，$F=F^*$，$G=G^*$，其中 E、F、G 是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 上的第一基本系数，E^*，F^*，G^* 是 $\boldsymbol{x}^*=f(\boldsymbol{x}(u,v))$ 上的第一基本系数.

证：设 (u,v) 是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 的定义域上任意一点，$u=u(t)$，$v=v(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，是过 (u,v) 一任意弧，设 C_τ 和 C_τ^* 分别是，区间 $a\leqslant t\leqslant\tau$ 上，$u=u(t)$，$v=v(t)$ 在 S 和 S^* 上的像. 因为 f 是 S 到 S^* 上的一个等距.

$$L(C_\tau)=\int_a^\tau\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=L(C_\tau^*)$$
$$=\int_a^\tau\sqrt{E^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F^*\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}+G^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

上列所述对所有 τ 都成立，所以对所有 t，特别是在 (u,v)，

$$E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=E^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F^*\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}+G^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

但是过 (u,v) 的曲线 $u=u(t)$，$v=v(t)$ 是任意的，所以上述方程在 (u,v) 对所有 du/dt，dv/dt 都成立. 因此在 (u,v) 有 $E=E^*$，$F=F^*$ 和 $G=G^*$. 因为 (u,v) 是任意的，得证.

11.10 曲面 S 到曲面 S^* 的正则可微映射 f 称为共形的，若对 S 上每个坐标曲面片

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，存在函数 $\lambda(u, v)>0$，使得对于所有 (u, v)

$$E=\lambda E^*,\ F=\lambda F^* \quad 和 \quad G=\lambda G^*,$$

其中 E, F, G 和 E^*, F^*, G^* 分别是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u, v))$ 上的第一基本系数. 证明共形映射保持相交定向曲线之间的交角. 所谓相交定向曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}(\tau)$ 之间的交角指的是它们在交点的切向量之间的角 $\theta=\angle(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\xi}')$.

证：假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是包含 P 的坐标曲面片，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(t), v(t))$ 和 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}(\eta(\tau), \zeta(\tau))$ 是 S 上在 P 相交的两条曲线，在 P 分别有切向量 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}_u u'+\boldsymbol{x}_v v'$ 和 $\boldsymbol{\xi}'=\boldsymbol{x}_u\eta'+\boldsymbol{x}_v\zeta'$. 若 $\theta=\angle(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\xi}')$，则由方程(9.6)

$$\cos\theta=\frac{Eu'\eta'+F(u'\zeta'+v'\eta')+Gv'\zeta'}{[E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2]^{1/2}[E(\eta')^2+2F\eta'\zeta'+G(\zeta')^2]^{1/2}}.$$

另方面若 θ^* 是这些曲线在 S^* 的像 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*(u(t), v(t))$ 和 $\boldsymbol{\xi}^*=\boldsymbol{x}^*(\eta(\tau), \zeta(\tau))$ 的切线 $\boldsymbol{x}^{*\prime}=\boldsymbol{x}_u^*u'+\boldsymbol{x}_v^*v'$ 和 $\boldsymbol{\xi}^{*\prime}=\boldsymbol{x}_u^*\eta'+\boldsymbol{x}_v^*\zeta'$ 之间的角，则

$$\cos\theta^*=\frac{E^*u'\eta'+F^*(u'\zeta'+v'\eta')+G^*v'\zeta'}{[E^*(u')^2+2F^*u'v'+G^*(v')^2]^{1/2}[E^*(\eta')^2+2F^*\eta'\zeta'+G^*(\zeta')^2]^{1/2}}.$$

在对应点有 $E=\lambda E^*$，$F=\lambda F^*$，$G=\lambda G^*$，所以 $\cos\theta=\cos\theta^*$ 或 $\theta=\theta^*$，证毕.

11.11 两曲面 S 和 S^* 称为可贴的，若有一个从 S 到 E^3 的映射的连续族 $\boldsymbol{f}_\lambda$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，使得(i) $\boldsymbol{f}_0(S)=S$，(ii) $\boldsymbol{f}_1(S)=S^*$，(iii)对于所有 λ，映射 $\boldsymbol{f}_\lambda$ 是 S 到 $\boldsymbol{f}_\lambda(S)$ 上的等距映射. 直观地说 S 和 S^* 是可贴的，若 S 可以连续和等距地弯到 S^* 上. 若 S 和 S^* 是可贴的，我们说 S^* 可以由 S 经过弯曲得到. 一个曲面在这样的等距连续族下不变的性质称为弯曲不变性. 显然若 S 和 S^* 是可贴的，则它们是等距的，其逆一般不真. 证明一曲线的切线曲面的一支上的每一点的一个邻域可以弯曲到平面上(见问题 11.8).

证：设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(s, v)=\boldsymbol{x}(s)+v\boldsymbol{t}(s)$，$v>0$，是没有拐点的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的切线曲面. 由曲线基本定理，对于每个 λ，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，存在一曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\lambda(s)$，有曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $(1-\lambda)\tau(s)$，其中 $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 是沿 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 的曲率和挠率. 注意，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0(s)=\boldsymbol{x}(s)$，且 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1(s)$ 是平面曲线，因为它的挠率为 0. 还可以证明 $\boldsymbol{x}_\lambda(s)$ 关于 λ 是连续的. 现在考虑由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}_\lambda(\boldsymbol{y}(s, v))=\boldsymbol{x}_\lambda(s)+v\boldsymbol{t}_\lambda(s)$，$v>0$，确定的切线曲面的映射 $\boldsymbol{f}_\lambda$ 的族. 如问题 11.8 那样，容易验证对于每个 λ，$\boldsymbol{f}_\lambda$ 是切线曲面上一坐标曲面片到它的象的正则可微映射. 显然 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{y}(s, v))=\boldsymbol{y}(s, v)$，且 $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y}(s, v))$ 是平面曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1(s)$ 的切线生成的平面的子集. 最后，对于每个 λ，

$$E_\lambda=(\boldsymbol{x}_\lambda)_s\cdot(\boldsymbol{x}_\lambda)_s=1+v^2\kappa^2=E_0,$$

$$F_\lambda=(\boldsymbol{x}_\lambda)_s\cdot(\boldsymbol{x}_\lambda)_v=1=F_0, \quad 和 \quad G_\lambda=(\boldsymbol{x}_\lambda)_v\cdot(\boldsymbol{x}_\lambda)_v=1=G_0,$$

命题证毕.

3. 测地线

11.12 解方程(11.7)，确定正圆锥

$$\boldsymbol{x}=(u\sin\alpha\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(u\sin\alpha\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(u\cos\alpha)\boldsymbol{e}_3,\ \alpha=常数,$$

$0<\alpha<\pi/2$，$u>0$，的测地线.

解：$E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=1$，$F=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_\theta=0$，$G=\boldsymbol{x}_\theta\cdot\boldsymbol{x}_\theta=u^2\sin^2\alpha$；$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{22}^2=0$，$\Gamma_{22}^1=-u\sin^2\alpha$；$\Gamma_{12}^2=1/u$. 于是方程(11.7)中第二式是

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}=-(2/u)\frac{du}{ds}\frac{d\theta}{ds}.$$

令 $\phi=\frac{d\theta}{ds}$，得

$$\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{ds}=-\frac{2}{u}\frac{du}{ds}.$$

所以有 $\log\phi=-2\log u+K$ 或 $\phi=\frac{d\theta}{dS}=C/u^2\sin^2\alpha$，其中 $C=e^K\sin^2\alpha$. 因为 s 是弧长，

$$1=\left|\frac{dx}{ds}\right|^2=\left|x_u\frac{du}{ds}+x_\theta\frac{d\theta}{ds}\right|^2=E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2F\frac{du}{ds}\frac{d\theta}{ds}+G\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$$

或

$$1=\left(\frac{du}{ds}\right)^2+u^2\sin^2\alpha\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.$$

代入 $d\theta/ds=C/u^2\sin^2\alpha$，得

$$du/ds=\sqrt{u^2\sin^2\alpha-C^2}/u\sin\alpha.$$

所以

$$du/d\theta=(1/C)u\sin\alpha\sqrt{u^2\sin^2\alpha-C^2}$$

或

$$u=A\sec[(\sin\alpha)\theta+B],$$

其中 A, B 为常数.

11.13 证明 C^2 类坐标曲面片 $x=x(u,v)$ 上的 C^2 类自然表示曲线

$$x=x(s)=x(u(s),v(s))$$

的测地曲率为

$$\varkappa_g=\left[\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^3+(2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)\left(\frac{du}{ds}\right)^2\left(\frac{dv}{ds}\right)+(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.-\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^3+\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right]\sqrt{EG-F^2}.$$

证:

$$t=\frac{dx}{ds}=x_u\frac{du}{ds}+x_v\frac{dv}{ds},$$

$$k=\frac{dt}{ds}=x_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2x_{uv}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)+x_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+x_u\frac{d^2u}{ds^2}+x_v\frac{dv^2}{ds^2}.$$

于是由方程(11.3)，

$$\varkappa_g=(t,k,N)=(x_u,x_{uu},N)\left(\frac{du}{ds}\right)^3+[2(x_u,x_{uv},N)$$
$$+(x_v,x_{uu},N)]\left(\frac{du}{ds}\right)^2\left(\frac{dv}{ds}\right)+[(x_u,x_{vv},N)+2(x_v,x_{uv},N)]\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$
$$+(x_v,x_{vv},N)\left(\frac{dv}{ds}\right)^3+(x_u,x_v,N)\left(\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right).$$

现在由 Gauss 方程

$$x_{uu}=\Gamma_{11}^1x_u+\Gamma_{11}^2x_v+LN,$$

我们可得

$$(x_u,x_{uu},N)=\Gamma_{11}^1(x_u,x_u,N)+\Gamma_{11}^2(x_u,x_v,N)+L(x_u,N,N)$$
$$=\Gamma_{11}^2(x_u,x_v,N).$$

但是

$$(x_u,x_v,N)=(x_u\times x_v)\cdot(x_u\times x_v)/|x_u\times x_v|=|x_u\times x_v|$$
$$=\sqrt{EG-F^2},$$

所以

$$(x_u,x_{uu},N)=\Gamma_{11}^2\sqrt{EG-F^2},$$

类似地，

$$(x_v,x_{uu},N)=-\Gamma_{11}^1\sqrt{EG-F^2},$$
$$(x_u,x_{uv},N)=\Gamma_{12}^2\sqrt{EG-F^2},$$

$$(\boldsymbol{x}_v,\ \boldsymbol{x}_{uv},\ \boldsymbol{N})=-\Gamma_{12}^1\sqrt{EG-F^2},$$
$$(\boldsymbol{x}_u,\ \boldsymbol{x}_{vv},\ \boldsymbol{N})=\Gamma_{22}^2\sqrt{EG-F^2},$$
$$(\boldsymbol{x}_v,\ \boldsymbol{x}_{vv},\ \boldsymbol{N})=-\Gamma_{22}^1\sqrt{EG-F^2}.$$

代入上述 $\varkappa_g$ 的方程，即得证。

11.14 证明定理 11.8，C^2 类坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 上一 C^2 类曲线

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(u(s),\ v(s))$$

的自然表示是测地线当且仅当 $u(s)$ 和 $v(s)$ 满足

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\Gamma_{11}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma_{12}^1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,$$
$$\frac{d^2v}{ds^2}+\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma_{12}^2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0.$$

证：我们知道 $\varkappa_g=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}$，这里 $\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{N}$ 是标准正交组。于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 是测地线当且仅当 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}=0$。因为 $\boldsymbol{k}$ 总是与 $\boldsymbol{t}$ 正交，因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 是测地线当且仅当 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_u=0$ 和 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_v=0$。从 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{x}_u(du/ds)+\boldsymbol{x}_v(dv/ds)$，我们得到

$$\boldsymbol{k}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\boldsymbol{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\boldsymbol{x}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\boldsymbol{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\boldsymbol{x}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\boldsymbol{x}_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 是测地线当且仅当

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_u=(\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{x}_u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2(\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{x}_u)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+(\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{x}_u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$
$$+(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u)\frac{d^2u}{ds^2}+(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v)\frac{d^2v}{ds^2}=0,$$
$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_v=(\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{x}_v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2(\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{x}_v)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+(\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{x}_v)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$
$$+(\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v)\frac{d^2u}{ds^2}+(\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v)\frac{d^2v}{ds^2}=0.$$

解出 d^2u/ds^2 和 d^2v/ds^2，并利用向量恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}),$$

得到等价的方程

$$(EG-F^2)\frac{d^2u}{ds^2}=(\boldsymbol{x}_v\times\boldsymbol{x}_{uu})\cdot(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2$$
$$+2(\boldsymbol{x}_v\times\boldsymbol{x}_{uv})\cdot(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_{vv})\cdot(\boldsymbol{x}_v\times\boldsymbol{x}_u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$
$$(EG-F^2)\frac{d^2v}{ds^2}=(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_{uu})\cdot(\boldsymbol{x}_v\times\boldsymbol{x}_u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2$$
$$+2(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_{uv})(\boldsymbol{x}_v\times\boldsymbol{x}_u)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_{vv})(\boldsymbol{x}_v\times\boldsymbol{x}_u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

利用 $$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v/|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|=\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v/\sqrt{EG-F^2},$$

以及上一问题中 $(\boldsymbol{x}_u,\ \boldsymbol{x}_{uu},\ \boldsymbol{N})$ 等的表达式，即可得所求方程。

11.15 若 $u(s)$ 和 $v(s)$ 是前一问题中的微分方程的解，它使得在某一点 $s=s_0$，有

$$E_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2+2F_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0+G_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2=1,$$

证明 s 是沿曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(s),\ v(s))$ 的自然参数。

证：由前一问题，$u(s)$，$v(s)$是所述微分方程的解当且仅当向量 $\frac{dt}{ds}$ 满足 $\frac{dt}{ds}\cdot x_u=0$ 和 $\frac{dt}{ds}\cdot x_v=0$，其中

$$t=\frac{dx}{ds}=x_u\frac{du}{ds}+x_v\frac{dv}{ds}.$$

上述条件等价于：对每个切向量 U，$\frac{dt}{ds}\cdot U=0$. 但是

$$\frac{d}{dt}|t|^2=\frac{d}{ds}(t\cdot t)=2\frac{dt}{ds}\cdot t=0,$$

因为 t 是切向量．所以积分得 $|t|^2=C=$常数，但在 $s=s_0$，

$$|t_0|^2=\left|(x_u)_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0+(x_v)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0\right|$$
$$=E_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2+2F_0\left(\frac{du}{ds}\right)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0+G_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2=1.$$

于是 $|t|^2=|dx/ds|^2=1$，对于所有 s. 证毕.

11.16 若 $x=x(s)=x(u(s),\ v(s))$ 是坐标曲面片 $x=x(u,\ v)$ 上一测地线的自然表示，对于 $x=x(u,\ v)$ 有 $E=E(u)$，$F=0$ 和 $G=G(u)$．证明 $\sqrt{G}\cos\theta=C=$常数，其中 θ 是测地线与 v 参数曲线 $u=$常数之间的交角，即 $\theta=\angle(t,\ x_v)$.

证：从方程(10.4)容易计算得 $\Gamma_{11}^2=0$，$\Gamma_{12}^2=G_u/2G$，$\Gamma_{22}^2=0$，所以方程(11.7)中第二式是

$$\frac{d^2v}{ds^2}+\frac{G_u}{G}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}=0.$$

因为
$$\frac{d}{ds}\left(G\frac{dv}{ds}\right)=G\frac{d^2v}{ds^2}+G_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds},$$

这等价于
$$\frac{d}{ds}\left(G\frac{dv}{ds}\right)=0,$$

所以 $G\frac{dv}{ds}=C=$常数．利用 $F=x_u\cdot x_v=0$，我们得到

$$G\frac{dv}{ds}=(x_v\cdot x_v)\frac{dv}{ds}=\left(x_u\frac{du}{ds}+x_v\frac{dv}{ds}\right)\cdot x_v=t\cdot x_v$$
$$=|t||x_v|\cos\angle(t\,x_v)=\sqrt{G}\cos\theta,$$

于是 $\sqrt{G}\cos\theta=C=$常数.

11.17 证明定理 11.10：若 $x=x(u,\ v)$是类$\geqslant 2$的曲面上一坐标曲面片，且$E=E(u)$，$F=0$ 和 $G=G(u)$，则

(ⅰ) u 参数曲线 $v=$常数是测地线；

(ⅱ) v 参数曲线 $u=u_0$ 是测地线当且仅当 $G_u(u_0)=0$；

(ⅲ) 曲线 $x=x(u,\ v(u))$是测地线当且仅当

$$v=\pm\int\frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}du,\quad C=\text{常数}$$

证：(i)由方程(11.6)，$(\kappa_g)_{v=\text{常数}}=-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}=0$，所以 u 参数曲线 $v=$常数是测地线.

(ii) 又由方程(11.6)，$(\varkappa_g)_{u=u_0}=\dfrac{G_u(u_0)}{2G(u_0)\sqrt{E(u_0)}}$，所以 $u=u_0$ 是测地线当且仅当 $G_u(u_0)=0$。

(iii) 和上一问题一样，$G\dfrac{dv}{ds}=C=$常数，还有，因为 s 等于弧长，

$$1=\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right|^2=\left|\boldsymbol{x}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{ds}\right|^2=E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

代入 $\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{C}{G}$，给出

$$1=E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\frac{C^2}{G}\quad\text{或}\quad\frac{du}{ds}=\pm\frac{\sqrt{G-C^2}}{\sqrt{E}\sqrt{G}}.$$

于是
$$\frac{dv}{du}=\frac{dv}{ds}\Big/\frac{du}{ds}=\pm\frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}},$$

由此即可得证.

11.18 坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 称为 Liouville 曲面片，若 $E=G=U+V$ 和 $F=0$，其中 U 仅仅是 u 的函数，V 仅仅是 v 的函数. 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(u(s), v(s))$ 是这样一个曲面片上的测地线的自然表示，证明

$$U\sin^2\theta-V\cos^2\theta=C,\ C=\text{常数},$$

其中 θ 是测地线与 u 参数曲线 $v=$常数之间的交角，即 $\theta=\angle(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_u)$.

证：这里

$$\frac{U'}{2(U+V)}=\Gamma_{11}^1=-\Gamma_{22}^1=-\Gamma_{12}^2\quad\text{和}\quad\frac{V'}{2(U+V)}=\Gamma_{12}^1=-\Gamma_{11}^2=\Gamma_{22}^2.$$

代入方程(11.4)，并令 $\varkappa_g=0$，

$$-V'\left(\frac{du}{ds}\right)^3+U'\left(\frac{du}{ds}\right)^2\left(\frac{dv}{ds}\right)-V'\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+U'\left(\frac{dv}{ds}\right)^3$$
$$+2(U+V)\left(\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right)=0$$

或
$$\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]\left(U'\frac{dv}{ds}-V'\frac{du}{ds}\right)+2(U+V)\left(\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right)=0.$$

这等价于
$$\frac{d}{ds}\left[\frac{U(dv/ds)^2-V(du/ds)^2}{(du/ds)^2+(dv/ds)^2}\right]=0.$$

所以

(a)
$$\left[U\left(\frac{dv}{ds}\right)^2-V\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right]\Big/\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]=C=\text{常数}$$

现在
$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{x}_u}{|\boldsymbol{t}||\boldsymbol{x}_u|}=\frac{(\boldsymbol{x}_u du/ds+\boldsymbol{x}_v dv/ds)\boldsymbol{x}_u}{|\boldsymbol{x}_u|}=|\boldsymbol{x}_u|\frac{du}{ds}.$$

类似地，
$$\sin\theta=\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_v|}=|\boldsymbol{x}_v|\frac{dv}{ds}.$$

因为 s 等于弧长，

$$1=\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right|^2=\left|\boldsymbol{x}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{x}_v\frac{dv}{ds}\right|^2=(U+V)\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]$$
$$=|\boldsymbol{x}_v|^2\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]=|\boldsymbol{x}_u|^2\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]$$

于是 $$\cos^2\theta=\left(\frac{du}{ds}\right)^2\Big/\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]$$

和 $$\sin^2\theta=\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\Big/\left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right],$$

代入上面的(a)，即可得证．

11.19 Liouville 公式． 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$是类 $\geqslant 2$ 的曲面上一坐标曲面片，u 参数曲线与 v 参数曲线正交． 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(u(s),\ v(s))$是这个坐标曲面片上一曲线 C 的自然表示，又设 $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{x}_u/|\boldsymbol{x}_u|$ 和 $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{x}_v/|\boldsymbol{x}_v|$ 是参数曲线的单位方向向量，$\theta=\theta(s)$是沿 C 由 $\boldsymbol{t}=(\cos\theta)\boldsymbol{g}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{g}_2$ 确定的函数，其中 $\boldsymbol{t}$ 是沿 C 的单位切向量． 证明 C 的测地曲率为

$$\varkappa_g=d\theta/ds+\varkappa_1\cos\theta+\varkappa_2\sin\theta,$$

其中 $\varkappa_1$ 是 u 参数曲线的测地曲率，$\varkappa_2$ 是 v 参数曲线的测地曲率．

证：沿 C 微分 $\boldsymbol{g}_1$，并利用方程(11.21)，得

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds}&=\frac{\partial\boldsymbol{g}_1}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\boldsymbol{g}_1}{\partial v}\frac{dv}{ds}=\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{du}\frac{du}{ds}+\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_2}\frac{ds_2}{dv}\frac{dv}{ds}\\&=\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_1}|\boldsymbol{x}_u|\frac{du}{ds}+\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_2}|\boldsymbol{x}_v|\frac{dv}{ds}=\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_1}\cos\theta+\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_2}\sin\theta,\end{aligned}$$

其中 s_1 是沿 u 参数曲线的弧长，s_2是沿 v 参数曲线的弧长．类似地，

$$\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds}=\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_1}\cos\theta+\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_2}\sin\theta.$$

沿 C 微分 $\boldsymbol{t}$，并利用上述结果，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}=\dot{\boldsymbol{t}}&=(\cos\theta)\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds}-(\sin\theta)\boldsymbol{g}_1\frac{d\theta}{ds}+(\sin\theta)\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds}+(\cos\theta)\boldsymbol{g}_2\frac{d\theta}{ds}\\&=\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_1}\cos^2\theta+\left(\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_2}+\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_1}\right)\cos\theta\sin\theta+\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_2}\sin^2\theta+U\frac{d\theta}{ds},\end{aligned}$$

其中 $U=-\boldsymbol{g}_1\sin\theta+\boldsymbol{g}_2\cos\theta$． 由方程(11.2)和

$$\boldsymbol{g}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_1}=\boldsymbol{g}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_2}=\boldsymbol{g}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_1}=\boldsymbol{g}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_2}=0,$$

我们有

$$\begin{aligned}\varkappa_g=\boldsymbol{k}\cdot U&=\boldsymbol{k}\cdot(-\boldsymbol{g}_1\sin\theta+\boldsymbol{g}_2\cos\theta)\\&=\left(\boldsymbol{g}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_1}\right)\cos^3\theta+\left(\boldsymbol{g}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_2}\right)\cos^2\theta\sin\theta\\&\quad-\left(\boldsymbol{g}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_1}\right)\sin^2\theta\cos\theta-\left(\boldsymbol{g}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_2}\right)\sin^3\theta+\frac{d\theta}{ds}.\end{aligned}$$

最后，我们注意沿 u 参数曲线的测地曲率为

$$\varkappa_1=\boldsymbol{g}_2\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_1}$$

和沿 v 参数曲线是

$$\varkappa_2=-\boldsymbol{g}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_2},$$

并因为 $\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_2=0$，又有

$$\varkappa_1=-\boldsymbol{g}_1\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_2}{ds_1}\quad 和\quad \varkappa_2=\boldsymbol{g}_2\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_1}{ds_2}.$$

于是 $$\varkappa_g=d\theta/ds+\varkappa_1\cos^3\theta+\varkappa_2\cos^2\theta\sin\theta+\varkappa_1\sin^2\theta\cos\theta+\varkappa_2\sin^3\theta,$$

得证．

4. 测地坐标

11.20 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, 是类 $\geqslant 3$ 的曲面上的 C^3 类曲线 C, 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s,t)$ 是从 C 出发且与 C 正交的自然表示的测地线簇，即 $\boldsymbol{x}(0,t)=\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{x}_s(0,t)\cdot\boldsymbol{x}(t)=0$. 证明存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s,t)$, 对于 $-\varepsilon<s<\varepsilon$ 和 $a<t<b$, 是 C^2 类正则参数表示.

证：设 P 是 C 上任意一点，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 是包含 P 的坐标曲面片. 设 $u=u_0(t)$, $v=v_0(t)$ 是参数平面中一曲线，它在 P 的每个邻域中被映射到 C 上，并设 $u=u(s,t)$, $v=v(s,t)$ 是映射到测地线族 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s,t)$ 上的曲线族. 由定理 11.8，对于所有 t, $u(s,t)$, $v(v,t)$ 是微分方程(11.7)的满足初始条件

$$u(0,t)=u_0(t),\ v(0,t)=v_0(t),\ u_s(0,t)=\xi(t),$$
$$v_s(0,t)=\eta(t)$$

的唯一解，其中 $\xi(t)$, $\eta(t)$ 是 C^1 类的，并由下列方程唯一确定：

(i) $E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2=1$;

(ii) $E\xi\dfrac{du_0}{dt}+F\left(\xi\dfrac{dv_0}{dt}+\eta\dfrac{du_0}{dt}\right)+G_\eta\dfrac{dv_0}{dt}=0$;

(iii) $\begin{vmatrix}\xi & du_0/dt\\ \eta & dv_0/dt\end{vmatrix}>0.$

方程(i)表明在初始时 $|\boldsymbol{x}_s(0,t)|=1$; 方程(ii)表明 $\cos(\boldsymbol{x}_s(0,v),\ d\boldsymbol{x}/dt)=0$, 即测地线与 C 正交；而方程(iii)决定测地线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s,t)$ 的定向，注意，因为测地线与 C 正交，这行列式是异于零的. 而从微分方程的解依赖于初始条件的定理，得出函数 $u(s,t)$ 和 $v(s,t)$ 在 C 的某个邻域中有连续的二阶导数. 而且 Jacob $\partial(u,v)/\partial(s,t)$ 在 C 的一个邻域内异于零，因为它是连续的且在 $(0,t)$

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|_{(0,t)}=\begin{vmatrix}u_s(0,t) & u_t(0,t)\\ v_s(0,t) & v_t(0,t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\xi & du_0/dt\\ \eta & dv_0/dt\end{vmatrix}\neq 0.$$

于是在点 P 的一个邻域中函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s,t)=\boldsymbol{x}(u(s,t),\ v(s,t))$ 是 C^2 类正则参数表示，因 C 是紧致的，存在 $\varepsilon>0$, 使 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s,t)$, 对于 $-\varepsilon<s<\varepsilon$, $a<t<b$, 是 C^2 类正则参数表示.

11.21 证明存在 $\varepsilon>0$, 使得在类 $\geqslant 3$ 的曲面上一点 P 的测地极坐标系 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r,\theta)$, 对于 $0<r<\varepsilon$, $-\infty<\theta<\infty$, 是 C^2 类正则参数表示，它把 $0<r<\varepsilon$, $0\leqslant\theta<2\pi$ 一一地映射到 P 的一个去心邻域上.

证：设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 是包含 P 的坐标曲面片，使得 $(0,0)$ 映射到 P, 在 P 有 $\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{g}_2$, 其中 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 是标准正交切向量，并且可根据它们来度量 θ. 注意，在 P, $E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=1$, $F=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v=0$, 和 $G=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v=1$. 现在对于坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$, 考虑微分方程(11.7)

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned}&u''+\Gamma_{11}^1(u')^2+\Gamma_{12}^1u'v'+\Gamma_{22}^1(u')^2=0,\\ &v''+\Gamma_{11}^2(u')^2+\Gamma_{12}^2u'v'+\Gamma_{22}^2(v')^2=0\end{aligned}$$

有初始条件

$$\text{(b)}\qquad u(0)=0,\ v(0)=0,\ u'(0)=\xi,\ v'(0)=\eta.$$

由微分方程理论，对于所有 ξ, η, 在 $t=0$ 的一个邻域存在一个唯一解 $u(t;\xi,\eta)$, $v(t;\xi,\eta)$, 它关于 t, ξ, η 有连续二阶导数. 因为方程对于二阶导数和两个一阶导数的积是线性齐次

的，所以对于任意解 $u(t;\xi,\eta)$，$v(t;\xi,\eta)$，函数 $u(s;\rho\xi,\rho\eta)$，$v(s;\rho\xi,\rho\eta)$，其中 $t=\rho s$，对于足够小的 ρs，也是微分方程的解，它满足初始条件 $u|_{s=0}=u|_{t=0}=0$，$v|_{s=0}=v|_{t=0}=0$，$u_s|_{s=0}=u_t|_{t=0}=\rho\xi$ 和 $v_s|_{s=0}=v_t|_{t=0}=\rho\eta$。所以，$u(t;\xi,\eta)=u(s;\rho\xi,\rho\eta)$ 和 $v(t,\xi,\eta)=v(s;\rho\xi,\rho\eta)$。特别地，当 $s=1$，有 $n(t;\xi,\eta)=u(1;\rho\xi,\rho\eta)$ 和 $\varphi(t;\xi,\eta)=v(1;\rho\xi,\rho\eta)$。我们现在令 $x=\rho\xi$，$y=\rho\eta$，并考虑参数变换 $u=u^*(x,y)$，$v=v^*(x,y)$，其中 $u^*(x,y)=u(1,x,y)$ 和 $v^*(x,y)=v(1,x,y)$。上述变换把 xy 平面的原点的一个邻域映射到 uv 平面的原点的一个邻域。由微分方程和初始条件，有 $u^*(0,0)=0$ 和 $v^*(0,0)=0$。而且在 $t=0$，$x=0$，$y=0$，和所有 ξ，η，我们有

$$\xi=u_t=u_x^*x_t+u_y^*y_t=u_x^*\xi+u_y^*\eta,\qquad \eta=v_t=v_x^*x_t+v_y^*y_t=v_x^*\xi+v^*\eta.$$

所以 $u_x^*=1$，$u_y^*=0$，$v_x^*=0$ 和 $v_y^*=1$，因而 Jacobi

$$\left.\frac{\partial(u^*,v^*)}{\partial(x,y)}\right|_{(0,0)}=\left|\begin{matrix}u_x^* & u_y^*\\ v_x^* & v_y^*\end{matrix}\right|_{(0,0)}=1,$$

因为 Jacobi 是连续的，它在 $(0,0)$ 的一个邻域内异于零。于是 $u=u^*(x,y)$，$v=v^*(x,y)$ 是 C^2 类允许坐标变换，它把 xy 平面原点的一个邻域一一地映射到 uv 平面原点的一个邻域上。我们现在考虑映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(x,y)=\boldsymbol{x}(u^*(x,y),v^*(x,y))$。它是曲面上 P 的一个邻域中的 C^2 类坐标曲面片，它把 $(0,0)$ 映到 P 上，称为在 P 的一个 Riemann 法坐标系，容易验证在 P 有 $\boldsymbol{x}_x^*=\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_y^*=\boldsymbol{x}_v$；于是在 P 有 $E^*=1$，$F^*=0$，$G^*=1$。

最后，令 $\xi=\cos\phi$ 和 $\eta=\sin\phi$，于是 $x=\rho\cos\phi$ 和 $y=\rho\sin\phi$，考虑函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{**}(\rho,\phi)=\boldsymbol{x}^*(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)$。显然 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{**}(\rho,\phi)$，对于 $0<\rho<\varepsilon$ 和 $-\infty<\phi<\infty$，是 C^2 类正则参数表示，它把 $0<\rho<\varepsilon$，$0\leqslant\phi<2\pi$ 一一地映射到 P 的一个去心邻域上，因为对于这些 ρ，ϕ，$x=\rho\cos\phi$，$y=\rho\sin\phi$ 在 xy 平面的原点的一个去心邻域中是一一的，剩下要证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{**}(\rho,\phi)$ 确实是给定的测地极坐标系，即 $\boldsymbol{x}^{**}(r,\theta)\equiv\boldsymbol{x}(r,\theta)$。对于固定的 ϕ_0，我们有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{**}(\rho,\phi_0)=\boldsymbol{x}(u^*(\rho\cos\phi_0,\rho\sin\phi_0),v^*(\rho\cos\phi_0,\rho\sin\phi_0)),$$

其中 $u^*(\rho\cos\phi_0,\rho\sin\phi_0)=u(1;\rho\cos\phi_0,\rho\sin\phi_0)=u(\rho;\cos\phi_0,\sin\phi_0)$。

类似地，$v^*(\rho\cos\phi_0,\rho\sin\phi_0)=v(\rho;\cos\phi_0,\sin\phi_0)$。

但是 u 和 v 是微分方程(a)满足初始条件(b)的解，且在初始时有

$$E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2=\xi^2+\eta^2=\sin^2\phi_0+\cos^2\phi_0=1,$$

因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(\rho,\phi_0)$ 是过 P 沿切向量

$$\boldsymbol{x}_u\cos\phi_0+\boldsymbol{x}_v\sin\phi_0=\boldsymbol{g}_1\cos\phi_0+\boldsymbol{g}_2\sin\phi_0$$

方向的自然表示的测地线。因这些测地线是唯一确定的，所以 $\boldsymbol{x}^{**}(r,\theta)\equiv\boldsymbol{x}(r,\theta)$，证毕。

11.22 证明在 P 的一个 Riemann 法坐标系的第一基本系数的偏导数在 P 为零。

证：设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x,y)$ 是在 P 的一个 Riemann 法坐标系，则对于每个 θ_0 和 $x=r\cos\theta_0$，$y=r\sin\theta_0$，曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r)=\boldsymbol{x}(x(r,\theta_0),y(r,\theta_0))$ 是过 P 的自然表示的测地线。于是 $x(r,\theta_0)$，$y(r,\theta_0)$ 满足

$$\ddot{x}+\Gamma_{11}^1(\dot{x})^2+2\Gamma_{12}^1\dot{x}\dot{y}+\Gamma_{22}^1(\dot{y})^2=0,$$
$$\ddot{y}+\Gamma_{11}^2(\dot{x})^2+2\Gamma_{12}^2\dot{x}\dot{y}+\Gamma_{22}^2(\dot{y})^2=0.$$

因为 $\dot{x}=\frac{d}{dr}(r\cos\theta_0)=\cos\theta_0$，$\ddot{x}=0$，$\dot{y}=\sin\theta_0$ 和 $\ddot{y}=0$，因此

$$\Gamma_{11}^1\cos^2\theta_0+2\Gamma_{12}^1\cos\theta_0\sin\theta_0+\Gamma_{22}^1\sin^2\theta_0=0,$$

$$\Gamma_{11}^2\cos^2\theta_0+2\Gamma_{12}^2\cos\theta_0\sin\theta_0+\Gamma_{22}^2\sin^2\theta_0=0.$$

但在 P，上述方程对所有 θ_0 成立，所以在 P，$\Gamma_{ij}^k=0$，对于所有 $i, j, k=1, 2$. 我们还知道在 P，$E=G=1$，$F=0$. 所以由方程(10.4)，在 P 有

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}E_x=0,\quad \Gamma_{12}^1=\frac{1}{2}E_y=0,\quad \Gamma_{22}^1=\frac{1}{2}(2F_y-G_x)=0,$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{1}{2}(2F_x-E_y)=0,\quad \Gamma_{12}^2=\frac{1}{2}G_x=0,\quad \Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}G_y=0.$$

于是问题得证.

11.23 证明定理 11.13. 若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(r, \theta)$是在一个足够高类的曲面上一点 P 的测地极坐标系，则

$$\sqrt{G}=r-\frac{1}{6}K(P)r^3+R(r, \theta),$$

其中 $\lim\limits_{r\to 0}(R(r, \theta)/r^3)=0$，$K(P)$是在 P 的 Gauss 曲率.

证：设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(x, y)$是在 P 的 Riemann 法坐标，则对于 $r>0$ 和任意的楔形 $\theta_1<\theta<\theta_2$，这里不妨设 $\theta_2-\theta_1\leqslant\frac{3}{2}\pi$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 是允许坐标变换，由方程(9.3)

$$G=E^*(x_\theta)^2+2F^*x_\theta y_\theta+G^*y_\theta^2=r^2(E^*\sin^2\theta-2F^*\sin\theta\cos\theta+G^*\cos^2\theta)$$

由前一问题，在 P 有 $E^*=G^*=1$，$F^*=0$，$E_x^*=E_y^*=F_x^*=F_y^*=G_x^*=G_y^*=0$. 利用这个结果易计算得

(a) $$\lim_{r\to 0}\sqrt{G}=0 \quad 和 \quad \lim_{r\to 0}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}=1.$$

再从方程(11.11)，我们有 $\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}=-K\sqrt{G}$，微分此式得

$$\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}=-K\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}-\frac{\partial K}{\partial r}\sqrt{G}.$$

于是利用上面的(a)，得

(b) $$\lim_{r\to 0}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}=0 \quad 和 \quad \lim_{r\to 0}\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}=-K(P).$$

对于每个 θ，可有

$$\sqrt{G}=(\sqrt{G})_0+\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)_0 r+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}\right)_0 r^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}\right)_0 r^3+R(r, \theta).$$

所以从上述方程(a)和(b)，得到

$$\sqrt{G}=r-K(P)r^3+R(r, \theta),$$

其中 $\lim\limits_{r\to 0}(R(r, \theta)/r^3)=0$. 证毕.

5. 常高斯曲率曲面

11.24 假设 R 是足够高类的曲面上一个坐标曲面片 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$上的一个区域. R 中单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 的端点构成单位球面上的一个集合 R'，称为 R 的球面像. 证明 R' 的面积与 R 的面积之比，当 R 收缩于 P 时，趋向于在点 P 的$|K|$.

证：由方程(9.8)，坐标曲面片的曲面面积元是

$$dR=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|\,du\,dv.$$

球面像的曲面面积元是 $dR'=|\boldsymbol{N}_u\times\boldsymbol{N}_v|du\,dv$，由问题 9.18，

$$|\boldsymbol{N}_u\times\boldsymbol{N}_v|=|K|\,|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|.$$

于是 $dR'/dR=|K|$，命题得证.

11.25 一直纹面(见问题 8.4)称为可展面，若它的切面沿每一母线是不变的. 证明直纹面 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{g}(s)$，$|\boldsymbol{g}(s)|=1$，其中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(s)$ 是自然表示的底曲线，为可展面的充要条件是 $(\dot{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{g}})=0$.

证：在母线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s_0,v)$ 上一点的切面由向量 $\boldsymbol{x}_s(s_0,v)=\dot{\boldsymbol{y}}(s_0)+v\dot{\boldsymbol{g}}(s_0)$ 和 $\boldsymbol{x}_v(s_0,v)=\boldsymbol{g}(s_0)$ 张成. 在 $v=0$，有向量 $\boldsymbol{x}_s(s_0,0)=\dot{\boldsymbol{y}}(s_0)$ 和 $\boldsymbol{x}_v(s_0,0)=\boldsymbol{g}(s_0)=\boldsymbol{x}_v(s_0,v)$. 因此切面沿母线是相同的，当且仅当三个向量 $\dot{\boldsymbol{y}}+v\dot{\boldsymbol{g}}$、$\boldsymbol{g}$ 和 $\dot{\boldsymbol{y}}$ 线性相关，即当且仅当

$$\begin{aligned}0&=[(\dot{\boldsymbol{y}}+v\dot{\boldsymbol{g}}),\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{y}}]=\dot{\boldsymbol{y}}\times(\dot{\boldsymbol{y}}+v\dot{\boldsymbol{g}})\cdot\boldsymbol{g}\\&=v\dot{\boldsymbol{y}}\times\dot{\boldsymbol{g}}\cdot\boldsymbol{g}=-v(\dot{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{g},\dot{\boldsymbol{g}})\end{aligned}$$

命题得证.

11.26 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{g}(s)$，$|\boldsymbol{g}(s)|=1$，$a<s<b$，是可展曲面. 证明区间 $a<s<b$ 可以划分为子区间 $s_{i-1}<s<s_i$，使得在每一个子区间上，曲面是平面、柱面、锥面或者是一曲线的切线曲面.

证：由前一问题，向量 $\dot{\boldsymbol{y}}$，$\boldsymbol{g}$ 和 $\dot{\boldsymbol{g}}$ 是线性相关的，于是存在 $k_1(s)$，$k_2(s)$ 和 $k_3(s)$，其中 $k_1^2+k_2^2+k_3^2\neq0$，使得 $k_1\dot{\boldsymbol{y}}+k_2\boldsymbol{g}+k_3\dot{\boldsymbol{g}}=0$. 现假设在区间 $s_{i-1}<s<s_i$ 中，$k_1\equiv0$，则 $k_2\boldsymbol{g}+k_3\dot{\boldsymbol{g}}=0$，其中 $k_2^2+k_3^2\neq0$. 因为 $|\boldsymbol{g}|=1$，$\boldsymbol{g}\cdot\dot{\boldsymbol{g}}=0$，于是 $0=(k_2\boldsymbol{g}+k_3\dot{\boldsymbol{g}})\boldsymbol{g}=k_2|\boldsymbol{g}|^2$. 所以 $k_2\equiv0$；但 $k_3\neq0$，所以 $\dot{\boldsymbol{g}}\equiv\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{g}=$ 常向量，因此在这种情形曲面是平面或柱面的一部分. 现假设在 $s_{i-1}<s<s_i$ 中 $k_1\neq0$，则我们可以写出 $\dot{\boldsymbol{y}}=C_1\boldsymbol{g}+C_2\dot{\boldsymbol{g}}$. 其中 $C_1=-k_2/k_1$ 和 $C_2=-k_3/k_1$. 现令 $\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{y}-C_2\boldsymbol{g}$，则 $\dot{\boldsymbol{y}}^*=\dot{\boldsymbol{y}}-C_2\dot{\boldsymbol{g}}-\dot{C}_2\boldsymbol{g}=C_3\boldsymbol{g}$，其中 $C_3=C_1-\dot{C}_2$，若在 $s_{i-1}<s<s_i$ 中 $C_3\equiv0$，则 $\boldsymbol{y}^*=$ 常向量 $=\boldsymbol{y}_0^*$，所以曲面具有形式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_0^*+(v+C_2)\boldsymbol{g}$，而这是锥面或者是平面的一部分的方程. 最后我们有 $\dot{\boldsymbol{y}}^*=C_3\boldsymbol{g}$ 和在 $s_{i-1}<s<s_i$ 的某个子区间中 $C_3\neq0$，则 $\boldsymbol{g}=\dot{\boldsymbol{y}}^*/C_3$，因而曲面有形式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+v\boldsymbol{g}=\boldsymbol{y}^*+u\dot{\boldsymbol{y}}^*$，其中 $u=(v+C_2)/C_3$，这是曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^*(s)$ 的切线曲面.

11.27 证明没有平点的足够高类的曲面有常为零的 Gauss 曲率当且仅当曲面上每一个点的一个邻域是可展的. 注：由此据定理 11.17，没有平点的足够高类的曲面上每一点的邻域可以等距地映射到一平面上当且仅当曲面的每一点的一个邻域是可展的.

证：容易直接验证平面，柱面，锥面或曲线的切线曲面有常为 0 的 Gauss 曲率. 于是由前一问题，若一曲面上每一点的一个邻域是可展的，则在曲面上 $K=0$.

关于这一点有另一个有趣的证明. 考虑可展面的球面像，因为切面沿曲面的母线族是固定的，它的球面像或者是一点(在平面的情形)或者是一条曲线. 现设 P 是曲面上一点，R 是包含点 P 的区域和 R' 是 R 的球面像. 由问题 11.24 当 R 收缩到 P 时，在 P 的 Gauss 曲率的绝对值等于 R' 的面积与 R 的面积之比. 但可展面的球面像至多是一条曲线，于是对于所有 R，R' 的面积是零，所以 $K=0$.

现在假设在曲面上 $K\equiv0$. 设 P 是曲面上一点和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 是包含 P 的一个坐标曲面片. 因为 $\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}\equiv0$，我们有 $LN-M^2\equiv0$. 因为在曲面片上没有平点，因此每一点是有单一的渐近方向 $du:dv$ 的抛物点，其满足

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = (\sqrt{L}\,du + \sqrt{N}\,dv)^2 = 0,$$

其中我们利用了 $II=0$ 有单一的实根，故可配成一个平方. 上述方程提供了一个在 P 的邻域的单参数渐近线族，我们假设取它为u参数曲线 $v=$常数. 注意在抛物点，渐近方向与主方向一致，于是 u 参数曲线也是曲率线. 现在沿这些曲线有 $dv=0$，于是从上述微分方程，$\sqrt{L}du=0$. 因为 $du\neq 0$，$L=0$，但 $LN-M^2=0$，所以还有 $M=0$. 因为 u 参数曲线覆盖 P 的一个邻域，在这邻域 $L\equiv M\equiv 0$，由 Weingarten 方程(10.5)，得出 $N_u=0$，于是 N 沿每一 u 参数曲线是常向量. 剩下要证明 u 参数曲线是直线，因为它们也是曲率线，我们从 Rodrigues 公式有 $N_v=-\kappa x_u$. 因为 $N_v=0$，$\kappa=0$，于是 P 的邻域是以 u 参数曲线为母线的可展面，沿母线，切面是固定的.

11.28 证明曲面

$x=(u\cos\theta)e_1+(u\sin\theta)e_2+(\log u)e_3,\ u>0$，在 $(u,\ \theta)$ 与曲面

$$x^*=(u^*\cos\theta^*)e_1+(u^*\sin\theta^*)e_2+u^*e_3,\ u^*>0,$$

在 $u^*=u$ 和 $\theta^*=\theta$ 有同样的 Gauss 曲率，但两曲面不等距.

证：我们留给读者去验证. 在 x 上，$E=(1+1/u^2)$，$F=0$，$G=u^2$，$K=-1/(1+u^2)^2$ 和在 x^* 上，$E^*=1$，$F^*=0$，$G^*=1+(u^*)^2$，$K^*=-1/(1+(u^*)^2)^2$. 于是曲面在对应点有同样的 Gauss 曲率. 现假设曲面是等距的，则存在一参数变换 $\theta^*=\theta^*(\theta,\ u)$，$u^*=u^*(\theta,\ u)$使得在对应点 $E=E^*$，$F=F^*$，$G=G^*$ 和 $K=K^*$，由 $K=K^*$ 我们得到 $1+(u^*)^2=1+(u)^2$，则 $u^*=\pm u$ 或 $u^*=\sqrt{-2-u^2}$，利用第一基本系数的变换性质(方程(9.2)和(9.3))，并假定 $u^*=\pm u$，通过计算容易得出参数变换还必须满足：

(a) $1+(1+u^2)(\theta_u^*)^2=1+1/u^2$，(b) $\theta_u^*\theta_\theta^*=0$ 和

(c) $(1+u^2)\theta_\theta^2=u^2$.

因为 u^* 不依赖于 θ，$u_\theta^*\equiv 0$. 因为一定要有 $\partial(\theta^*,\ u^*)/\partial(\theta,\ u)\neq 0$，故一定要有 $\theta_\theta^*\neq 0$，所以由方程(b)$\theta_u^*\equiv 0$，但这不可能满足(a)，定理得证.

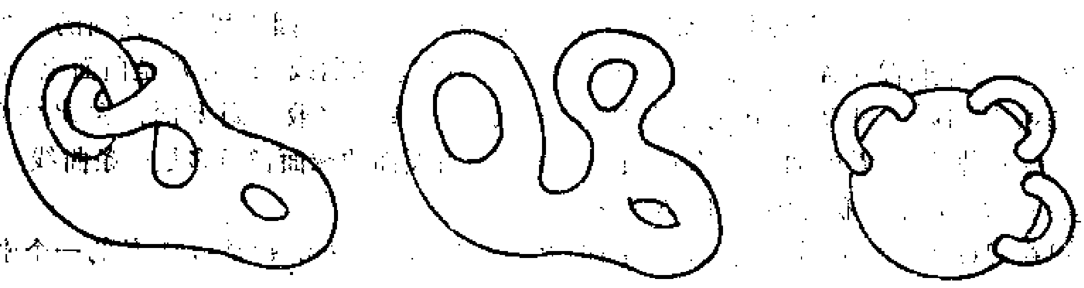
6. 高斯-邦尼特定理

11.29 确定椭圆面的全曲率.

解：椭圆面同胚于球面，所以椭圆面的全曲率等于球面的全曲率 4π.

11.30 确定图 11-28(a)所示曲面的全曲率.

解：如图 11-28(b)和(c)所示这曲面同胚于有三个环柄的球面. 由公式 $\chi=2(1-p)$，其中 p 是曲面的环柄数，(见例 11.1)，曲面的全曲率是 $2\pi\chi=-8\pi$.



(a) (b) (c)

图 11-28

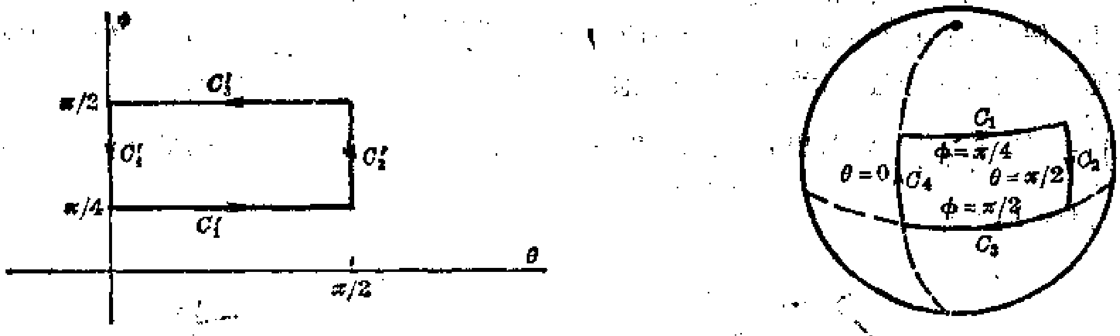


图 11-29

11.31 对于边为 C_1': $\theta=t,\ \phi=\pi/4,\ 0\leqslant t\leqslant\pi/2$; C_2': $\theta=\pi/2,\ \phi=t,\ \pi/4\leqslant t\leqslant\pi/2$; C_3': $\theta=\pi/2-t,\ \phi=\pi/2,\ 0\leqslant t\leqslant\pi/2$; C_4': $\theta=0,\ \phi=\pi/2-t,\ 0\leqslant t\leqslant\pi/4$ 的多边形在半径为 1 的球面

$$x=(\cos\theta\sin\phi)e_1+(\sin\theta\sin\phi)e_2+(\cos\phi)e_3$$

上的像,见图 11-29,直接确定 Gauss-Bonnet 公式的所有各项.

解:这里 $E=\sin^2\phi,\ F=0,\ G=1$ 和 Gauss 曲率 $K=1$,所以

$$\text{(a)}\qquad \iint_R K\,ds=\iint_R\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\left[\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\phi\,d\phi\right]d\theta=\pi\sqrt{2}/4.$$

由方程(11.6),$(K_g)_{\phi=常数}=-\cot\phi$ 得

$$\int_{C_1}K_g\,ds=-\int_0^{\pi/2}\cot(\pi/4)\sqrt{E\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\,dt=-\int_0^{\pi/2}\cos(\pi/4)\,dt$$
$$=-\pi\sqrt{2}/4.$$

因为 C_2, C_3 和 C_4 是测地线,

$$\int_{C_2}\varkappa_g\,ds=\int_{C_3}\varkappa_g\,ds=\int_{C_4}\varkappa_g\,ds=0.$$

于是

$$\text{(b)}\qquad \int_C\varkappa_g\,ds=\int_{C_1}\varkappa_g\,ds=-\pi\sqrt{2}/4.$$

最后,因为参数曲线是正交的,

$$\sum_{i=1}^4\alpha_i=4(\pi/2)=2\pi.$$

11.32 证明一曲面若在每一点的邻域中存在两族相交成定角的测地线,则有常为零的 Gauss 曲率.

证:设 P 是曲面上任意一点,C 是由测地线做成的四边形,其内部包含 P. 应用 Gauss-Bonnet 公式得出

$$\iint_R K\,dS=2\pi-\sum_{i=1}^4\alpha_i.$$

因为测地线相交成定角,$\sum_{i=1}^4\alpha_i=2\pi$,于是 $\iint_R K\,dS=0$ 因为 R 可以取得任意小,因此 $K(P)=0$,命题证毕.

11.33 证明在 $K<0$ 的曲面上,一条测地线不可能有如图 11-30(a)所示的重点,两条

界定一单连通区域的测地线不可能有多于一个如图 11-30(b)所示的交点.

证：假设存在具有上面这两个性质中随便一个的测地线，如图所示，用添加额外的顶点到测地线上的方法，使这两种情形都变成测地三角形，对于它，Gauss-Bonnet 公式是

$\iint_R K\,dS=\sum_{i=1}^{3}\beta_i-\pi$，其中 β_i 是三角形的内角，而在这两种情形中，$\sum_{i=1}^{3}\beta_i>\pi$，这是不可能的，因为 $K<0$.

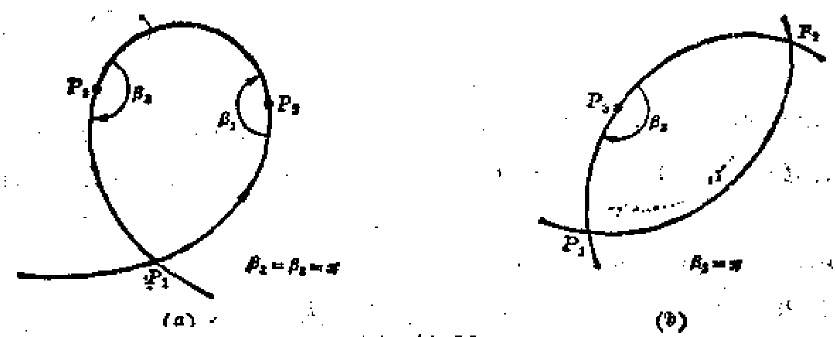


图 11-30

§11.3 补 充 题

11.34 若 S 是紧致曲面，f 是 S 到曲面 S^* 上的正则可微映射，证明 S^* 是紧致的.

11.35 证明定理 11.2：若 f 是 S 到 S^* 的 C^r 类正则可微映射和 $x=x(t)$ 是 S 上的 C^r 类正则曲线 C，则 $x^*=f(x(t))$ 是 S^* 上的 C^r 类正则曲线.

11.36 证明球面到平面上的球极平面投射(见例 11.1)是共形映射.

11.37 证明曲面 S 到曲面 S^* 上的一一正则可微映射是 S 到 S^* 上的一一双连续(拓扑)映射.

11.38 证明曲面 S 到曲面 S^* 的映射 f 是局部等距的，当且仅当对于 S 上每一个坐标曲面片 $x=x(u,v)$ 有 $E=E^*$，$F=F^*$ 和 $G=G^*$，其中 E、F、G 是 $x=x(u,v)$ 上的第一基本系数，E^*、G^*、F^* 是 $x^*=f(x(u,v))$ 上的第一基本系数.

11.39 证明 Monge 片 $x=ue_1+ve_2+f(u,v)e_3$ 上测地线的微分方程是

$$(1+p^2+q^2)\ddot{u}+pr\dot{u}^2+2ps\dot{u}\dot{v}+pt\dot{v}^2=0,$$
$$(1+p^2+q^2)\ddot{v}+qr\dot{u}^2+2qs\dot{u}\dot{v}+qt\dot{v}^2=0,$$

其中
$$p=f_u,\ q=f_v,\ r=f_{uu},\ s=f_{uv},\ t=f_{vv}.$$

11.40 在极坐标下解方程(11.7)，求平面上的测地线.

11.41 证明方程

$$d\theta=\frac{Ca\,dr}{r\sqrt{r^2-C^2}\sqrt{a^2-(r-b)^2}},$$

其中 $r=b+a\sin\phi$，的解是环面

$$x=(b+a\sin\phi)(\cos\theta)e_1+(b+a\sin\phi)(\sin\theta)e_2+(a\cos\phi)e_3$$

上的测地线.

11.42 证明 Liouville 曲面上(见问题 11.18)的测地线为

$$\int (U-C)^{-1/2}du = \pm\int (V+C)^{-1/2}dV = \text{常数}, \quad C=\text{常数},$$

11.43 设 $x=x(u,v)$ 是类 $\geqslant 3$ 的曲面上的坐标曲面片，它的参数曲线是正交的，证明

$$K=\frac{d(\varkappa_g)_1}{ds_1}-\frac{d(\varkappa_g)_2}{ds_2}-(\varkappa_g)_1^2-(\varkappa_g)_2^2,$$

其中 $(\varkappa_g)_1$ 和 $(\varkappa_g)_2$ 分别是沿 u 参数曲线和 v 参数曲线的测地曲率，s_1 和 s_2 分别是沿 u 参数曲线和 v 参数曲线的自然参数.

11.44 设 P 和 Q 是有测地坐标的坐标曲面片 $x=x(u,v)$ 的测地线 $v=$ 常数上的两点. 证明曲面片上所有连结 P 和 Q 的正则弧中，含有 P 和 Q 的测地线最短.

11.45 证明旋转曲面

$$x=(u\cos\theta)e_1+(u\sin\theta)e_2+f(v)e_3,$$

其中
$$u=C_1\cos(v/a)+C_2\sin(v/a)$$

和
$$f(v)=\int\sqrt{1-(du/dv)^2}\,dv,$$

对于所有 C_1, C_2 是正常 Gauss 曲率 $K=1/a^2$ 的曲面. C_1 和 C_2 为何值时，曲面是球面?

答: $C_1=a$, $C_2=0$ 或 $C_1=0$, $C_2=a$.

11.46 证明旋转曲面

$$x=u(\cos\theta)e_1+u(\sin\theta)e_2+f(v)e_3,$$

其中 $u=C_1e^{v/a}+C_2e^{-v/a}$ 和 $f(v)=\int\sqrt{1-(du/dv)^2}\,dv$, 是负常 Gauss 曲率 $K=-1/a^2$ 的曲面.

11.47 证明

$$x=2(\tanh(r/2)\cos\theta)e_1+2(\tan(r/2)\sin\theta)e_2$$

是双曲平面在原点的测地极坐标系，见例 11.9.

11.48 确定双曲平面中从原点到点 P 的内蕴距离.

答: $D(0,P)=\tanh(|P|/2)$.

11.49 设 $x=y(s)$ 是没有拐点的曲线 C 的自然表示，证明直纹面 $x=y(s)+vn(s)$，其中 n 是 C 的单位主法向量，是可展面当且仅当 $x=y(s)$ 是平面曲线.

11.50 证明可定向曲面 S 上一曲线 $x=y(s)$ 是 S 上的曲率线当且仅当直纹面 $x=y(s)+vN(s)$ 是可展面，其中 N 是 S 的法向量.

11.51 设 $x=y(s)+vg(s)$, $|g|=1$, 是可展的，其使得 $g\cdot y=0$, 设 $\phi(s)$ 是 $\angle(g,n)$，其中 n 是 $x=y(s)$ 的主法向量. 证明 $\phi'=-\tau$，其中 τ 是沿 $x=y(s)$ 的挠率.

11.52 若 S 是有常 Gauss 曲率 $K\neq 0$ 的曲面，证明测地多边形的面积由它的内角确定.

11.53 设 C_n, $n=1,2,\cdots$, 是一测地三角形的无穷序列，当 $n\to\infty$ 时其趋于一点，证明

$$K(P)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{3}\beta_{in}-\pi}{A_n},$$

其中 A_n 是 C_n 的面积，β_{in} 是它的内角.

11.54 设 S 是有 p 个环柄的球面，证明在 S 上存在一点使得

(a) $K(p)>0$,若 $p=0$, (b) $K(p)=0$,若 $p=1$, (c) $K(p)<0$,若 $p>1$.

11.55 设 S 是有 Gauss 曲率 $K<0$ 的曲面. 设 P_1, P_2, P_3, P_4 是一有单连通内部的测地四边形的顶点,两条对边 P_1P_2 和 P_3P_4 的长相等并垂直于第三边 P_2P_3,证明在 P_1 和 P_4 的内角是锐角.

11.56 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是测地坐标系,其使得 u 参数是测地线的自然表示,证明若 C 是曲面片上的自然表示的测地线,且 $\theta(s)$ 是由 $\boldsymbol{t}=(\cos\theta)\boldsymbol{g}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{g}_2$ 确定的函数,其中 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 分别是沿 u 参数曲线和 v 参数曲线方向的单位向量,$\boldsymbol{t}$ 是 C 的单位切向量,则沿 C,

$$\frac{d\theta}{ds}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{dv}{ds}=0.$$

11.57 利用上一问题的结果,对于一测地三角形,取其一个顶点作为测地极坐标系的中心,导出其 Gauss-Bonnet 公式.

附录 I 曲线的存在定理

设 $\kappa(s)>0$ 和 $\tau(s)$ 是 $0\leqslant s\leqslant a$ 上实变数 s 的连续函数,则在 $0\leqslant s\leqslant a$ 上存在 C^2 类曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$,它的曲率为 $\kappa(s)$,挠率为 $\tau(s)$,s 为自然参数.

证明:考虑 9 个数量函数的微分方程组

$$\begin{aligned}\dot t_i&=\kappa n_i,\\ \dot n_i&=-\kappa t_i+\tau b_i,\\ \dot b_i&=-\tau n_i\quad(i=1, 2, 3),\end{aligned}$$

给出初始条件

$$\begin{aligned}&t_1(0)=1, && t_2(0)=0, && t_3(0)=0,\\ &n_1(0)=0, && n_2(0)=1, && n_3(0)=0,\\ &b_1(0)=0, && b_2(0)=0, && b_3(0)=1.\end{aligned}$$

这是具有连续系数的线性齐次微分方程组,从微分方程组的唯一存在定理知道,对于任意给定的初始值,在 $0\leqslant s\leqslant a$ 上存在唯一的 C^1 类的解 $t_i(s)$, $n_i(s)$, $b_i(s)$, $i=1, 2, 3$, 满足给出的初始条件. 现在设解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}&=t_1\boldsymbol{e}_1+t_2\boldsymbol{e}_2+t_3\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{n}&=n_1\boldsymbol{e}_1+n_2\boldsymbol{e}_2+n_3\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{b}&=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

我们要证明$(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$,对所有 S 为右旋的彼此正交的单位向量. 为此,我们研究以 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$ 为未知数的微分方程组. 显然

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{t}}&=\kappa\boldsymbol{n},\\ \dot{\boldsymbol{n}}&=-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b},\\ \dot{\boldsymbol{b}}&=-\tau\boldsymbol{n},\end{aligned}$$

且 $$\boldsymbol{t}(0)=\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{n}(0)=\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{b}(0)=\boldsymbol{e}_3,$$

由这个式子容易检验,$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$ 满足如下线性齐次微分方程

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t})=2\kappa(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}),$$

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n})=\varkappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})-\varkappa(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t})+\tau(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}),$$

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b})=\varkappa(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b})-\tau(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}),$$

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})=-2\varkappa(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n})+2\tau(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}),$$

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b})=-\varkappa(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b})+\tau(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-\tau(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}),$$

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=-2\tau(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}),$$

具有初始条件

$$(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t})(0)=1,\quad(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})(0)=1,$$
$$(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b})(0)=0,\quad(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b})(0)=0,$$
$$(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n})(0)=0,\quad(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(0)=1.$$

对于给定的初始值，这个方程组的解是唯一的，并且用 1, 0, 0, 1, 0, 1 分别替代 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$，容易检验它们满足这个方程组，因此，对所有 s，

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1,\quad\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}=0,$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1,\quad\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0,\quad\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1.$$

于是对所有 s, $(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b})$ 是彼此正交的单位向量．因为 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ 是 s 的连续函数，当 $s=0$ 时是右旋的，(即 $(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b})=1$) 故对所有 s, $(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b})$ 是右旋的．

现在确定曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)=\int_0^s\boldsymbol{t}(\sigma)d\sigma$．显然 $\boldsymbol{x}(s)$ 是 C^2 类，因为 $|\dot{\boldsymbol{x}}|=|\boldsymbol{t}|=1$，因此 s 是自然参数．因为 $\dot{\boldsymbol{t}}=\varkappa\boldsymbol{n}$，其中 $|\boldsymbol{n}|=1$，由此得到 $\varkappa$ 是它的曲率．最后，因为 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$，且

$$\dot{\boldsymbol{b}}=\dot{\boldsymbol{t}}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\times\dot{\boldsymbol{n}}=\varkappa(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})+(-\varkappa(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t}))+\tau(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{b})=-\tau\boldsymbol{n},$$

其中 $|\boldsymbol{n}|=1$，由此得到 τ 是它的挠率． 证毕．

附录 II 曲面的存在定理

设 E, F, G 是 u, v 的 C^2 类函数，L, M, N 是 u, v 的 C^1 类函数，它们定义在包含 $(u_0,\ v_0)$ 的开集上，使得

(i) $EG-F^2>0$, $E>0$, $G>0$,

(ii) E, F, G, L, M, N 满足相容性方程(10.7)和(10.8)，则在 $(u_0,\ v_0)$ 的邻域，存在一个 C^3 类正则参数表示的曲面 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$，它的第一基本系数是 E, F, G，第二基本系数是 L, M, N．

证明：

我们研究数量函数的偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned}&(U_i)_u=\Gamma_{11}^1U_i+\Gamma_{11}^2V_i+LN_i,\quad(V_i)_v=\Gamma_{22}^1U_i+\Gamma_{22}^2V_i+NN_i,\\&(U_i)_v=\Gamma_{12}^1U_i+\Gamma_{12}^2V_i+MN_i,\quad(N_i)_u=\beta_1^1U_i+\beta_1^2V_i,\quad(i=1,\ 2,\ 3),\\&(V_i)_u=\Gamma_{12}^1U_i+\Gamma_{12}^2V_i+MN_i,\quad(N_i)_v=\beta_2^1U_i+\beta_2^2V_i\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

初始条件为

$$\left.\begin{array}{lll} U_1(u_0, v_0)=\sqrt{E_0}, & V_1(u_0, v_0)=\dfrac{F_0}{\sqrt{E_0}}, & N_1(u_0, v_0)=0, \\ U_2(u_0, v_0)=0, & V_2(u_0, v_0)=\dfrac{\sqrt{E_0G_0-F_0^2}}{\sqrt{E_0}}, & N_2(u_0, v_0)=0, \\ U_3(u_0, v_0)=0, & V_3(u_0, v_0)=0, & N_3(u_0, v_0)=1 \\ (E_0=E(u_0, v_0),\ F_0=F(u_0, v_0),\ G_0=G(u_0, v_0)), & & \end{array}\right\} \tag{2}$$

其中 Christoffel 记号 Γ_{ij}^k 由第 10 章(10.4)式给定，β_i^j 由第 10 章(10.2)式给定．这是一个含 18 个一阶线性齐次偏微分方程组，其中 9 个函数 $U_i(u, v)$, $V_i(u, v)$, $N_i(u, v)$, $i=1, 2, 3$ 的系数是 C^1 类函数．另外，因为这些方程满足相容性条件，由偏微分方程论的唯一存在定理知道，这个方程组对于给定的初始值，存在唯一的 C^2 类的解 $U_i(u, v)$, $V_i(u, v)$, $N_i(u, v)$, $i=1, 2, 3$．它们在 (u_0, v_0) 的邻域满足给出的初始条件．

现在设解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}&=U_1\boldsymbol{e}_1+U_2\boldsymbol{e}_2+U_3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{V}&=V_1\boldsymbol{e}_1+V_2\boldsymbol{e}_2+V_3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{N}&=N_1\boldsymbol{e}_1+N_2\boldsymbol{e}_2+N_3\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

由初始条件，容易算得在 (u_0, v_0)

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}=E,\ \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}=F,\ \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}=G,$$
$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}=0,\ \ \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}=0,\ \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=1.$$

我们证明在 (u_0, v_0) 的领域，对所有 (u, v)，

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}=E,\ \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}=F,\ \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}=G$$
$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}=0,\ \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}=0,\ \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=1$$

如同曲线的存在定理那样，我们研究以 $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}$ 为未知数的偏微分方程组，由方程组(1)容易算得方程组(3)

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})_u=2\Gamma_{11}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})+2\Gamma_{11}^2(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+2L(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})_v=2\Gamma_{12}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})+2\Gamma_{12}^2(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+2M(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})_u=\Gamma_{12}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})+(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2)(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+\Gamma_{11}^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})+M(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})+L(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})_v=\Gamma_{22}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})+(\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^2)(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+\Gamma_{12}^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})+N(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})+M(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})_u=2\Gamma_{12}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+2\Gamma_{12}^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})+2M(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})_v=2\Gamma_{22}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+2\Gamma_{22}^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})+2N(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N})_u=\beta_1^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+\beta_1^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})+\Gamma_{12}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})+\Gamma_{12}^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N})+M(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N})_v=\beta_2^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+\beta_2^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})+\Gamma_{22}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})+\Gamma_{22}^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N})+N(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})_u=\beta_1^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})+\beta_1^2(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+\Gamma_{11}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})+\Gamma_{11}^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N})+L(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})_v=\beta_2^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})+\beta_2^2(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})+\Gamma_{12}^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})+\Gamma_{12}^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N})+M(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N})_u=2\beta_1^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})+2\beta_1^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}), \\ &(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N})_v=2\beta_2^1(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})+2\beta_2^2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}), \end{aligned} \tag{3}$$

具有初始条件

$$(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})(u_0, v_0)=E_0,\ (\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})(u_0, v_0)=F_0,\ (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})(u_0, v_0)=G_0,$$
$$(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})(u_0, v_0)=0,\ \ (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N})(u_0, v_0)=0,\ \ (\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N})(u_0, v_0)=1.$$

这仍是线性齐次一阶偏微分方程组．因为我们知道这个方程组存在 C^2 类的解．可见，对这组方程组相容性条件也满足，于是由偏微分方程论的唯一存在定理知道，对于给定的初始值，这个方程组满足初始条件的解是唯一的．用 E, F, G, 0, 0, 1 分别代替 $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}$, 容易检验它们满足方程组(3)．因此在 (u_0, v_0) 的邻域，对所有 (u, v),

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}=E,\ \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}=F,\ \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}=G,$$
$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}=0,\quad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}=0,\ \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=1,$$

现在根据偏微分方程 $\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{V}$ 确定曲面．因为 $\boldsymbol{U}_v=\boldsymbol{V}_u$, C^3 类的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 存在，并且等于

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)=\int_{u_0}^{u}\boldsymbol{U}(\xi, v)d\xi+\int_{v_0}^{v}\boldsymbol{V}(u_0, \eta)\,d\eta.$$

剩下证明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 是正则的，即是 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq\boldsymbol{0}$，且第一基本系数是 E, F, G，第二基本系数是 L, M, N．因为

$$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$$

是连续的，且初始值

$$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v(u_0, v_0)=\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}(u_0, v_0)=\sqrt{E_0G_0-F_0^2}\,\boldsymbol{e}_0\neq 0.$$

由此得到在 (u_0, v_0) 的某一邻域，

$$\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq\boldsymbol{0}.$$

显然

$$\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}=E,\ \boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}=F,\ \boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v=G.$$

最后，从偏微分方程组(1)并注意到

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}=0,\quad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}=0,\quad \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=\ ,$$

直接得到

$$\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}_u\cdot\boldsymbol{N}=L,$$
$$\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{V}_u\cdot\boldsymbol{N}=M,$$
$$\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{V}_v\cdot\boldsymbol{N}=N.$$

因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ 的第二基本系数是 L, M, N． 证毕．